Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 517.3+514.7

ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ДЛЯ КЛАССОВ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ГРУПП КАРНО

М. Б. Карманова

Аннотация. Доказаны формулы площади для классов гёльдеровых в субримановом смысле отображений, а также для их графиков и графиков липшицевых отображений, определенных на нильпотентных градуированных группах. Кроме того, для одного из модельных случаев установлена формула площади для вычисления исходной меры и близкой к ней.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.509

Ключевые слова: нильпотентная градуированная группа, группа Карно, гёльдерово отображение, липшицево отображение, отображение-график, внутренняя мера, формула площади.

В работе установлены формулы площади разных типов для таких классов гёльдеровых отображений групп Карно, как графики липшицевых в субримановом смысле отображений, графики гладких неконтактных отображений и самих неконтактных отображений. В [1–3] доказано свойство полиномиальной субримановой дифференцируемости отображений из этих широких классов и построены адаптированные базисы, «переносящие» групповую структуру с прообраза на образ. Поэтому решение вопроса о выводе их метрических свойств является естественным продолжением начатых исследований.

Напомним, что группы Карно, как и нильпотентные градуированные группы, являются частным случаем пространств Карно — Каратеодори. Для римановой метрики ρ и согласованной с групповой структурой квазиметрики d_∞ справедливы следующие (локальные) оценки сравнения на группе глубины M:

$$\frac{1}{C}\rho \le d_\infty \le C\rho^{1/M}, \quad C < \infty.$$

Таким образом, во-первых, построение примеров липшицевых (относительно d_∞) отображений сложных неголономных структур является отдельной нетривиальной задачей (см., например, [4–7]), и, во-вторых, отображения класса C^1 (в римановом смысле) будут в общем случае гёльдеровыми с показателем $1/M$. На данный момент наиболее общие результаты о формулах площади получены в [8] для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори, а также в [9, 10] для поверхностей-образов отображений, являющихся графиками липшицевых функций или отображений со значениями на группах Гейзенберга. Особенности проводимого в работе исследования состоят в том, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–31–60036–мол–а–дк).

1) как образ, так и прообраз — нильпотентные градуированные группы произвольной глубины и размерности,

2) выводятся метрические свойства графиков липшицевых в субримановом смысле отображений,

3) помимо отображений-графиков изучается подкласс класса гёльдеровых отображений, не являющихся графиками.

Вышеперечисленные особенности не позволяют напрямую переносить существующие результаты для «регулярных» и частных случаев на рассматриваемые в силу того, что известные на сегодняшний день подходы требуют адаптации к тонкостям задачи (например, координатные функции полиномиального субриманова дифференциала зависят от координат точки нелинейно в отличие от двуступенчатого случая, и т. п.), а на некоторых шагах — проверки корректности применения таких модифицированных методов.

В разд. 1 приведены основные определения и факты неголономной геометрии. В разд. 2 доказана формула подсчета адаптированной меры для классов гёльдеровых отображений и их графиков. В разд. 3 выводится формула площади нового типа без использования адаптированного (в смысле определения 2.14) базиса для модельного случая отображений групп Гейзенберга.

1. Группы Карно и их свойства

Опишем группы Карно (см., например, определение стратифицированной однородной группы в [11]) и их обобщения — нильпотентные градуированные группы.

Определение 1.1. *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < M, \quad [V_1, V_M] = \{0\}. \tag{1.1}$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x.

Определение 1.2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем

$$X_1, \dots, X_{\dim V_1} \text{ — базис } V_1,$$

$$X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_{k-1} + 1}, \dots, X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_k} \text{ — базис } V_k,\ 1 < k \leq M.$$

Здесь $\dim V_k$ означает размерность V_k (в каждой точке x). Если $X_j \in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Определение 1.3. *Нильпотентной градуированной группой* (*Ли*) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, для алгебры Ли V которой справедливо

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] \subset V_{j+1},\ j < M, \quad [V_k, V_M] = \{0\}, \quad k = 1, \dots, M.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x. Степени базисных полей задаются аналогично определению 1.2.

Иными словами, для нильпотентной градуированной группы соотношение $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ из (1.1) может не выполняться. Группа Карно является частным случаем нильпотентной градуированной группы.

Определение 1.4. Минимальное число M такое, что $V_M \neq \{0\}$, а $V_{M+1} = \{0\}$, называется *глубиной* нильпотентной градуированной группы $\mathbb{G}$.

Обозначение 1.5. Обозначим символом $\mathbf{0}$ единицу группы $\mathbb{G}$.

Из формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа и условия левоинвариантности базисных полей выводятся следующие выражения для групповой операции на $\mathbb{G}$. Если $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, $y = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, где $z_j = x_j + y_j$ для $\deg X_j = 1$,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu>0,\beta>0,\\ |\mu+\beta|_h=\deg X_j}} F^j_{\mu,\beta} x^\mu y^\beta$$

при $\deg X_j > 1$. Для каждого N-мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \deg X_i$.

Здесь умножение $x \cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет до точки x вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j$ с началом в x. Таким образом, интегральная линия поля $\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Bigr)(x)$.

Определение 1.6. Константы $\bigl\{F^j_{\mu,\beta}\bigr\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

Определение 1.7. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^{N} v_i X_i\Biggr)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

Определение 1.8. Пусть $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности N и глубины M, и пусть $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i\Bigr)(u)$. Определим величину d_∞ следующим образом:

$$d_\infty(x, u) = \max_{i=1,\dots,N} \bigl\{|x_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\bigr\}.$$

Свойство 1.9. *Величина $d_\infty(v,w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности и для всякой окрестности $D \subset \mathbb{G}$ существует константа $C_D < \infty$ такая, что обобщенное неравенство треугольника*

$$d_\infty(v,w) \le C_D(d_\infty(v,u) + d_\infty(u,w))$$

верно для всех $v,u,w \in D$.

Обозначение 1.10. Шар в квазиметрике d_∞ радиуса r с центром в точке x, равный $\{y \in \mathbb{G} : \ d_\infty(x,y) < r\}$, обозначим через $\operatorname{Box}(x,r)$.

Свойство 1.11. *Образ шара* $\operatorname{Box}(x,r)$ *при отображении θ_x^{-1} — декартово произведение M кубов, длины сторон которых равны $2r, 2r^2, \dots, 2r^M$.*

Свойство 1.12. *С помощью свойства* 1.11 *непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно d_∞ равна*

$$\nu = \sum_{j=1}^{M} j \dim V_j.$$

Определение 1.13 [12]. Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы Ли, $E \subset \mathbb{G}$ и $\psi : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Пусть еще $\tilde{\mathfrak{d}} : \psi(E) \times \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{R}_+$. Будем говорить, что ψ *полиномиально субриманово дифференцируемо*, или *полиномиально hc-дифференцируемо*, в (предельной) точке $x \in E$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\psi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x,w))$, $E \ni w \to x$;

2) $\mathscr{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$, где L_x — оператор с полиномиальными относительно $w_1, \dots, w_N$ коэффициентами, а $\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} w_j X_j\right)(x) = w$.

Отображение $\mathscr{L}_x$ называется *полиномиальным субримановым дифференциалом*, или *полиномиальным hc-дифференциалом*, отображения ψ в точке x.

Обозначение 1.14. Здесь и далее полиномиальный субриманов дифференциал $\mathscr{L}_x$ отображения ψ в точке x будем обозначать через $\widehat{D}_P\psi(x)$.

2. Адаптированная мера поверхностей

Прежде всего опишем класс рассматриваемых в статье отображений и их дифференциальные свойства.

Обозначение 2.1. Для $\mathbb{G} \ni y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i X_i\right)(x)$ коэффициенты при полях степени k будем называть *переменными степени* k, $k = 1, \dots, M$.

Предположение 2.2. *Будем рассматривать $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, где*

1) $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество;

2) $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности N с базисными полями $X_1, \dots, X_N$, хаусдорфовой размерности ν, с алгеброй Ли векторных полей $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{M} V_i$, где размерность V_i в каждой точке равна n_i, а поля $X_{d_{i-1}+1}, \dots, X_{d_i}$ составляют базис V_i, $d_i = \sum\limits_{k=1}^{i} n_k$, $d_0 = 0$, $i = 1, \dots, M$, и единицей $\mathbf{0}$;

3) $\widetilde{\mathbb{G}}$ — *нильпотентная градуированная группа топологической размерности* $\widetilde{N}$ *с базисными полями* $\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_{\widetilde{N}}$, *хаусдорфовой размерности* $\tilde{\nu}$, *с алгеброй Ли векторных полей* $\widetilde{V}=\bigoplus\limits_{i=1}^{\widetilde{M}}\widetilde{V}_i$, *где размерность* $\widetilde{V}_i$ *в каждой точке равна* $\tilde{n}_i$, *а поля* $\widetilde{X}_{\tilde{d}_{i-1}+1},\dots,\widetilde{X}_{\tilde{d}_i}$ *составляют базис* $\widetilde{V}_i$, $\tilde{d}_i=\sum\limits_{k=1}^{i}\tilde{n}_k$, $\tilde{d}_0=0$, $i=1,\dots,\widetilde{M}$, *и единицей* $\widetilde{\mathbf{0}}$;

4) *каждая координатная функция* φ_i *имеет гладкость* $\left[\frac{\widetilde{M}+k-1}{k}\right]$ *по переменным степени* k, $i=1,\dots,\widetilde{N}$, $k=1,\dots,M$.

Обозначение 2.3 [1, 2]. Пусть $\psi:\mathbb{G}\to\mathbb{R}$. Обозначим через $D_{s,q}\psi(x)\langle y\rangle$, $y=\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{N}y_kX_k\right)(x)$, минимальную часть многочлена Тейлора, состоящую из производных порядка не выше qs функции ψ в точке x по переменным $(y_1,\dots,y_{d_q})$ степеней, не превосходящих q, которая аппроксимирует значение

$$\psi\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{d_q}y_kX_k\right)(x)\right)-\psi\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{d_{q-1}}y_kX_k\right)(x)\right)-D\psi(x)\left\langle\sum_{l=d_{q-1}+1}^{d_q}y_lX_l\right\rangle \quad (2.1)$$

с точностью до величины $o(\max\limits_{i=1,\dots,d_q}\{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\})^{qs}$.

Замечание 2.4 [1, 2]. Обратим внимание, что (2.1) равно выражению

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}(y_1,\dots,y_{d_q},0_{d_q+1},\dots,0_N)-\bar{\psi}(y_1,\dots,y_{d_{q-1}},0_{d_{q-1}+1},\dots,0_N)\\&\quad-D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,\bar{y}_N\rangle+D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})\langle 0,\dots,0,\bar{y}_{d_q+1},\dots,\bar{y}_N\rangle\\&\qquad+(D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})-D\bar{\psi}(0))\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,y_{d_q},0,\dots,0\rangle,\end{aligned}$$

где $\bar{\psi}=\psi\circ\theta_x$, $\bar{x}^{q-1}=(y_1,\dots,y_{d_{q-1}},0_{d_{q-1}+1},\dots,0_N)$, нули с индексами обозначают нулевые координаты с соответствующими номерами, а координаты $\bar{y}_k$ определяются формулами групповой операции на $\mathbb{G}$ и могут отличаться от соответствующих y_k, $k=d_q+1,\dots,N$ (см. также комментарии в [2]).

Справедлив следующий результат о полиномиальной субримановой дифференцируемости классов гёльдеровых отображений.

Теорема 2.5 [1, 2]. *Пусть выполнены условия предположения* 2.2. *Отображение* $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{G}}$ *полиномиально субриманово дифференцируемо всюду, и* $\widehat{D}_P\varphi(x)$ *в нормальных координатах относительно* $\varphi(x)$ *сопоставляет элементу* y *набор* $(\Delta_1(x,y),\dots,\Delta_{\widetilde{N}}(x,y))$, *где для* $\deg\widetilde{X}_i=k$, $k\le\widetilde{M}-1$,

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y)&=D\varphi_i(x)\langle y\rangle+\sum_{p=1}^{M}D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle\\&\quad+\sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}}G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^{\alpha}\prod_{q=1}^{\widetilde{N}}\Biggl(\varphi_q(x)+D\varphi_q(x)\langle y\rangle\\&\quad+\sum_{p=1}^{M}D_{[\frac{\widetilde{M}+p-3}{p}],p}\varphi_q(x)\langle y\rangle\Biggr)^{\beta_q}\left(\varphi_l(x)\left(D\varphi_j(x)\langle y\rangle+\sum_{p=1}^{M}D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_j(x)\langle y\rangle\right)\right.\end{aligned}$$

$$- \varphi_j(x)\Bigg(D\varphi_l(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_l(x)\langle y\rangle\Bigg)\Bigg)$$

и для $\deg \widetilde{X}_i = \widetilde{M}$

$$\Delta_i(x,y) = D\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha \prod_{q=1}^{\widetilde{N}}\Bigg(\varphi_q(x) + D\varphi_q(x)\langle y\rangle$$

$$+ \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_q(x)\langle y\rangle\Bigg)^{\beta_q}\Bigg(\varphi_l(x)\Bigg(D\varphi_j(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_j(x)\langle y\rangle\Bigg)$$

$$- \varphi_j(x)\Bigg(D\varphi_l(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_l(x)\langle y\rangle\Bigg)\Bigg),$$

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{\widetilde{N}})$, *и в выражении* $(-\varphi(x))^\alpha$ *символ* $\varphi(x)$ *обозначает набор* $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{\widetilde{N}}(x))$.

Для классов отображений-графиков будем считать, что выполнены следующие условия.

Предположение 2.6. *Пусть* $(\mathbb{G}, \{X_1, \dots, X_N\})$ *и* $(\widetilde{\mathbb{G}}, \{\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}\})$ *соответственно группа Карно и нильпотентная градуированная группа, для которых справедливы условия и обозначения предположения* 2.2. *Пусть, кроме того,*

1) $\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, *где* $\mathbb{U}$ — *нильпотентная градуированная группа топологической размерности* $N + \widetilde{N}$, $\mathbb{G} \cap \widetilde{\mathbb{G}} = 0 = (\mathbf{0}, \widetilde{\mathbf{0}})$;

2) *поля* $X_1, \dots, X_N$ *и* $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}$ *базисные для всей группы* $\mathbb{U}$;

3) $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — *липшицево в субримановом смысле отображение, где* $\Omega \subset \mathbb{G}$ — *открытое множество.*

Теорема 2.7 [1, 2]. *Пусть выполнены условия предположения* 2.6. *Отображение-график* $\varphi_\Gamma : \Omega \to \mathbb{U}$, *где* $\Omega \subset \mathbb{G}$ — *открытое множество, полиномиально субриманово дифференцируемо почти всюду (а именно в точках hc-дифференцируемости* φ*), и* $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ *сопоставляет элементу* $\exp\Big(\sum_{p=1}^{N} y_p X_p\Big)(x)$ *в координатах относительно* $\varphi_\Gamma(x)$ *набор* $(\Delta_1(x,y), \dots, \Delta_N(x,y), \widetilde{\Delta}_1(x,y), \dots, \widetilde{\Delta}_{\widetilde{N}}(x,y))$, *где*

$$\Delta_i(x,y) = y_i + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg X_i,\\ \kappa,|\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h=\deg X_i,\\ \alpha,\tau>0}} L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^\beta(\varphi(x))^\gamma y^\alpha(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\widetilde{\Delta}_j(x,y) = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg \widetilde{X}_j,\\ \kappa,|\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda$$

$$+\sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h=\deg\widetilde{X}_j,\\ \alpha,\tau>0}} L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^{\beta}(\varphi(x))^{\gamma}y^{\alpha}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\tau}, \quad j=1,\dots,\widetilde{N}, \tag{2.2}$$

кроме того, символы y, $\varphi(x)$ *и* $\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle$, *взятые в качестве возводимых в степень объектов, обозначают наборы* $(y_1,\dots,y_N)$, $(\varphi_1(x),\dots,\varphi_{\widetilde{N}}(x))$ *и* $\big((\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_1,\dots,(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_{\widetilde{N}}\big)$ *соответственно, а* $K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}$, $L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$, $K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}$ *и* $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$ *— константы для всех мультииндексов* κ, μ, λ, α, β, γ, τ, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,\widetilde{N}$.

Подчеркнем, что для вывода (2.2) достаточно только липшицевости φ во внутреннем (субримановом) смысле.

Следствие 2.8. *Дифференциал* $D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$ *полиномиального* hc*-дифференциала в точке* x *имеет вид*

$$\begin{pmatrix}
E_{\dim V_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
* & E_{\dim V_2} & 0 & \dots & 0 & 0\\
* & * & E_{\dim V_3} & \dots & 0 & 0\\
\dots & & & \cdots & 0 & 0\\
* & * & * & \cdots & * & E_{\dim V_M}\\
(\widehat{D}\varphi)_{V_1,\widetilde{V}_1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
* & (\widehat{D}\varphi)_{V_2,\widetilde{V}_2}(x) & 0 & \dots & 0 & 0\\
* & * & (\widehat{D}\varphi)_{V_3,\widetilde{V}_3}(x) & \dots & 0 & 0\\
* & * & * & \cdots & * & (\widehat{D}\varphi)_{V_M,\widetilde{V}_M}(x)
\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где $E_{\dim V_l}$ *— единичные матрицы размерности* $\dim V_l$, $l=1,\dots,M$, $(\widehat{D}\varphi)_{V_j,\widetilde{V}_j}(x)$, $j=1,\dots,\min\{M,\widetilde{M}\}$, *— диагональные блоки матрицы* hc*-дифференциала* [13–15] *отображения* φ, *и* $(\widehat{D}\varphi)_{V_M,\widetilde{V}_M}(x)=\varnothing$, *если* $\widetilde{M}<M$ *(в этом случае последний блок* hc*-дифференциала отображения* φ *равен* $(\widehat{D}\varphi)_{V_{\widetilde{M}},\widetilde{V}_{\widetilde{M}}}$*). Если* $\widetilde{M}>M$, *то в матрице* (2.3) *присутствуют дополнительные строки.*

Действительно, достаточно рассмотреть матрицу $\big(\frac{\partial\widehat{\Delta}_i(x,y)}{\partial y_j}\big|_{y=0}\big)$, $i=1,\dots,N+\widetilde{N}$, $j=1,\dots,N$, где $\widehat{\Delta}_i=\Delta_i$ для $i=1,\dots,N$ и $\widehat{\Delta}_i=\widetilde{\Delta}_{i-N}$ для $i=N+1,\dots,N+\widetilde{N}$.

Свойство 2.9. *С помощью элементарных преобразований базиса в образе отображения-графика (для фиксированной точки* $x\in\Omega$*) вида*

$$X_q\mapsto Y_q=X_q+\sum_{i:\deg X_i>\deg X_q}P^i_q(x)X_i+\sum_{j:\deg\widetilde{X}_j>\deg X_q}\widetilde{P}^j_q(x)\widetilde{X}_j, \tag{2.4}$$

$q=1,\dots,N$, *матрицу* (2.3) *дифференциала* $D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$ *можно привести к* *виду*

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\dim V_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E_{\dim V_M} \\ (\widehat{D}\varphi)_{V_1,\widetilde{V}_1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\widehat{D}\varphi)_{V_2,\widetilde{V}_2}(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\widehat{D}\varphi)_{V_3,\widetilde{V}_3}(x) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (\widehat{D}\varphi)_{V_M,\widetilde{V}_M}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $E_{\dim V_l}$ *— единичные матрицы размера* $\dim V_l$, $l = 1, \dots, M$, *а* $(\widehat{D}\varphi)_{V_j,\widetilde{V}_j}(x)$, $j = 1, \dots, \min\{M, \widetilde{M}\}$, *— диагональные блоки матрицы* hc*-дифференциала* [13–15] *отображения* φ, *и* $(\widehat{D}\varphi)_{V_M,\widetilde{V}_M}(x) = \varnothing$, *если* $\widetilde{M} < M$. *Если* $\widetilde{M} > M$, *то в матрице* (2.5) *присутствуют дополнительные нулевые строки.*

Обозначение 2.10. Часть дифференциала $D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$, соответствующую матрице (2.5), будем обозначать через $D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$.

Теорема 2.11 [1, 2]. *Пусть для* $\mathbb{G}$ *и* $\widetilde{\mathbb{G}}$ *выполнены условия предположения* 2.6, *и пусть отображение* φ *такое, как описано в предположении* 2.2. *Отображение-график* $\varphi_\Gamma : \Omega \to \mathbb{U}$, *где* $\Omega \subset \mathbb{G}$ *— открытое множество, непрерывно полиномиально субриманово дифференцируемо всюду, и* $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ *сопоставляет в нормальных координатах относительно* $\varphi_\Gamma(x)$ *каждому элементу* $\exp\left(\sum\limits_{p=1}^{N} y_p X_p\right)(x)$ *набор* $(\Gamma_1(x,y), \dots, \Gamma_N(x,y), \widetilde{\Gamma}_1(x,y), \dots, \widetilde{\Gamma}_{\widetilde{N}}(x,y))$, *где*

$$\begin{aligned} \Gamma_i(x,y) = y_i &+ \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i, \\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \tau > 0}} L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_j(x,y) = (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j &+ \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_j, \\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg \widetilde{X}_j, \\ \alpha, \tau > 0}} L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad j = 1, \dots, \widetilde{N}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

кроме того, как и в теореме 2.7, $y = (y_1, \dots, y_N)$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{\widetilde{N}}(x))$, $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle = \big((\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_1, \dots, (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_{\widetilde{N}}\big)$ *— координаты полиномиального субриманова дифференциала* φ *в точке* x *на элементе* y *относительно* $\varphi_\Gamma(x)$ *и* $K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}$, $L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$, $K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}$ *и* $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$ *— константы для всех* κ, μ, λ, α, β, γ, τ, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \widetilde{N}$.

Свойство 2.12. *С помощью элементарных преобразований вида* (2.4) *базиса* $\{X_i\}_{i=1}^N$ *в образе отображения-графика для фиксированной точки* $x \in \Omega$ *матрицу дифференциала* $D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$ *можно привести к виду* (2.5), *где вместо блоков* $(\widehat{D}\varphi)_{V_j,\widetilde{V}_j}(x)$ *будут блоки* $D((\widehat{D}_P\varphi)(x))_{V_j,\widetilde{V}_j}(x)$ *размеров* $\dim\widetilde{V}_j \times \dim V_j$, $j = 1,\dots,\min\{M,\widetilde{M}\}$. *Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть матрицу* $\bigl(\frac{\partial\widehat{\Gamma}_i(x,y)}{\partial y_j}\bigr|_{y=0}\bigr)$, $i = 1,\dots,N+\widetilde{N}$, $j = 1,\dots,N$, *где* $\widehat{\Gamma}_i = \Gamma_i$ *для* $i = 1,\dots,N$ *и* $\widehat{\Gamma}_i = \widetilde{\Gamma}_{i-N}$ *для* $i = N+1,\dots,N+\widetilde{N}$.

Обозначение 2.13. Матрицу, состоящую из блоков $D((\widehat{D}_P\varphi)(x))_{V_j,\widetilde{V}_j}(x)$, $j = 1,\dots,\min\{M,\widetilde{M}\}$, где остальные элементы равны нулю, обозначим символом $D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$.

Введем понятия адаптированного базиса и соответствующей меры.

Определение 2.14 [2,3]. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\psi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Если координаты $\{\kappa_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\psi(x)\langle y\rangle$, рассмотренные относительно точки $\psi(x)$ в базисе $\{Y_i\}_{i=1}^{\widetilde{N}}$, обладают свойством $|\kappa_j| = O(d_\infty(x,y)^{\deg\widetilde{X}_j})$, $j = 1,\dots,\widetilde{N}$, то базис $\{Y_i\}_{i=1}^{\widetilde{N}}$ называется *внутренним*, или *адаптированным* (в точке x).

Справедливы следующие результаты для рассматриваемых классов гёльдеровых отображений.

Теорема 2.15 [2,3]. *Пусть* φ *в условиях предположения* 2.6 *является контактным отображением, имеющим гладкость* $\bigl[\frac{\max\{M,\widetilde{M}\}+p-1}{p}\bigr]$ *по переменным степени* p, $p = 1,\dots,M$. *Тогда для всех* $x \in \Omega$ *существуют полученный линейными преобразованиями базиса* $\{X_i\}_{i=1}^N$ *базис* $\{Y_j\}_{j=1}^N$ *и адаптированный базис* $\{{}^xX_1,\dots,{}^xX_N,{}^x\widetilde{X}_1,\dots,{}^x\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$ *такие, что множество*

$$\bigl(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\bigr)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle)$$

совпадает с $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle$, *а*

$$\bigl(\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\bigr)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle) = D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle.$$

Здесь $\theta_{\varphi_\Gamma(x)}$ — *отображение нормальных координат в исходном базисе,* $\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)}$ — *в преобразованном базисе,* $\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}$ — *в адаптированном базисе, а* D_{diag} — *блочно-диагональная часть дифференциала, состоящая из блоков размеров* $(n_i + \tilde{n}_i) \times n_i$, $i = 1,\dots,\min\{M,\widetilde{M}\}$ (*полученная при перегруппировке полей на* $\mathbb{U}$ *по степеням*).

Теорема 2.16 [2,3]. *Пусть для* $\mathbb{G}$ *и* $\widetilde{\mathbb{G}}$ *выполнены условия предположения* 2.6, *а отображение* φ *в условиях предположения* 2.2 *по переменным степени* p, $p = 1,\dots,M$, *имеет гладкость* $\bigl[\frac{\max\{M,\widetilde{M}\}+p-1}{p}\bigr]$. *Тогда для всех* $x \in \Omega$ *существуют полученный линейными преобразованиями базиса* $\{X_i\}_{i=1}^N$ *базис* $\{Y_j\}_{j=1}^N$ *и адаптированный базис* $\{{}^xX_1,\dots,{}^xX_N,{}^x\widetilde{X}_1,\dots,{}^x\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$ *такие, что множество*

$$\bigl(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\bigr)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle)$$

совпадает с $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle$, *а*

$$\bigl(\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\bigr)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle) = D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle.$$

Здесь $\theta_{\varphi_\Gamma(x)}$ — отображение нормальных координат в исходном базисе, $\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)}$ — в преобразованном базисе, $\tilde\theta_{\varphi_\Gamma(x)}$ — в адаптированном базисе, а D_{diag} — блочно-диагональная часть дифференциала, состоящая из блоков размеров $(n_i+\tilde n_i)\times n_i$, $i=1,\dots,\min\{M,\widetilde M\}$ (полученная при перегруппировке полей на $\mathbb U$ по степеням).

Предположение 2.17. *Будем считать, что в следующей теореме $N\le\widetilde N$, так как этот случай представляет интерес для исследования метрических свойств поверхностей-образов.*

Теорема 2.18 [2, 3]. *Пусть выполнены условия теоремы 2.16. Если для точки $x\in\Omega$ существует невырожденное преобразование η_x базиса в образе, приводящее матрицу $D(\widehat D_P\varphi(x))(x)$ к блочно-верхнетреугольному виду, где «диагональные» блоки имеют размеры $\tilde n_i\times n_i$, $i=1,\dots,\min\{M,\widetilde M\}$, то адаптированный в точке x базис существует и состоит из полей*

$$\widetilde X_l\mapsto {}^x\widetilde X_l=(D\chi_x(v)\circ\eta_x)\langle\widetilde X_l(v)\rangle,$$

$l=1,\dots,\widetilde N$. Здесь $\chi_x=\widehat D_P\varphi(x)\circ(D(\widehat D_P\varphi(x)))^{-1}$, если ранг $D(\widehat D_P\varphi(x))$ равен $\widetilde N$ и $N=\widetilde N$. Если ранг $D(\widehat D_P\varphi(x))$ максимален, но меньше $\widetilde N$, то χ_x — продолжение отображения $\widehat D_P\varphi(x)\circ(D(\widehat D_P\varphi(x)))^{-1}$, построенное с помощью сдвигов (см. подробности в [2, теорема 4.3]) вдоль дополнения образа дифференциала $D(\widehat D_P\varphi(x))$. В этом случае множество $\big(\tilde\theta_{\varphi(x)}\circ\theta^{-1}_{\varphi(x)}\big)(D_\Delta(\widehat D_P\varphi(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle)$ совпадает с $\widehat D_P\varphi(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle$, где матрица $D_\Delta(\widehat D_P\varphi(x))(x)$ равна матрице $D(\widehat D_P\varphi(x))(x)$ при преобразовании η_x базиса, а $\tilde\theta_{\varphi(x)}$ — отображение нормальных координат в преобразованном базисе.

Если ранг $D(\widehat D_P\varphi(x))$ не максимален, то аналогичный результат справедлив для ограничений φ на поверхности меньшей размерности, на которых матрица $D(\widehat D_P\varphi(x))(x)$ имеет максимальный ранг.

В теоремах 2.15 и 2.16 базис $\{{}^xX_1,\dots,{}^xX_N,{}^x\widetilde X_1,\dots,{}^x\widetilde X_{\widetilde N}\}$, а в теореме 2.18 базис $\{{}^x\widetilde X_1,\dots,{}^x\widetilde X_{\widetilde N}\}$ адаптированный. Так как он зависит от фиксированной точки x, будем говорить, что он *адаптированный в точке* x, или *внутренний относительно точки* x. Кроме того, этот базис позволяет аппроксимировать полиномиальный hc-дифференциал его блочно-«диагональной» линейной частью, не искажая ее.

Будем полагать $\deg{}^xX_i=\deg Y_i=\deg X_i$ и $\deg{}^x\widetilde X_j=\deg\widetilde X_j$, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,\widetilde N$.

Соглашение 2.19. *В определениях 2.21, 2.22 и 2.24, а также замечании 2.23, лемме 2.27 и теореме 2.28 полагаем $\widehat N=N+\widetilde N$, $\widehat M=\max\{M,\widetilde M\}$ и $\widehat\varphi=\varphi_\Gamma$ для условий теорем 2.15 и 2.16 и $\widehat N=\widetilde N$, $\widehat M=\widetilde M$ и $\widehat\varphi=\varphi$ для условий теоремы 2.18. Кроме того, $\mathbb U=\widetilde{\mathbb G}$ для условий теоремы 2.18, а также*

$$({}^xY_1,\dots,{}^xY_{\widehat N})=({}^xX_1,\dots,{}^xX_N,{}^x\widetilde X_1,\dots,{}^x\widetilde X_{\widetilde N})$$

для условий теорем 2.15 или 2.16 и

$$({}^xY_1,\dots,{}^xY_{\widehat N})=({}^x\widetilde X_1,\dots,{}^x\widetilde X_{\widetilde N})$$

для условий теоремы 2.18.

Замечание 2.20. Существуют два способа нумерации адаптированных базисных полей для отображений-графиков: один получается соединением двух наборов базисных полей $({}^x X_1, \dots, {}^x X_N, {}^x \widetilde{X}_1, \dots, {}^x \widetilde{X}_{\widetilde{N}})$, а другой — перегруппировкой полей из двух наборов с одинаковыми степенями. Однако это не влияет на подсчет определителя субриманова дифференциала, так как при вычислении произведения $\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma)^* D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma))$ в обоих случаях получаем сумму единичной матрицы и матрицы $\widehat{D}\varphi^*\widehat{D}\varphi$ (для графиков липшицевых отображений) или $D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi)^* D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi)$ (для случая гёльдеровых отображений).

Определение 2.21. Пусть $w = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widehat{N}} w_i {}^x Y_i\Big)(v)$, $w, v \in \mathbb{U}$. Определим величину ${}^x d_\infty(w, v)$ следующим образом:

$$
{}^x d_\infty(w, v) = \max_{i=1,\dots,\widehat{N}} \{|w_i|^{\frac{1}{\deg {}^x Y_i}}\}.
$$

Множество $\{w \in \mathbb{U} : {}^x d_\infty(w, v) < r\}$ называется *шаром относительно* ${}^x d_\infty$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом ${}^x\operatorname{Box}(v, r)$.

Адаптированный вариант метрики, эквивалентной римановой, ${}^x\rho$ вводится аналогично:

$$
{}^x\rho(w, v) = \max_{i=1,\dots,\widehat{N}} \{|w_i|\}.
$$

Определение 2.22 (ср. [8]). Пусть $w = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widehat{N}} w_i {}^x Y_i\Big)(v)$, $w, v \in \mathbb{U}$. Определим величину ${}^x d_2(w, v)$ следующим образом:

$$
{}^x d_2(w, v) = \max\Big\{\Big(\sum_{j:\deg {}^x Y_j = 1} |w_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \Big(\sum_{j:\deg {}^x Y_j = 2} |w_j|^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot 2}}, \dots, \Big(\sum_{j:\deg {}^x Y_j = \widehat{M}} |w_j|^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot\widehat{M}}}\Big\}.
$$

Множество $\{w \in \mathbb{U} : {}^x d_2(w, v) < r\}$ называется *шаром относительно* ${}^x d_2$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается через ${}^x\operatorname{Box}_2(v, r)$.

Замечание 2.23. Прообраз ${}^x d_2$-шара ${}^x\operatorname{Box}_2(v, r)$ при отображении $\tilde{\theta}_v$, $v \in \mathbb{U}$, равен

$$
\operatorname{Box}_2(0, r) = B_2^{\dim \operatorname{span}\{{}^x Y_j : \deg {}^x Y_j = 1\}}(0, r) \times B_2^{\dim \operatorname{span}\{{}^x Y_j : \deg {}^x Y_j = 2\}}(0, r^2) \times \dots \times B_2^{\dim \operatorname{span}\{{}^x Y_j : \deg {}^x Y_j = \widehat{M}\}}(0, r^{\widehat{M}}),
$$

где B_2^l — евклидов шар размерности l.

Определение 2.24 (ср. [8, 12]). Пусть $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$, $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{M} V_j$ — алгебра Ли группы $\mathbb{G}$ и $S = \widehat{\varphi}(\Omega)$. Кроме того, если выполнены условия теоремы 2.18, то ранг $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ максимален и φ взаимно однозначно. Значение *адаптированной*, или *внутренней*, *меры* $\mathscr{H}_\Gamma^\nu$ для подмножеств $A \subset S$ вычисляется по формуле

$$
\mathscr{H}_\Gamma^\nu(A) = \prod_{j=1}^{M} \omega_{\dim V_j} \cdot \lim_{\delta \to 0} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {}^{\widehat{\varphi}^{-1}(x_i)}\operatorname{Box}_2(x_i, r_i) \supset A,\ x_i \in A,\ r_i < \delta\Big\},
$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Замечание 2.25. Так как в условиях теоремы 2.18 топологическая размерность образа не будет превосходить N и, кроме того, интерес для исследования представляют поверхности хаусдорфовой размерности ν, будем считать, что $n_i \leq \tilde{n}_i$, $i = 1, \dots, M$, и φ взаимно однозначно. Тогда в случае, когда ранг матрицы $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ максимален, в ней содержится N линейно независимых строк, действия с которыми приводят матрицу к блочно-верхнетреугольному виду, где «диагональные» блоки имеют размеры $\tilde{n}_i \times n_i$. Действительно, сначала к требуемому виду приводится блок из $N \leq \widetilde{N}$ строк, а затем — оставшиеся строки. Эти преобразования соответствуют линейным преобразованиям η_x в базисе $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$. Кроме того, эти N строк будут линейно независимыми и в окрестности точки x рассмотрения полиномиального hc-дифференциала, и в окрестности точки дифференцирования отображения $y \mapsto \widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle$. В силу предположений на отображение φ такие преобразования (η_x и соответствующее ему преобразование строк) можно без ограничения общности считать непрерывными по $x \in \Omega$.

Предположение 2.26. *В теореме* 2.28 *будем считать, что при выполнении условий теоремы* 2.18 *отображение φ биективно на свой образ, преобразование строк матрицы дифференциала, описанное в замечании* 2.25, *существует на всей области определения Ω и непрерывно зависит от $x \in \Omega$, а ранг матрицы $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ максимален всюду. Таким образом, η_x существует всюду на образе $\varphi(\Omega)$.*

Лемма 2.27. *Функция множества $\Phi : S \to \mathbb{R}$, где $S = \widehat{\varphi}(\Omega)$, заданная, как*

$$\Phi : A \mapsto \mathscr{H}^{\nu}_{\Gamma}(A), \quad \text{где } A \subset S,$$

обладает следующими свойствами:

1) *она абсолютно непрерывна относительно $\mathscr{H}^{\nu}$ на $\mathbb{G}$;*

2) *она (локально) аддитивна на удаленных шарах.*

Доказательство. Пусть выполнены условия определения 2.24. Иными словами, либо справедливы условия теорем 2.15 или 2.16, либо выполнены условия теоремы 2.18 и, кроме того, ранг $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ максимален, а φ взаимно однозначно (см. также замечание 2.25 и предположение 2.26).

Докажем утверждение 1. Без ограничения общности можно рассматривать $\mathscr{U} \Subset \Omega$. Пусть $\Sigma \subset \mathscr{U}$ — множество меры нуль. Тогда по определению множества меры нуль существует покрытие его шарами $\{\mathrm{Box}(x_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, сумма мер которых меньше произвольно заданного малого $\varepsilon > 0$. В силу свойств адаптированного базиса, установленных в теоремах 2.15, 2.16 и 2.18, образы $\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x_i)\langle \mathrm{Box}(x_i, r_i)\rangle$ лежат в субримановых шарах, имеющих радиус Kr_i, $K < \infty$, в базисе $\{{}^{x_i}Y_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$, $i \in \mathbb{N}$. (Заметим, что для условий теоремы 2.18 это свойство следует из определения отображения χ_{x_i}, которое параметризует образ $\widehat{D}_P\varphi(x_i)\langle \mathrm{Box}(x_i, r_i)\rangle$ множеством $D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x_i))(x_i)\langle \mathrm{Box}(x_i, r_i)\rangle$ в базисе $\{\eta_{x_i}\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$, $i \in \mathbb{N}$.) Аналогичное утверждение справедливо и для $\widehat{\varphi}(\mathrm{Box}(x_i, r_i))$, $i \in \mathbb{N}$, так как в базисе $\{{}^{x_i}Y_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$ координаты образа любой точки из $\mathrm{Box}(x_i, r_i)$ при φ_Γ отличаются от соответствующих координат при отображении $\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x_i)$ на величину, сравнимую с $o\big(r_i^{\widehat{M}}\big)$, $i \in \mathbb{N}$, где $o(1)$ равномерна на $\mathscr{U}$ (см. [2, следствие 4.5]). Следовательно, $\mathscr{H}_\Gamma^\nu$-мера образа множества меры нуль не превосходит $\widehat{K}\varepsilon$, $\widehat{K} = \widehat{K}(K, \widehat{N}, \widehat{\varphi}) < \infty$, откуда в силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$ следует абсолютная непрерывность функции Φ.

Утверждение 2 доказывается следующими аргументами:

1) рассматриваются два шара B_1 и B_2 и их пересечения с S, где $B_1, B_2 \subset \mathbb{U}$ и $(B_1 \cap S) \cap (B_2 \cap S) = \varnothing$;

2) так как преобразования базисов (от исходных к адаптированным и обратные к ним) невырожденны, то как риманово, так и субриманово расстояния между $B_1 \cap S$ и $B_2 \cap S$ строго отделены от нуля в любом из адаптированных базисов; кроме того, для адаптированных расстояний верны оценки

$$^{\widehat{\varphi}^{-1}(x_i)}d_2 \leq C \cdot {}^{\widehat{\varphi}^{-1}(x_j)}\rho^{1/\widehat{M}},$$

где $C = C(\mathscr{U}) < \infty$, $\mathscr{U} \supset \widehat{\varphi}^{-1}(B_1 \cup B_2)$, для всех $i, j \in \mathbb{N}$;

3) таким образом, существует такое $\delta > 0$, что покрытия множеств $B_1 \cap S$ и $B_2 \cap S$ шарами $^{\widehat{\varphi}^{-1}(x_i)}\operatorname{Box}_2(x_i, r_i)$, $r_i < \delta$, $i \in \mathbb{N}$, пересекаться не будут.

Отсюда следует (локальная) аддитивность на отдаленных шарах.

Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.28. *Пусть выполнены условия одной из теорем* 2.15, 2.16 *или* 2.18. *Тогда для отображений-графиков справедлива формула площади*

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{J}(\varphi_\Gamma, x)\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\mathscr{H}_\Gamma^\nu(y), \tag{2.7}$$

где

$$\mathscr{J}(\varphi_\Gamma, x) = \prod_{j=1}^{M} \sqrt{\det\big(E_{n_j} + (\widehat{D}\varphi)^*_{\widetilde{V}_j, V_j}(x)(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_j, V_j}(x)\big)} \tag{2.8}$$

(см. (2.5)) *в условиях теоремы* 2.15 *и*

$$\mathscr{J}(\varphi_\Gamma, x) = \prod_{j=1}^{M} \sqrt{\det\big(E_{n_j} + D((\widehat{D}_P\varphi)(x))(x)^*_{V_j, \widetilde{V}_j} D((\widehat{D}_P\varphi)(x))(x)_{V_j, \widetilde{V}_j}\big)} \tag{2.9}$$

(*см. свойство* 2.12) *в условиях теоремы* 2.16. *Если выполнены условия теоремы* 2.18, *то верна формула площади*

$$\int\limits_{\Omega} \sqrt{\det\big(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))^*(x) D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)\big)}\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \int\limits_{\varphi(\Omega)} d\mathscr{H}_\Gamma^\nu(y), \tag{2.10}$$

где $D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ *состоит из «диагональных» блоков* $D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ *размерностей* $\tilde{n}_i \times n_i$, $i = 1, \dots, \min\{M, \widetilde{M}\}$.

Доказательство. Так как из леммы 2.27 следует, что определенная в ней функция Φ восстанавливается по своей производной [16, 17], то основная идея заключается в доказательстве того, что производная функции множества Φ равна (2.8) или (2.9) в условиях теорем 2.15 и 2.16 или

$$\sqrt{\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))^*(x) D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}$$

в условиях теоремы 2.18 (см. (2.10)). В последнем случае, так как по предположению 2.26 ранг матрицы $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ максимален, схема доказательства формулы площади принципиально не отличается от первых двух, поэтому доказательство будем проводить в общем виде. Схема состоит из двух основных этапов: на первом этапе считаем $\mathscr{H}^N$-меру пересечения образа полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x)\langle\mathscr{U}\rangle$, $x\in\mathscr{U}$, $\mathscr{U}\Subset\Omega$, и субриманова шара ${}^x\operatorname{Box}_2(y,r)$ с центром в $y=\widehat{\varphi}(x)$ (см. обозначение в определении 2.22), а на втором — находим искажение $\mathscr{H}^\nu_\Gamma$-меры при отображении $\widehat{\varphi}$, используя непосредственное определение внутренней меры Хаусдорфа (см. определение 2.24); ср. [8].

Напомним, что здесь и далее используются обозначения, принятые в соглашении 2.19. Кроме того, будем полагать, что в случае, когда выполнены условия теоремы 2.18, ранг матрицы $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ на рассматриваемых окрестностях максимален и отображение φ биективно на свой образ.

Шаг 1. Пусть $x\in\Omega$. Рассмотрим окрестность $\mathscr{U}\Subset\Omega$, $\mathscr{U}\ni x$, ее образ $\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x)\langle\mathscr{U}\rangle$ при полиномиальном субримановом дифференциале $\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x)$ и пересечение с шаром ${}^x\operatorname{Box}_2(y,r)$, $y=\widehat{\varphi}(x)$. Согласно предположению 2.26 на $\mathscr{U}$ выполнено условие непрерывности преобразования базиса в образе, описанное в замечании 2.25 (для случая теоремы 2.18). Обозначим $\mathscr{H}^N$-меру в базисе $\{{}^x\widehat{Y}_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$ символом ${}^x\mathscr{H}^N$. Для подсчета ${}^x\mathscr{H}^N$-меры множества $\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x)\langle\mathscr{U}\rangle\cap{}^x\operatorname{Box}_2(y,r)$ перейдем в нормальные координаты $\tilde{\theta}_y^{-1}$ относительно y в базисе $\{{}^x\widehat{Y}_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$. Согласно теоремам 2.15 и 2.16

$$\tilde{\theta}_y^{-1}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle\mathscr{U}\rangle)=\theta_y^{-1}(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathscr{U}\rangle),$$

и в силу теоремы 2.18

$$\tilde{\theta}_y^{-1}(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle\mathscr{U}\rangle)=\theta_y^{-1}(D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)\langle\mathscr{U}\rangle).$$

С учетом замечания 2.23 получаем, что вопрос подсчета ${}^x\mathscr{H}^N$-меры свелся к вычислению меры пересечения декартова произведения шаров и плоскости, проходящей через 0 — общий центр шаров. Из свойства 2.9 и матрицы (2.5) следует, что (см. также [18])

$$\mathscr{H}^N\big(\theta_y^{-1}(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathscr{U}\rangle)\cap\operatorname{Box}_2(0,r)\big)=\prod_{j=1}^{M}\omega_{\dim V_j}r^\nu. \tag{2.11}$$

Кроме того, из [18, теорема 2, шаги 4, 5] вытекает, что

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^N\big(\theta_y^{-1}(D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)\langle\mathscr{U}\rangle)\cap\operatorname{Box}_2(0,r)\big)\\&=\frac{\sqrt{\det(D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))^*(x)D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}}{\sqrt{\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))^*(x)D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}}\prod_{j=1}^{M}\omega_{\dim V_j}r^\nu(1+o(1)),\end{aligned} \tag{2.12}$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по $x\in\mathscr{U}$.

Таким образом, ${}^x\mathscr{H}^N(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x)\langle\mathscr{U}\rangle\cap{}^x\operatorname{Box}_2(\widehat{\varphi}(x),r))=r^\nu\cdot G(x)$, где значение $G(x)$ — это

$$\begin{cases}\displaystyle\prod_{j=1}^{M}\omega_{\dim V_j}\cdot|{}^x\tilde{g}(\widehat{\varphi}(x))|\cdot(1+o(1)), & \text{если } \widehat{\varphi}=\varphi_\Gamma,\\ \displaystyle\prod_{j=1}^{M}\omega_{\dim V_j}\cdot|{}^x\tilde{g}(\widehat{\varphi}(x))|\cdot C(x)\cdot(1+o(1)), & \text{если } \widehat{\varphi}=\varphi,\end{cases}$$

символом ${}^x\tilde g$ обозначен риманов тензор в базисе $\{{}^x\widehat Y_j\}_{j=1}^{\widehat N}$,

$$C(x)=\frac{\sqrt{\det(D_\Delta(\widehat D_P\varphi(x))^*(x)D_\Delta(\widehat D_P\varphi(x))(x))}}{\sqrt{\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat D_P\varphi(x))^*(x)D_{\mathrm{diag}}(\widehat D_P\varphi(x))(x))}}$$

и $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $x\in\mathscr U$.

Шаг 2. Для фиксированного $x\in\mathscr U$ и достаточно малого $r>0$ рассмотрим образ $\widehat\varphi(\mathrm{Box}_2(x,r))$ ($r>0$ таково, что $\mathrm{Box}_2(x,r)\subset\mathscr U$) и его покрытие набором шаров $\{{}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)\}$, $y_i=\widehat\varphi(x_i)$, $x_i\in\mathrm{Box}_2(x,r)$, $i\in\mathbb N$. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb N}r_i^\nu&=\sum_{i\in\mathbb N}\frac{{}^{x_i}\mathscr H^N(\widehat D_P\widehat\varphi(x_i)\langle\mathscr U\rangle\cap{}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i))}{G(x_i)}\\&=\sum_{i\in\mathbb N}\mathscr J(\widehat D_P\widehat\varphi(x_i),x_i)\frac{\mathscr H^N(\widehat D_P\widehat\varphi(x_i)^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))}{G(x_i)}(1+o(1))\\&=\mathscr J(\widehat D_P\widehat\varphi(x),x)\sum_{i\in\mathbb N}\frac{\mathscr H^N(\widehat D_P\widehat\varphi(x_i)^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))}{G(x_i)}(1+o(1)),\end{aligned}$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr U$. Так как полиномиальный субриманов дифференциал невырожден и на прообразе каждого из шаров покрытия аппроксимирует $\widehat\varphi$ с точностью до $o(r_i^{\widehat M})$ относительно римановой метрики ($o(1)$ равномерно на $\mathscr U$), из стандартных рассуждений имеем

$$\mathscr H^N(\widehat D_P\widehat\varphi(x_i)^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i(1-o(1)))))=\mathscr H^N(\widehat\varphi^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))(1+o(1)),$$

иными словами,

$$\mathscr H^N(\widehat D_P\widehat\varphi(x_i)^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))=\mathscr H^N(\widehat\varphi^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))(1+o(1)),$$

$i\in\mathbb N$, где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr U$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^M\omega_{\dim V_j}\sum_{i\in\mathbb N}r_i^\nu&=\mathscr J(\widehat D_P\widehat\varphi(x),x)\sum_{i\in\mathbb N}\frac{\mathscr H^N(\widehat\varphi^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))}{|{}^{x_i}\tilde g(\widehat\varphi(x_i))|}(1+o(1))\\&=\frac{\mathscr J(\widehat D_P\widehat\varphi(x),x)}{|{}^x\tilde g(\widehat\varphi(x))|}\sum_{i\in\mathbb N}\mathscr H^N(\widehat\varphi^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))(1+o(1))\end{aligned}$$

для $\widehat\varphi=\varphi_\Gamma$ и

$$\prod_{j=1}^M\omega_{\dim V_j}\sum_{i\in\mathbb N}r_i^\nu=\frac{\mathscr J(\widehat D_P\widehat\varphi(x),x)}{|{}^x\tilde g(\widehat\varphi(x))|C(x)}\sum_{i\in\mathbb N}\mathscr H^N\big(\widehat\varphi^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i))\big)(1+o(1))$$

для $\widehat\varphi=\varphi$. Здесь $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr U$.

Покажем, что множества вида $\widehat\varphi^{-1}({}^s\mathrm{Box}_2(\widehat\varphi(s),\tau))$, $s\in\mathscr U$, удовлетворяют условию удвоения для достаточно малых $\tau>0$. Так как полиномиальный субриманов дифференциал невырожденный и на прообразе каждого из шаров покрытия аппроксимирует $\widehat\varphi$ с точностью до $o(\tau^{\widehat M})$ относительно римановой метрики, без ограничения общности можно рассматривать множества вида $\widehat D_P\widehat\varphi(s)^{-1}({}^s\mathrm{Box}_2(\widehat\varphi(s),\tau))$, $s\in\mathscr U$. Для них условие удвоения следует из параметризации множествами вида $\tilde{\theta}^{-1}_{\widehat{\varphi}(s)}(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(s)\langle\mathscr{U}\rangle)\cap \mathrm{Box}_2(0,\tau)$ посредством биективных на свой образ отображений $\tilde{\theta}^{-1}_{\widehat{\varphi}(s)}\circ\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(s)$ при достаточно малых $\tau>0$ и $s\in\mathscr{U}$ (см. теоремы 2.15, 2.16 и 2.18), соотношений (2.11) и (2.12) и непрерывности полиномиальных субримановых дифференциалов. Далее доказательство с очевидными изменениями повторяет схему, приведенную в [8, теорема 3.13], из которой следует, что точная нижняя грань значений $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^N(\widehat{\varphi}^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(y_i,r_i)))$ — это $\mathscr{H}^N(\mathrm{Box}_2(x,r))\cdot(1+o(1))$, где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$. Таким образом,

$$\mathscr{H}^\nu_\Gamma(\widehat{\varphi}(\mathrm{Box}_2(x,r)))=\frac{\mathscr{J}(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x),x)}{|{}^x\tilde{g}(\widehat{\varphi}(x))|}\cdot\mathscr{H}^N(\mathrm{Box}_2(x,r))\cdot(1+o(1))$$

для $\widehat{\varphi}=\varphi_\Gamma$ и

$$\mathscr{H}^\nu_\Gamma\big(\widehat{\varphi}(\mathrm{Box}_2(x,r))\big)=\frac{\mathscr{J}(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x),x)}{|{}^x\tilde{g}(\widehat{\varphi}(x))|C(x)}\cdot\mathscr{H}^N(\mathrm{Box}_2(x,r))\cdot(1+o(1))$$

для $\widehat{\varphi}=\varphi$. Здесь $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$.

Пусть $\widehat{\varphi}=\varphi_\Gamma$. Так как формулы площади применялись для адаптированного базиса $\{{}^xY_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$, с учетом результатов теорем 2.15 и 2.16 выводим

$$\mathscr{J}(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x),x)=\sqrt{\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))^*(x)D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x))}\,\frac{|{}^x\tilde{g}(\varphi_\Gamma(x))|}{|g(x)|}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^\nu_\Gamma(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}_2(x,r)))\\&=\sqrt{\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))^*(x)D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x))}\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(x,r))\cdot(1+o(1)),\end{aligned}$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$. Если $\widehat{\varphi}=\varphi$, то получаем (см. теорему 2.18), что

$$\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi(x),x)=\sqrt{\det(D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))^*(x)D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}\,\frac{|{}^x\tilde{g}(\varphi(x))|}{|g(x)|},$$

поэтому

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^\nu_\Gamma(\varphi(\mathrm{Box}_2(x,r)))\\&=\sqrt{\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))^*(x)D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(x,r))\cdot(1+o(1)),\end{aligned}$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$. Окончательно

$$\Phi'(x)=\sqrt{\det(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x))^*(x)D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x))(x))}.$$

Вид якобианов (2.8) и (2.9) следует из вида матрицы $D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\widehat{\varphi}(x))$ и непосредственных вычислений (см. замечание 2.20 и (2.5)). Таким образом, формулы (2.7) и (2.10) верны, и теорема доказана. □

Следствие 2.29. *Пусть алгебра Ли* $\widetilde{V}$ *группы* $\widetilde{\mathbb{G}}$ *такова, что* $\dim \widetilde{V}_1 = \tilde{n}$, *а* $\dim \widetilde{V}_{j+1} - \dim \widetilde{V}_j = 1$, $j = 1, \ldots, \widetilde{M} - 1$. *Тогда*

$$\mathscr{J}(\varphi_\Gamma, x) = \sqrt{\det(E_n + (\widehat{D}\varphi)^*_{\widetilde{V}_1, V_1}(x)(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_1, V_1}(x))} \times \prod_{j=1}^{\widetilde{M}-1} \sqrt{1 + \langle (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{n}+j}(x), (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{n}+j}(x)\rangle},$$

где $n = \dim V_1$ (*в прообразе*) *в условиях теоремы* 2.15 *и*

$$\mathscr{J}(\varphi_\Gamma, x) = \sqrt{\det(E_n + D((\widehat{D}_P\varphi)(x))(x)^*_{\widetilde{V}_1, V_1} D((\widehat{D}_P\varphi)(x))(x)_{\widetilde{V}_1, V_1})} \times \prod_{j=1}^{\widetilde{M}-1} \sqrt{1 + \langle D((\widehat{D}_P\varphi)(x))(x)_{\tilde{n}+j}, D((\widehat{D}_P\varphi)(x))(x)_{\tilde{n}+j}\rangle},$$

где $n = \dim V_1$ (*в прообразе*), *в условиях теоремы* 2.16. *Здесь индекс* $\tilde{n}+j$ *обозначает номер строки в матрице* (*полиномиального*) *субриманова дифференциала,* $j = 1, \ldots, \widetilde{M} - 1$.

Доказательство. Формулы вытекают из видов $D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$, где во всех диагональных блоках, кроме первого, только одна строка будет относиться к дифференцированию отображения φ. Иными словами, в матрице вида (2.5) все блоки $(\widehat{D}\varphi)_{V_j, \widetilde{V}_j}(x)$ (или $D((\widehat{D}_P\varphi)(x))_{V_j, \widetilde{V}_j}(x)$), кроме первого, будут строками размерности $\dim V_j$, $j = 1, \ldots, \min\{M, \widetilde{M}\}$. $\square$

3. Пример вычисления меры поверхностей без использования адаптированного базиса

В теореме 2.28 для отображений, описанных в условиях теоремы 2.18, формула площади зависит от преобразования η_x в образе. В этом разделе в качестве примера докажем формулы площади нового типа, часть из которых не зависят от преобразований в базисе, для модельного случая. Кроме того, не будем использовать адаптированные (в смысле определения 2.14) базисы: площадь поверхностей будет вычислена в исходном базисе в образе или близком к нему. Рассмотрим случай отображения $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ двуступенчатых нильпотентных градуированных групп, дифференциал которого имеет максимальный ранг.

Предположение 3.1. *Пусть* $\mathbb{G}$ *и* $\widetilde{\mathbb{G}}$ — *двуступенчатые нильпотентные градуированные группы,* $\Omega \subset \mathbb{G}$ — *открытое множество, а* $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — *отображение класса* C^1. *Кроме того, предположим, что*

(1) *зависимость от координат* $(y_2, \ldots, y_N)$ (*относительно* $\mathbf{0}$) *у всех координатных функций* φ_j (*относительно* $\widetilde{\mathbf{0}}$), $j = 2, \ldots, \dim \widetilde{V}_1$, $\dim \widetilde{V}_1 + 2, \ldots, \widetilde{N}$, *линейная, а от* y_1 *они не зависят;*

(2) $\varphi_1 = y_1$;

(3) *зависимость от координат* $(y_2, \ldots, y_N)$ (*относительно* $\mathbf{0}$) *у* $\varphi_{\dim \widetilde{V}_1+1}$ *линейная, а по переменной* y_1 *функция* $\varphi_{\dim \widetilde{V}_1+1}$ *принадлежит классу* C^2;

(4) *для структурных констант на* $\mathbb{G}$ *верны соотношения* $F^i_{\alpha,\beta} = 0$ *для всех* $i = \dim V_1 + 1, \ldots, N$ *и мультииндексов* $\alpha, \beta \neq 0$, *а для структурных констант на* $\widetilde{\mathbb{G}}$ *верны соотношения* $G^j_{1,l} = 0$ *для всех* $j > \dim \widetilde{V}_1 + 1$ *и* $l = 1, \ldots, \dim V_1$;

(5) *ранг* $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ *равен* N *всюду,* $N \le \widetilde{N}$ *(об аппроксимации полиномиальным субримановым дифференциалом* $\widehat{D}_P\varphi(x)$ *относительно субримановой квазиметрики см. ниже);*

(6) *в образе квазиметрика* d_2 *такова, что в нормальных координатах относительно точки* x *соответствующие* d_2*-шары* $\mathrm{Box}_2(x,r)$ *равны декартову произведению*

$$(-r,r)_1 \times B_2^{\dim \widetilde{V}_1 - 1}(0,r) \times (-r^2,r^2)_{\dim \widetilde{V}_1+1} \times B_2^{\dim \widetilde{V}_2 - 1}(0,r^2), \tag{3.1}$$

где B_2^l *—* l*-мерные евклидовы шары.*

Прежде чем формулировать теорему и выводить формулу площади, опишем вид полиномиального субриманова дифференциала такого отображения.

Пусть $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} x_iX_i\Bigr)(\mathbf{0})$ и $y = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} y_iX_i\Bigr)(\mathbf{0})$. Сначала выведем вид классического дифференциала отображения φ в точке x. По предположению 3.1 (пп. (1)–(3)) имеем

$$\varphi(x) = \exp\Biggl(x_1\widetilde{X}_1 + \sum_{j=2}^{\widetilde{N}}\sum_{k=2}^{N} a_{jk}x_k\widetilde{X}_j + \psi(x_1)\widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1+1}\Biggr)(\widetilde{\mathbf{0}})$$

и

$$\varphi(y) = \exp\Biggl(y_1\widetilde{X}_1 + \sum_{j=2}^{\widetilde{N}}\sum_{k=2}^{N} a_{jk}y_k\widetilde{X}_j + \psi(y_1)\widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1+1}\Biggr)(\widetilde{\mathbf{0}}),$$

где $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Следовательно, $\varphi(y) = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}} z_j\widetilde{X}_j\Bigr)(\varphi(x))$, где $z_1 = y_1 - x_1$ и $z_j = \sum\limits_{k=2}^{N} a_{jk}(y_k - x_k)$ для $\deg \widetilde{X}_j = 1$. Если $\deg \widetilde{X}_j = 2$ и $j > \dim \widetilde{V}_1 + 1$, то (см. п. (4) предположения 3.1) имеем

$$\begin{aligned}
z_j &= \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(y_k - x_k) + \sum_{\substack{|e_m+e_l|_h=2,\\ m<l}} G^j_{m,l}(\varphi_l(x)\cdot\varphi_m(y) - \varphi_l(y)\cdot\varphi_m(x)) \\
&= \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(y_k - x_k) + \sum_{\substack{|e_m+e_l|_h=2,\\ m<l}} G^j_{m,l}(\varphi_l(x)\varphi_m(y-x) - \varphi_m(x)\varphi_l(y-x)) \\
&= \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(y_k - x_k) + \sum_{\substack{|e_m+e_l|_h=2,\\ 1<m<l}} G^j_{m,l}\Biggl(\varphi_l(x)\sum_{q=2}^{N} a_{mq}(y_q - x_q) - \varphi_m(x)\sum_{q=2}^{N} a_{lq}(y_q - x_q)\Biggr) \\
&+ \sum_{l:\deg X_l=1} G^j_{1,l}\varphi_l(x)(y_1 - x_1) - x_1\sum_{l:\deg X_l=1} G^j_{1,l}\sum_{q=2}^{N} a_{lq}(y_q - x_q) = \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(y_k - x_k) \\
&+ \sum_{\substack{|e_m+e_l|_h=2,\\ 1<m<l}} G^j_{m,l}\Biggl(\varphi_l(x)\sum_{q=2}^{N} a_{mq}(y_q - x_q) - \varphi_m(x)\sum_{q=2}^{N} a_{lq}(y_q - x_q)\Biggr),
\end{aligned}$$

так как

$$\sum_{l:\deg X_l=1} G^j_{1,l}\varphi_l(x)(y_1-x_1) - x_1 \sum_{l:\deg X_l=1} G^j_{1,l}\sum_{q=2}^N a_{lq}(y_q-x_q)=0.$$

Если же $j=\dim\widetilde{V}_1+1$, то верно

$$\begin{aligned}z_j=\psi(y_1)-\psi(x_1)&+\sum_{l:\deg X_l=1} G^j_{1,l}\varphi_l(x)(y_1-x_1)\\ &+\sum_{\substack{|e_m+e_l|_h=2,\\ 1<m<l}} G^j_{m,l}\biggl(\varphi_l(x)\sum_{q=2}^N a_{mq}(y_q-x_q)-\varphi_m(x)\sum_{q=2}^N a_{lq}(y_q-x_q)\biggr)\\ &\qquad+\sum_{k=2}^N a_{jk}(y_k-x_k)-x_1\sum_{l:\deg X_l=1} G^j_{1,l}\sum_{q=2}^N a_{lq}(y_q-x_q).\end{aligned}$$

Напомним [2], что в рассматриваемых случаях $\widetilde{M}=2$, поэтому в силу предположения 3.1 имеем $(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_i=D\varphi_i(x)\langle y\rangle$ для $\deg\widetilde{X}_i=1$ и

$$\begin{aligned}(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j&=D\varphi_j(x)\langle y\rangle+D_{2,1}\varphi_j(x)\langle y\rangle\\ &+\sum_{\substack{|e_k+e_l|_h=2,\\ k<l}} G^j_{k,l}(\varphi_l(x)(D\varphi_k(x)\langle y\rangle+D_{2,1}\varphi_k(x)\langle y\rangle)\\ &\qquad-\varphi_k(x)(D\varphi_l(x)\langle y\rangle+D_{2,1}\varphi_l(x)\langle y\rangle))\end{aligned}\tag{3.2}$$

для $\deg\widetilde{X}_j=2$. Здесь $D_{2,1}\varphi_i(x)\langle y\rangle$ — часть ряда Тейлора, аппроксимирующая

$$\begin{aligned}\varphi_i\biggl(\exp\biggl(\sum_{k=1}^{\dim V_1} y_kX_k\biggr)(x)\biggr)-\varphi_i(x)-D\varphi_i(x)\biggl\langle\sum_{k=1}^{\dim V_1} y_kX_k\biggr\rangle\\ =[\varphi_i\circ\theta_x](y_1,\dots,y_{\dim V_1},0,\dots,0)-[\varphi_i\circ\theta_x](0)\\ -D[\varphi_i\circ\theta_x](0)\langle y_1,\dots,y_{\dim V_1},0,\dots,0\rangle\end{aligned}$$

с точностью до $o(|y_1,\dots,y_{\dim V_1}|^2)$. Из условий (1), (2) предположения 3.1 следует, что

$$\begin{aligned}(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j&=D\varphi_j(x)\langle y\rangle\\ &+\sum_{\substack{|e_k+e_l|_h=2,\\ 1<k<l}} G^j_{k,l}(\varphi_l(x)\cdot D\varphi_k(x)\langle y\rangle-\varphi_k(x)\cdot D\varphi_l(x)\langle y\rangle)\end{aligned}$$

для $j=\dim\widetilde{V}_1+2,\dots,\widetilde{N}$, а для $j=\dim\widetilde{V}_1+1$ в силу этого же предположения (пп. (1)–(4)) в отдельных точках x с координатами $(x_1,\dots,x_N)$ при соответствующих значениях функций φ_l, φ_m, $l,m=2,\dots,\dim\widetilde{V}_1$, соотношение (3.2) может выполняться в виде

$$(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j=d(x)\cdot y_1^2.\tag{3.3}$$

Действительно, так как $D_{2,1}\varphi_{\dim\widetilde{V}_1+1}(x)\langle y\rangle=d(x)\cdot y_1^2$, а координатные функции при горизонтальных полях линейны, в силу пп. (1)–(4) предположения 3.1 для этого достаточно выполнения условия

$$
\begin{aligned}
D\psi(x)(y_1 - x_1) &+ \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(y_k - x_k) \\
&= x_1 \sum_{l:\deg X_l = 1} G^j_{1,l} \sum_{q=2}^{N} a_{lq}(y_q - x_q) - \sum_{l:\deg X_l = 1} G^j_{1,l}\varphi_l(x)(y_1 - x_1) \\
&- \sum_{\substack{|e_m + e_l|_h = 2,\\ 1 < m < l}} G^j_{m,l}\left(\varphi_l(x)\sum_{q=2}^{N} a_{mq}(y_q - x_q) - \varphi_m(x)\sum_{q=2}^{N} a_{lq}(y_q - x_q)\right)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

(ср. с выражением для $z_{\dim \widetilde{V}_1 + 1}$).

Фиксируем $x \in \Omega$. Напомним, что $N \leq \widetilde{N}$ и ранг матрицы $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ максимален (см. п. (5) предположения 3.1). Тогда образ $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle \mathscr{U} \rangle$, где $x \in \mathscr{U}$, $\mathscr{U} \Subset \Omega$, является N-мерной поверхностью в $\widetilde{\mathbb{G}}$. Рассмотрим пересечение $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle \mathscr{U} \rangle \cap \mathrm{Box}_2(\varphi(x), r)$ и найдем его $\mathscr{H}^N$-меру для достаточно малых $r > 0$.

Перейдем в нормальные координаты относительно точки $\varphi(x)$ и рассмотрим в этих координатах образ отображения $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$. Он представляет собой N-мерную плоскость в пространстве $\mathbb{R}^{\widetilde{N}}$. Запишем ее базис в виде столбцов матрицы

$$
W = \begin{pmatrix} w_1^{\widetilde{V}_1} & \dots & w_N^{\widetilde{V}_1} \\ w_1^{\widetilde{V}_2} & \dots & w_N^{\widetilde{V}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{\widetilde{V}_1} \\ w^{\widetilde{V}_2} \end{pmatrix},
$$

где элементы $w_i^{\widetilde{V}_1}$ — коэффициенты при полях степени 1, а $w_i^{\widetilde{V}_2}$ — при полях степени 2. В силу предположения 3.1 (п. (2)) $(W)_{1,1} = 1$, а остальные элементы первой строки и первого столбца W (кроме, возможно, первого элемента первой строки $w^{\widetilde{V}_2}$) равны нулю. Преобразуем эти векторы в вид, с помощью которого можно узнать площадь пересечения этой плоскости и субриманова шара, описанного в п. (6) предположения 3.1, радиуса $r > 0$. Так как площадь пересечения плоскости и неголономного шара всегда минимально возможная (см. [18, 19]), применим преобразование T к столбцам с номерами $2, \dots, N$ таким образом, чтобы оставить в части $w^{\widetilde{V}_2}$ матрицы W максимальное количество линейно независимых столбцов, а остальные занулим. Пусть это количество в матрице WT равно $\lambda(x)$. Так как столбцов всего N, то $\lambda(x) \leq N$, и поскольку их размерность равна $\dim \widetilde{V}_2$, то $\lambda(x) \leq \dim \widetilde{V}_2$.

Таким образом [18, 19], площадь пересечения плоскости и шара будет равна

$$
K(x) \cdot r^{N - \lambda(x) + 2\lambda(x)} = K(x) \cdot r^{N + \lambda(x)}. \tag{3.5}
$$

Подчеркнем, что в отличие от контактного случая равенство $\lambda(x) = n_2$ может не выполняться.

Положим

$$
\lambda = \max_{x \in \Omega} \lambda(x) \quad \text{и} \quad \mu = N + \lambda. \tag{3.6}
$$

Предположение 3.2. *Без ограничения общности будем предполагать, что* $\lambda(x) = \lambda$. *Тогда* $\lambda|_{\mathscr{U}} = \lambda$ *для некоторой окрестности* $\mathscr{U} \ni x$, $\mathscr{U} \Subset \Omega$, *причем соответствующие столбцы независимы на всей* $\mathscr{U}$. *Иными словами,* $\lambda(x) = \dim D(\widehat{D}_P\varphi(x))\langle \mathbb{R}^N \rangle / \widetilde{V}_1(\varphi(x))$ *не зависит от* $x \in \mathscr{U}$. *Кроме то-*

го, перенумеруем столбцы таким образом, чтобы матрица WT имела блочно-«верхнетреугольный» вид, т. е., чтобы все занулившиеся столбцы части $w^{\widetilde{V}_2}$ находились в начале.

Обозначение 3.3. Для матриц $W = W(x)$ и преобразования $T = T(x)$ на $\mathscr{U}$ введем обозначение $WT_\Delta = WT_\Delta(x)$, где матрица WT_Δ получается из блочно-«верхнетреугольной» WT заменой блока над «диагональю» нулевым. Положим $D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x)) = WT_\Delta(x)T^{-1}(x)$.

Обозначим символом $W^{(-1)}$ матрицу, полученную удалением из WT первой строки.

Для этого отображения верна

Теорема 3.4. *Для отображений $\varphi : \mathscr{U} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ справедлива следующая формула площади:*

$$\int_{\mathscr{U}} \sqrt{\det(D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))^* D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x)))}\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \int_{\varphi(\mathscr{U})} d\mathscr{H}^\mu(x),$$

где μ таково, что $\mu - N = \dim D(\widehat{D}_P\varphi(x))\langle\mathbb{R}^N\rangle/\widetilde{V}_1(\varphi(x))$ для всех $x \in \mathscr{U}$. Кроме того, $\mathscr{H}^\mu$-мера строится с коэффициентом $2\omega_{\lambda-1}\omega_{N-\lambda}$, если верно условие (1): соотношение

$$D\psi(x)(y_1 - x_1) = -\sum_{l:\deg X_l = 1} G^j_{1,l}\varphi_l(x)(y_1 - x_1) \tag{3.7}$$

не выполняется нигде, и первый столбец $W^{(-1)}$ независим с остальными; $2\omega_\lambda\omega_{N-\lambda-1}$, если имеет место условие (2): (3.7) верно и не существует столбца матрицы WT с единственным ненулевым элементом, имеющим номер $\dim \widetilde{V}_1 + 1$; и $4\omega_{\lambda-1}\omega_{N-\lambda-1}$, если условия (1) и (2) одновременно не выполняются.

Замечание 3.5. Из предположения 3.2 следует только постоянство величины λ, тогда как выполнение условия (2) или его одновременное с (1) невыполнение в точке x не распространяет эти качества на всю $\mathscr{U}$. Таким образом, теорема 3.4 верна, только если на всей $\mathscr{U}$ либо выполнено одно из условий (1) или (2), либо они одновременно не выполнены.

Доказательство теоремы 3.4. Предположим, что $x \in \mathscr{U} \Subset \Omega$. Рассмотрим пересечение $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_2(\varphi(x), r)$. Для вычисления его $\mathscr{H}^N$-меры при достаточно малых $r > 0$ найдем $K(x)$ из соотношения (3.5). Из [18, 19] следует, что

$$(K(x))^2 = C^2 \frac{\det((WT)^*WT)}{\det((WT_\Delta)^*WT_\Delta)}(1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $x \in \mathscr{U}$, а C — константа, зависящая от структуры шара. Так как

$$\frac{\det((T^*)^{-1})\det((WT)^*WT)\det(T^{-1})}{\det((T^*)^{-1})\det((WT_\Delta)^*WT_\Delta)\det(T^{-1})} = \frac{\det(W^*W)}{\det((WT_\Delta T^{-1})^*(WT_\Delta T^{-1}))},$$

получаем

$$K(x) = C\frac{\sqrt{\det((D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^* D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}}{\sqrt{\det((D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^* D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}}(1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $x \in \mathscr{U}$.

Рассмотрим плоскость $(1, \dim \widetilde{V}_1 + 1)$, проходящую через 0, и оценим длины ее пересечений с $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ и $\widehat{D}_P\varphi(x)$.

Предположим, что первый элемент $(\dim \widetilde{V}_1 + 1)$-й строки WT ненулевой и верно условие (1). Тогда при переходе от $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ к $\widehat{D}_P\varphi(x)$ мера соответствующего пересечения поменяется на величину $o(r^2)$, где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $x \in \mathscr{U}$, так как для $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ пересечение будет представлять собой прямую вида $(y_1, a(x)y_1)$, пересекающую множество $(-r, r) \times (-r^2, r^2)$, где

$$a(x) = D\psi(x) + \sum_{l:\deg X_l = 1} G^j_{1,l}\varphi_l(x).$$

В этом случае $C = 2\omega_{\lambda-1}\omega_{N-\lambda}$ (см. (3.1)).

Пусть выполнено условие (2). Так как $\varphi_l(x)$, $l > 1$, не зависит от первой координаты, а $\psi(x)$ зависит только от нее, то производные $D\psi(x)$ равны нулю. Таким образом, в силу равенства нулю вторых производных ψ имеем $d(x) = 0$. Тогда $C = 2\omega_\lambda\omega_{N-\lambda-1}$.

Таким образом, для условий (1) и (2) из вида WT вытекает, что исследуемое пересечение — это декартово произведение пересечений плоскости с шаром $B_2^{\dim \widetilde{V}_1 - 1}(0, r)$, шаром $B_2^{\dim \widetilde{V}_2 - 1}(0, r^2)$ и прямой, пересекающей $(-r, r) \times (-r^2, r^2)$. Если же условия (1) и (2) одновременно не выполнены, то образ $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ содержит плоскость $(1, \dim \widetilde{V}_1 + 1)$. В этом случае $C = 4\omega_{\lambda-1}\omega_{N-\lambda-1}$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^N(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_2(\varphi(x), r)) \\ = r^\mu \cdot C\frac{\det((D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^* D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}{\det((D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^* D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}(1 + o(1)),\end{aligned}$$

где $\mu = N + \lambda$.

Далее доказательство следует схеме, представленной в разд. 2 (см. также [8]). Отличие состоит в том, что на образе $\varphi(\mathscr{U})$ вычисляется $\mathscr{H}^\mu$-мера, а не $\mathscr{H}^\nu$-мера. Подчеркнем, что в общем случае $\mu \neq \nu$. Из этой же схемы следует абсолютная непрерывность относительно $\mathscr{H}^\nu$ на прообразе (так как прообразы шаров при отображении φ удовлетворяют условию удвоения), а свойство аддитивности на отдаленных шарах устанавливается, как для стандартной меры Хаусдорфа.

Теорема доказана. $\square$

Пусть теперь некоторая поверхность описывается отображением, совпадающим с $\widehat{D}_P\varphi(x)$, где у соответствующей матрицы дифференциала этого отображения элементы строки с номером $\dim \widetilde{V}_1 + 1$ равны нулю, а $(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_{\dim \widetilde{V}_1 + 1} = d(x) \cdot y^2$, где $d(x) \neq 0$. Тогда при переходе от $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ к $\widehat{D}_P\varphi(x)$ вместо прямой $(y_1, 0)$ будет кривая $\big(y_1, d(x)y_1^2\big)$ (см. (3.3)) и длина ее пересечения с сечением $(1, \dim \widetilde{V}_1 + 1)$ будет равна $2r$, если $|d(x)| < 1$, и $2r/\sqrt{|d(x)|}$, если $|d(x)| \geq 1$, с точностью до величины $o(r)$.

Следовательно, с учетом структуры шаров получаем, что если $|d(x)| \geq 1$, то

$$\mathscr{H}^N(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle\mathscr{U}\rangle\cap \mathrm{Box}_2(\varphi(x),r))$$
$$= r^\mu\cdot 2\omega_\lambda\omega_{N-\lambda-1}\frac{\det\bigl((D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^*D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)\bigr)}{\det\bigl((D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^*D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)\bigr)}\cdot\frac{1}{\sqrt{|d(x)|}}(1+o(1)), \tag{3.8}$$

где $\mu=N+\lambda$ и $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $x\in\mathscr{U}$.

Случай, когда якобиан зависит от вторых производных φ, представляет отдельный интерес. Предположим дополнительно, что $\widetilde{N}>N$, строка $W(x)$ с номером $j=\dim\widetilde{V}_1+1$ лежит в линейной оболочке строк с номерами $k=1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$, причем коэффициенты в соответствующей линейной комбинации зависят непрерывно от $x\in\mathscr{U}$, и $|d(x)|>1$ для всех $x\in\mathscr{U}$. Преобразуем базисные поля степени один $\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_{\dim\widetilde{V}_1}$ таким образом, что соответствующая строка с номером $\dim\widetilde{V}_1+1$ матрицы $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ в преобразованном базисе будет нулевой. Такое преобразование невырожденно, так как оно будет иметь вид

$$\widetilde{X}_j\mapsto {}^x\widetilde{Y}_j=\widetilde{X}_j+\alpha_j(x)\widetilde{X}_{\dim\widetilde{V}_1+1},$$

где $\alpha_j(x)$ — коэффициент при строке с номером j в представлении строки с номером $\dim\widetilde{V}_1+1$, $j=1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$. В этом случае в плоскости $(1,\dim\widetilde{V}_1+1)$ при переходе от $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ к $\widehat{D}_P\varphi(x)$ вместо прямой $(y_1,0)$ всегда будет кривая $\bigl(y_1,d(x)y_1^2\bigr)$ и длина ее пересечения с сечением $(1,\dim\widetilde{V}_1+1)$ будет равна не $2r$, а $2r/\sqrt{|d(x)|}$ с точностью до величины $o(r)$. Подчеркнем, что так как выполнение (3.7) всюду влечет равенство нулю $d(x)$, то первый элемент строки с номером $\dim\widetilde{V}_1+1$ зануляется только с помощью введения нового базиса.

Шары в новом базисе обозначим через ${}^x\,\mathrm{Box}_2(y,r)$, $y\in\widetilde{\mathbb{G}}$, $r>0$, и построим соответствующую меру на $\varphi(\mathscr{U})$:

$$\mathscr{H}^\mu_\varphi(A)=2\omega_\lambda\omega_{N-\lambda-1}\lim_{\delta\to0}\inf\Bigl\{\sum_{i\in\mathbb{N}}r_i^\mu:\bigcup_{i\in\mathbb{N}}{}^{\varphi^{-1}(x_i)}\,\mathrm{Box}_2(x_i,r_i)\supset A,\ x_i\in A,\ r_i<\delta\Bigr\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}{}^{\varphi^{-1}(x_i)}\,\mathrm{Box}_2(x_i,r_i)$ множества A. Тогда с учетом структуры шаров (3.1) получаем, что если $|d(x)|\geq 1$, то

$$\mathscr{H}^N(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle\mathscr{U}\rangle\cap \mathrm{Box}_2(\varphi(x),r))$$
$$= r^\mu\cdot 2\omega_\lambda\omega_{N-\lambda-1}\frac{\det((D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^*D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}{\det((D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^*D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))}\cdot\frac{1}{\sqrt{|d(x)|}}(1+o(1)),$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $x\in\mathscr{U}$. Таким образом, получили зависимость якобиана от вторых производных. Далее, аналогичными с приведенными ранее рассуждениями получаем абсолютную непрерывность относительно меры на прообразе и аддитивность на удаленных множествах $\mathscr{H}^\mu_\varphi$-меры. Отсюда вытекает, что верна

Теорема 3.6. *Для отображений $\varphi:\mathscr{U}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ справедлива следующая формула площади:*

$$\int\limits_{\mathscr{U}}\det((D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))^*D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))\sqrt{|d(x)|}\,d\mathscr{H}^\nu(x)=\int\limits_{\varphi(\mathscr{U})}d\mathscr{H}^\mu_\varphi(x),$$

где μ таково, что $\mu - N$ совпадает с максимально возможным количеством линейно независимых векторов степени два в образе $D(\widehat{D}_P\varphi)$, а $\mathscr{H}^\mu_\varphi$-мера рассматривается с множителем $2\omega_\lambda\omega_{N-\lambda-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова М. Б.* Полиномиальная субриманова дифференцируемость на группах Карно // Докл. АН. 2016. Т. 471, № 4. С. 391–394.
2. *Карманова М. Б.* О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 305–332.
3. *Карманова М. Б.* Гёльдеровы отображения групп Карно и внутренние базисы // Докл. АН. 2017. Т. 472, № 1. С. 7–10.
4. *Koranyi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
5. *Koranyi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
6. *Warhurst B.* Contact and quasiconformal mappings on real model filiform groups // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. V. 68. P. 329–343.
7. *Warhurst B.* Jet spaces as nonrigid Carnot groups // J. Lie Theory. 2005. V. 15. P. 341–356.
8. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.
9. *Карманова М. Б.* Поверхности-графики над трехмерными группами Ли с субримановой структурой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1351–1365.
10. *Карманова М. Б.* Поверхности-графики коразмерности два над трехмерными пространствами Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 6. С. 614–617.
11. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
12. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
13. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
14. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.
15. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Contemporary mathematics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
16. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
17. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.
18. *Karmanova M., Vodopyanov S.* An area formula for contact C^1-mappings of Carnot manifolds // Complex Variables, Elliptic Equ. 2010. V. 55, N 1–3. P. 317–329.
19. *Karmanova M., Vodopyanov S.* A Coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128, N 1. P. 67–111.

Статья поступила 10 ноября 2016 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru