

НОТОИДЫ И УЗЛЫ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ

Ф. Г. Кораблев, Я. К. Май

Аннотация. Изучается связь между нотоидами и узлами в прямом произведении двумерного тора на отрезок. Каждый нотоид на сфере поднимается до узла геометрической степени 1 в утолщенном торе. Доказывается, что на множестве примарных нотоидов, сложность которых больше единицы, это поднятие биективно.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.510

Ключевые слова: нотоид, узел в утолщенном торе, сложность нотоида, произведение нотоидов.

1. Введение

Теория *нотойдов* была предложена В. Тураевым в работе [1] как одно из обобщений теории длинных узлов. Нотоиды подобны классическим узлам и задаются своими диаграммами на двумерной сфере. Каждая такая диаграмма является связной незамкнутой кривой с точками трансверсальных самопересечений, снабженной информацией о проходах и переходах в этих двойных точках.

Каждый нотоид поднимается до узла геометрической степени 1 в прямом произведении двумерного тора на отрезок. В настоящей работе доказывается, что это поднятие инъективно на множестве примарных нотоидов, сложность которых не меньше двух. На множестве нотоидов сложности 1 вводится операция переключения. Одно из свойств этой операции состоит в том, что если два нотоида получаются друг из друга переключением, то их поднятия являются эквивалентными узлами в прямом произведении двумерного тора на отрезок.

В разд. 2 приводятся основные понятия из теории нотоидов, разработанной в [1]. Разд. 3 посвящен узлам в прямом произведении двумерного тора на отрезок, которые изучались, например, в [2, 3]. В разд. 4 и 5 доказывается некоторые свойства операции поднятия нотоидов. Разд. 6 посвящен сравнению двух таблиц: первая таблица представлена в [4] и содержит нотоиды, допускающие диаграммы с не более чем пятью двойными точками, вторая таблица была построена в [3] и содержит примарные узлы в прямом произведении двумерного тора на отрезок, также допускающие диаграммы с не более чем пятью двойными точками.

2. Предварительные сведения

Диаграммой нотоида на сфере называется образ погружения отрезка $[0; 1]$ в двумерную сферу, причем множество сингулярных точек этого погружения

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (код проекта 16–11–10291).

состоит только из внутренних точек двукратных трансверсальных самопересечений, содержащих информацию о том, какая из дуг является проходом, а какая — переходом. Как и в случае классических узлов, точки трансверсальных самопересечений называются *двойными точками диаграммы*. Образы точек 0 и 1 называются *концевыми точками* диаграммы нотоида.

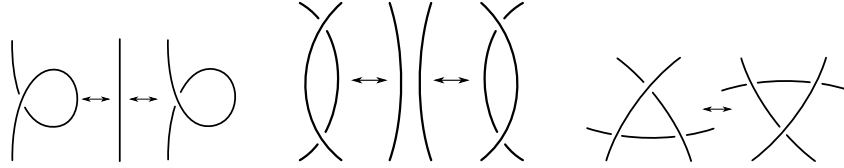


Рис. 1. Движения Рейдемейстера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Нотоидом* называется класс эквивалентности диаграмм нотоидов на сфере, рассматриваемых с точностью до изотопии двумерной сферы и трех классических движений Рейдемейстера (рис. 1).

Отметим, что движения Рейдемейстера применяются к областям двумерной сферы, не содержащим концевых точек диаграммы нотоида. Множество всех нотоидов на сфере будем обозначать через $\mathcal{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть D — диаграмма нотоида на сфере. Ее *сложностью* называется число

$$c(D) = \min_a (\#(a \cap D)),$$

где минимум берется по всем дугам на сфере, которые соединяют концевые точки диаграммы D и не проходят через двойные точки этой диаграммы. Здесь $\#(a \cap D)$ обозначает число точек в пересечении дуги a с диаграммой D .

Сложностью нотоида называется минимальная сложность диаграмм, задающих этот нотоид.

Опишем операцию *произведения* нотоидов (предложенную в [1]), которая является аналогом операции связного суммирования классических узлов. Пусть N_1, N_2 — два нотоида, и пусть для каждого $i = 1, 2$ нотоид N_i задан своей диаграммой D_i на сфере S_i . Обозначим через u_0, u_1 концевые точки диаграммы D_1 и через v_0, v_1 — концевые точки диаграммы D_2 . Пусть $B_1 \subset S_1$ — малая регулярная окрестность точки u_1 , и пусть $B_2 \subset S_2$ — малая регулярная окрестность точки v_0 (рис. 2, слева). Тогда *результатом произведения нотоидов* $N_1 \cdot N_2$ называется нотоид, диаграмма которого получается в результате склейки дисков $S_1 \setminus B_1$ и $S_2 \setminus B_2$ по гомеоморфизму $\partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ их краев, при котором точка $D_1 \cap \partial B_1$ склеивается с точкой $D_2 \cap \partial B_2$ (рис. 2, справа).

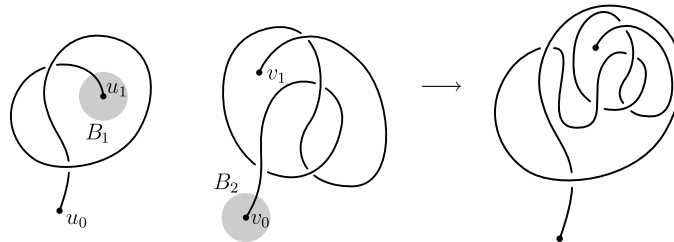


Рис. 2. Два нотоида (слева) и результат их произведения (справа)

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат произведения нотоидов не зависит от выбора их диаграмм, но зависит от того, какие концевые точки используются при взятии произведения. Если нотоиды ориентированы, то результат их произведения однозначно определяется порядком сомножителей. При этом в качестве точки u_1 выбирается конец первого нотоида, а в качестве точки v_0 — начало второго нотоида.

В общем случае операция произведения не коммутативна, но если нотоид $N_0 \in \mathcal{N}$ имеет сложность 0, то для любого нотоида $N \in \mathcal{N}$ справедливо равенство

$$N \cdot N_0 = N_0 \cdot N.$$

Теорема 4.3 в [1] утверждает, что для любых двух нотоидов $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ справедливо равенство

$$c(N_1 \cdot N_2) = c(N_1) + c(N_2).$$

Тривиальный нотоид — это нотоид, допускающий диаграмму без двойных точек. Тривиальный нотоид является нейтральным элементом относительно операции умножения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Нетривиальный нотоид N называется *примарным*, если его нельзя представить в виде $N = N_1 \cdot N_2$, где оба нотоида N_1 и N_2 нетривиальны.

Один из основных результатов работы [1] состоит в том, что любой нетривиальный нотоид можно представить в виде конечного произведения примарных нотоидов. Это представление единственно с точностью до перестановки множителей сложности 0.

3. Узлы в утолщенном торе

Пусть T^2 — двумерный тор, $I = [0; 1]$. Прямое произведение $T^2 \times I$ будем называть *утолщенным тором*. Собственное кольцо $A \subset T^2 \times I$ называется *вертикальным*, если оно изотопно кольцу вида $l \times I \subset T^2 \times I$, где $l \subset T^2$ — простая замкнутая кривая. Будем говорить, что узел $K \subset T^2 \times I$ имеет *геометрическую степень* 1, если найдется такое вертикальное кольцо $A \subset T^2 \times I$, что $\#(K \cap A) = 1$, т. е. пересечение $A \cap K$ состоит ровно из одной точки. Подобно классическим узлам узлы в утолщенном торе удобно задавать с помощью диаграмм на торе. Две диаграммы задают один узел тогда и только тогда, когда они связаны конечной последовательностью трех классических движений Рейдемейстера (см. рис. 1) и гомеоморфизмов двумерного тора.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех узлов в утолщенном торе, имеющих геометрическую степень 1. Опишем операцию *круговой связной суммы* на множестве $\mathcal{T}$, которая была предложена в [2]. Пусть T_1 и T_2 — два экземпляра двумерного тора, $K_1 \subset T_1 \times I$ и $K_2 \subset T_2 \times I$ — два узла, и пусть A_1, A_2 — вертикальные кольца такие, что $A_1 \subset T_1 \times I$, $A_2 \subset T_2 \times I$ и $\#(K_1 \cap A_1) = \#(K_2 \cap A_2) = 1$ (рис. 3, слева). Для каждого $i = 1, 2$ разрежем утолщенный тор $T_i \times I$ по кольцу A_i . В результате получим утолщенное кольцо $A'_i \times [0; 1]$, содержащее собственную дугу $K'_i \subset A'_i \times [0; 1]$, которая получается при разрезании узла K_i по точке $K_i \cap A_i$ (рис. 3, в центре). Приклеим кольцо $A'_1 \times \{0\}$ к кольцу $A'_2 \times \{0\}$, а кольцо $A'_1 \times \{1\}$ к кольцу $A'_2 \times \{1\}$ так, чтобы концы дуг K'_1 и K'_2 склеились

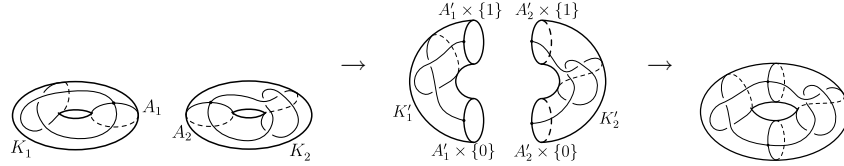


Рис. 3. Круговое связное суммирование узлов K_1 и K_2

и получился узел в утолщенном торе (рис. 3, справа). Этот узел называется *круговой связной суммой* узлов K_1 и K_2 и обозначается через $K_1 \# K_2$.

Узел геометрической степени 1 в утолщенном торе $T^2 \times I$ называется *горизонтальным*, если он изотопен кривой $l \times \{*\}$, где $l \subset T^2$ — простая замкнутая кривая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Негоризонтальный узел $K \subset T^2 \times I$ геометрической степени 1 называется *примарным*, если его нельзя представить в виде $K = K_1 \# K_2$, где оба узла K_1, K_2 не горизонтальны.

Пусть K — узел в утолщенном торе $T^2 \times I$. Будем говорить, что два вертикальных кольца $A, B \subset T^2 \times I$ *изотопны* в $(T^2 \times I, K)$, если существует такая изотопия $h_t : T^2 \times I \rightarrow T^2 \times I$, $0 \leq t \leq 1$, что $h_0(A) = A$, $h_1(A) = B$ и $h_t(K) = K$ для всех $0 \leq t \leq 1$.

Следующая теорема носит технический характер. Однако она имеет ключевое значение при доказательствах последующих теорем 2 и 3.

Теорема 1. Пусть K — узел геометрической степени 1 в утолщенном торе $T^2 \times I$, пересекающий вертикальное кольцо $A \subset T^2 \times I$ в одной точке. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если существует такое вертикальное несжимаемое кольцо B , что $\#(K \cap B) \leq 1$ и кольцо B не изотопно кольцу A в утолщенном торе $T^2 \times I$, то существует несжимаемое вертикальное кольцо, которое пересекается с кольцом A по одному отрезку, примыкающему к разным компонентам края кольца A , а с узлом K — в $\#(K \cap B)$ точках.

2. Если узел K примарен и существует такое вертикальное несжимаемое кольцо B , что $\#(K \cap B) = 1$ и кольцо B изотопно кольцу A в утолщенном торе $T^2 \times I$, то существует кольцо, изотопное кольцу B в $(T^2 \times I, K)$, которое не пересекается с кольцом A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \subset T^2 \times I$ — несжимаемое вертикальное кольцо такое, что $\#(K \cap B) = k \leq 1$. Пересечение $A \cap B$ состоит из кривых следующих четырех типов на кольце A .

1. Тривиальные окружности. В силу несжимаемости колец A и B эти окружности тривиальны на обоих кольцах.

2. Тривиальные дуги, т. е. дуги, примыкающие к одной компоненте края кольца A .

3. Нетривиальные окружности. В силу несжимаемости колец A и B эти окружности нетривиальны на обоих кольцах.

4. Радиальные отрезки, т. е. дуги, примыкающие к разным компонентам края кольца A .

Будем строить искомое несжимаемое вертикальное кольцо, устраняя пересечения колец A и B с помощью техники, использованной в [5]. Рассмотрим четыре случая в зависимости от типа кривых в пересечении $A \cap B$.

СЛУЧАЙ 1: пересечение $A \cap B$ содержит тривиальную окружность. Тогда найдется такой диск $D \subset A$, что $D \cap B = \partial D$. Сделаем перестройку кольца B , разрезав его по кривой ∂D и приклеив две параллельные копии диска D (рис. 4). Получим новое вертикальное несжимаемое кольцо $B' \subset T^2 \times I$ и сферу $S \subset T^2 \times I$. Заметим, что кольца B' и B изотопны в $T^2 \times I$ и, так как $\#(K \cap A) = 1$, то $\#(K \cap B') = k$. Более того, если узел K примарен, то кольца B' и B изотопны в $(T^2 \times I, K)$. Следовательно, кольцо B' можно выбрать вместо кольца B , при этом величина $\#(A \cap B)$ уменьшается.

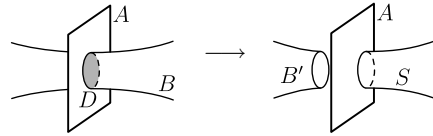


Рис. 4. Устранение тривиальной окружности в пересечении колец A и B

СЛУЧАЙ 2: пересечение $A \cap B$ не содержит тривиальных окружностей, но содержит тривиальные дуги. В этом случае построение аналогично предыдущему случаю, только на кольце A вместо самого внутреннего диска надо выбрать самый внешний полудиск, отсекаемый тривиальными дугами пересечения $A \cap B$.

СЛУЧАЙ 3: пересечение $A \cap B$ состоит только из нетривиальных окружностей. Этот случай возможен, только если кольца A и B изотопны в $T^2 \times I$. Среди колец, на которые кольцо A разбивается окружностями пересечения $A \cap B$, выберем такое кольцо $A' \subset A$, что $A' \cap \partial(T^2 \times I) \neq \emptyset$ и $\#(K \cap A') = 0$. Такое кольцо всегда найдется, так как $\#(K \cap A) = 1$.

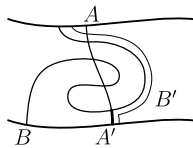


Рис. 5

Перестроим кольцо B , разрезав его по окружности $B \cap A'$ и приклеив две параллельные копии кольца A' , как на рис. 5, на котором кольца A и B пересекаются по нетривиальным окружностям. Кольцо B' изотопно кольцу B в утолщенном торе $T^2 \times I$ и $\#(A \cap B') < \#(A \cap B)$. Получим два кольца, одно из которых (обозначим его через B') вертикальное, а второе примыкает к одной компоненте края утолщенного тора $T^2 \times I$. Так как $\#(K \cap A') = 0$, то $\#(K \cap B') = 1$ и кольцо B изотопно кольцу B' в $(T^2 \times I, K)$. Следовательно, кольцо B' можно выбрать вместо кольца B , при этом величина $\#(A \cap B)$ уменьшается.

СЛУЧАЙ 4: пересечение $A \cap B$ состоит только из радиальных отрезков. Можно считать, что $A = a \times I$, $B = b \times I$, где $a, b \subset T^2$ — простые замкнутые кривые. Пусть D° — диаграмма узла K такая, что $\#(D^\circ \cap a) = 1$ и $\#(D^\circ \cap b) = k$. Если $\#(a \cap b) \leq 1$, то кольцо B искомое. Далее в доказательстве будем считать, что $\#(a \cap b) \geq 2$.

Рассмотрим два случая в зависимости от того, изотопны кривые a и b на торе T^2 или нет.

СЛУЧАЙ 4.1: кривые a и b не изотопны на торе T^2 . Выберем такую дугу $a' \subset a$, что $a' \cap b = \partial a'$ и $\#(D^\circ \cap a') = 0$. Такая дуга заведомо найдется, так как $\#(D^\circ \cap a) = 1$. Сделаем перестройку кривой b , разрезав ее по точкам пересечения $b \cap a'$ и приклеив две копии дуги a' так, чтобы получились две кривые b' и b'' (рис. 6, слева и в центре). Поскольку кривая b нетривиальна и не изотопна кривой a на торе T^2 , одна из кривых b' или b'' также нетривиальна и не изотопна кривой a на торе T^2 . Для определенности будем считать, что

это кривая b' . Более того, так как $k \leq 1$, то $\#(D^\circ \cap b') = k$. Следовательно, кольцо $b' \times I$ можно выбрать вместо кольца B , при этом величина $\#(A \cap B)$ уменьшается.

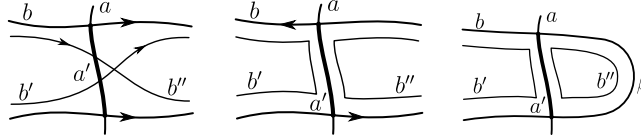


Рис. 6. Перестройка кривой b вдоль дуги a' . Слева и в центре изображены разные случаи в зависимости от того, примыкает дуга a' с одной стороны к кривой b или нет

СЛУЧАЙ 4.2: кривые a и b изотопны на торе T^2 . Тогда по условию теоремы узел K примарен. Пусть $\beta \subset b$ — одна из дуг, на которые кривая b разбивается точками пересечения $a \cap b$, обладающая следующими свойствами (рис. 6, справа):

- (1) дуга β примыкает к кривой a с одной стороны;
- (2) кривая a разбивается точками $\partial\beta$ на две дуги, причем одна из них (обозначим ее через $a' \subset a$) не имеет внутренних точек пересечения с кривой b .

Так как кривые a и b изотопны на T^2 , такая дуга $\beta \subset b$ заведомо найдется. Снова сделаем перестройку кривой b , разрезав ее по точкам пересечения $b \cap a'$ и приклеив две копии дуги a' так, чтобы получились две кривые b' и b'' . Одна из этих кривых, пусть для определенности b'' , тривиальна на торе T^2 . Тогда так как узел K примарен, кольцо $b' \times I$ изотопно кольцу A в $(T^2 \times I, K)$. Следовательно, это кольцо можно выбрать вместо кольца B , при этом величина $\#(A \cap B)$ уменьшается.

Повторяем все предыдущие рассуждения до получения такого несжимаемого вертикального кольца B , что $\#(A \cap B) \leq 1$. Из построения следует, что если $\#(A \cap B) = 1$, то пересечение $A \cap B$ состоит из одного радиального отрезка. Следовательно, кольцо B искомое для первого утверждения теоремы. Если $\#(A \cap B) = 0$, то кольца A и B изотопны в $T^2 \times I$. Из построения следует, что тогда кольцо B искомое для второго утверждения теоремы. $\square$

4. Нотоиды и узлы в утолщенном торе

Опишем отображение $\mathfrak{L} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}$, которое каждому нотоиду $N \in \mathcal{N}$ сопоставляет узел $\mathfrak{L}(N)$ геометрической степени 1 в утолщенном торе. Пусть D — диаграмма нотоида N на сфере S^2 . Обозначим концевые точки этой диаграммы через v_0 и v_1 , а их малые регулярные окрестности — через B_0 и B_1 соответственно (рис. 7, слева). Вырежем из сферы S^2 диски B_0 и B_1 и склеим края получившегося кольца по обращаемому ориентацию гомеоморфизму $\partial B_0 \rightarrow \partial B_1$ так, чтобы точка $D \cap \partial B_0$ склеилась с точкой $D \cap \partial B_1$. Будем говорить, что получающаяся таким образом диаграмма на двумерном торе индуцирована диаграммой D нотоида N . Пусть $\mathfrak{L}(N)$ — узел в утолщенном торе, задаваемый этой индуцированной диаграммой (рис. 7, справа). Отображение $\mathfrak{L} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}$ будем называть *поднятием* нотоидов до узлов в утолщенном торе.

Лемма 1. Отображение $\mathfrak{L} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}$ определено корректно, т. е. для любого нотоида $N \in \mathcal{N}$ результат его поднятия $\mathfrak{L}(N)$ является узлом геометрической степени 1 в утолщенном торе и не зависит от выбора диаграммы нотоида N .

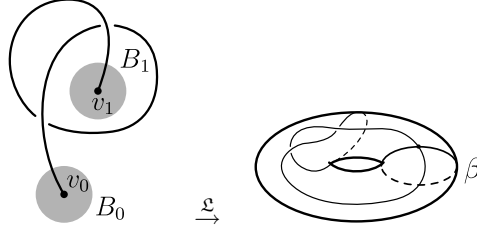


Рис. 7. Диаграмма нотоида (слева) и индуцируемая ею диаграмма узла в утолщенном торе (справа). Кривая β на двумерном торе является образом при склейке краев ∂B_0 и ∂B_1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для любого нотоида $N \in \mathcal{N}$ образом $\mathfrak{L}(N) \subset T^2 \times I$ всегда является узел геометрической степени 1. Вертикальное кольцо, пересекающее этот узел в одной точке, изотопно кольцу $\beta \times I \subset T^2 \times I$, где β — образ при склейке краев ∂B_0 и ∂B_1 .

Для доказательства леммы достаточно проверить, что если две диаграммы D_1 и D_2 нотоида N связаны последовательностью движений Рейдемейстера, то индуцируемые ими диаграммы D_1° и D_2° узлов в утолщенном торе также связаны последовательностью движений Рейдемейстера. Справедливость этого следует из того, что области локальных движений Рейдемейстера, связывающих любые две диаграммы нотоида N , не содержат концевых точек этих диаграмм. $\square$

Поднятие $\mathfrak{L} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}$ также описано в [1, замечание 7.5].

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество $\mathcal{N}$ с операцией произведения нотоидов и множество $\mathcal{T}$ с операцией кольцевой связной суммы являются полугруппами. Отображение поднятия — это гомоморфизм из полугруппы нотоидов в полугруппу узлов геометрической степени 1 в утолщенном торе. Другими словами, если N_1, N_2 — два нотоида, то

$$\mathfrak{L}(N_1 \cdot N_2) = \mathfrak{L}(N_1) \# \mathfrak{L}(N_2).$$

Из определений 3 и 4 следует, что нотоид N примарен тогда и только тогда, когда его поднятие $\mathfrak{L}(N)$ является примарным узлом в утолщенном торе.

Лемма 2. Поднятие $\mathfrak{L} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}$ сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K — узел геометрической степени 1 в утолщенном торе $T^2 \times I$ и $A \subset T^2 \times I$ — вертикальное кольцо такое, что $\#(K \cap A) = 1$. Можно считать, что $A = l \times I$, где l — простая замкнутая нетривиальная кривая на двумерном торе T^2 . Выберем диаграмму $D^\circ \subset T^2$ узла K , пересекающую кривую l в одной точке (рис. 8, слева). Разрежем тор T^2 по кривой l (рис. 8, в центре) и каждую компоненту края получившегося кольца стянем в точку (рис. 8, справа). В результате получим диаграмму некоторого нотоида $N \in \mathcal{N}$. Из построения следует, что $\mathfrak{L}(N) = K$. $\square$

В общем случае поднятие $\mathfrak{L}$ не инъективно. В разд. 5 определим операцию переключения нотоидов. Она позволяет строить примеры различных нотоидов, поднятия которых являются эквивалентными узлами в утолщенном торе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что узел $K \subset T^2 \times I$ в утолщенном торе допускает дестабилизацию, если существует такое несжимаемое вертикальное кольцо $X \subset T^2 \times I$, что $\#(K \cap X) = 0$.

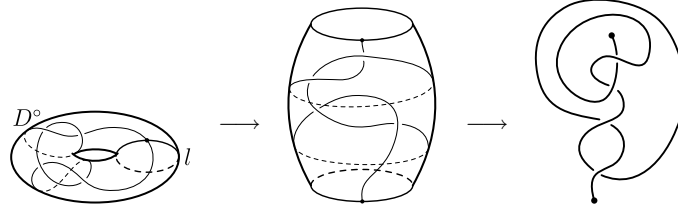


Рис. 8. Построение диаграммы нотоида по диаграмме D° узла в утолщенном торе. Двумерный тор разрезается по кривой l , и каждая компонента края получившегося кольца стягивается в точку

Теорема 2. *Нотоид имеет сложность 0 тогда и только тогда, когда результат его поднятия допускает дестабилизацию.*

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $N \in \mathcal{N}$ — нотоид сложности 0, D — его диаграмма на двумерной сфере S^2 , и пусть $a \subset S^2$ — дуга, не пересекающая диаграмму D и соединяющая ее концевые точки. Диаграмма D индуцирует диаграмму $D^\circ \subset T^2$ узла $\mathfrak{L}(N)$. При этом дуге $a \subset S^2$ соответствует простая нетривиальная замкнутая кривая $l \subset T^2$, не пересекающая диаграмму D° . Эта кривая l получается из дуги a склеиванием ее концевых точек. В качестве искомого кольца X можно выбрать кольцо, изотопное кольцу $l \times I$. Оно несжимаемо, так как кривая l не тривиальна.

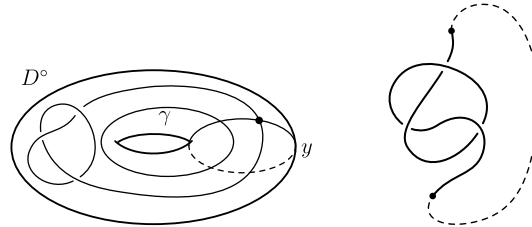


Рис. 9. В результате разрезания тора вдоль кривой y и стягивании каждой компоненты края получившегося кольца в точку из диаграммы D° получается диаграмма нотоида сложности 0

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $N \in \mathcal{N}$ — нотоид, поднятие $\mathfrak{L}(N)$ которого является узлом геометрической степени 1 в утолщенном торе $T^2 \times I$. Выберем такое вертикальное кольцо $Y \subset T^2 \times I$, что $\#(\mathfrak{L}(N) \cap Y) = 1$, и пусть $X \subset T^2 \times I$ — вертикальное несжимаемое кольцо, не пересекающееся с узлом $\mathfrak{L}(N)$. Тогда по теореме 1 (в качестве кольца A берется кольцо Y , а в качестве кольца B — кольцо X) найдется вертикальное несжимаемое кольцо $C \subset T^2 \times I$, не пересекающееся с узлом $\mathfrak{L}(N)$ и пересекающееся с кольцом Y по одному радиальному отрезку. Можно считать, что $Y = y \times I$ и $C = \gamma \times I$, где y, γ — простые замкнутые кривые на торе T^2 , причем кривая y пересекается с некоторой диаграммой D° узла $\mathfrak{L}(N)$ на торе T^2 в одной точке, а кривая γ с этой диаграммой не пересекается (рис. 9, слева). Разрезав тор T^2 по кривой y и стянув каждую компоненту края получившегося кольца в точку, получим диаграмму D нотоида N . Дуга, в которую при этом перейдет γ , соединяет концевые точки диаграммы D и не пересекается с ней в других точках (рис. 9, справа). Следовательно, нотоид N имеет сложность 0. $\square$

5. Инъективность поднятия $\mathfrak{L}$

Пусть $N \in \mathcal{N}$ — нотоид сложности 1, $D \subset S^2$ — его диаграмма на сфере, $v_0, v_1 \in S^2$ — концевые точки этой диаграммы, и пусть $a \subset S^2$ — простая дуга, соединяющая точки v_0 и v_1 и пересекающая диаграмму D в одной точке (рис. 10, слева). Удалим из диаграммы D открытую малую регулярную окрестность точки пересечения $a \cap D$ и приклеим дугу a к точкам v_0 и v_1 (рис. 10, справа). В результате получится диаграмма D' некоторого нотоида $N' \in \mathcal{N}$. Будем говорить, что нотоид N' получается *переключением* нотоида N .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения поднятия $\mathfrak{L} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}$ следует, что если нотоид N' получается переключением нотоида N , то узлы $\mathfrak{L}(N)$ и $\mathfrak{L}(N')$ эквивалентны.

На рис. 10 изображены два нотоида, получающиеся друг из друга переключением. Различность этих нотоидов можно доказать с помощью аналога полинома Кауффмана (построенного в [1]). Этот полином для нотоида, изображенного на рис. 10 слева, равен

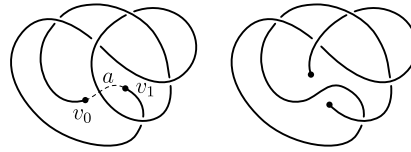


Рис. 10. Два нотоида, получающиеся друг из друга переключением

$$-A^{-12} - A^{-10} + A^{-8} + A^{-6} + A^{-4} - A^{-2},$$

а для нотоида, изображенного на рис. 10 справа, равен

$$-A^{-12} - A^{-10} + 2A^{-8} + A^{-6} - A^{-4} - 2A^{-2} + 1 + 2A^2 - A^6.$$

Лемма 3. В результате переключения нотоида сложности 1 снова получается нотоид сложности 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \in \mathcal{N}$ — нотоид сложности 1, и пусть нотоид N' получается его переключением. Из определения операции переключения следует, что его сложность не превосходит 1.

Предположим, что сложность нотоида N' равна 0. Тогда по теореме 2 найдется такое вертикальное несжимаемое кольцо $X \subset T^2 \times I$, что $\#(\mathfrak{L}(N') \cap X) = 0$. С другой стороны, узлы $\mathfrak{L}(N)$ и $\mathfrak{L}(N')$ эквивалентны и сложность нотоида N равна 1, следовательно, такого кольца не существует; противоречие. $\square$

Обозначим через $\mathcal{NP}(2)$ множество всех примарных нотоидов, сложность которых не меньше двух.

Теорема 3. Отображение поднятия инъективно на множестве $\mathcal{NP}(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N_1, N_2 \in \mathcal{NP}(2)$ — два нотоида такие, что результаты их поднятий $\mathfrak{L}(N_1)$ и $\mathfrak{L}(N_2)$ эквивалентны некоторому примарному узлу K в утолщенном торе $T^2 \times I$. Покажем, что тогда нотоиды N_1 и N_2 совпадают.

Выберем для каждого $i = 1, 2$ диаграмму D_i нотоида N_i , и пусть $D_i^\circ \subset T^2$ — индуцируемая ею диаграмма узла K . Для каждого $i = 1, 2$ выберем такую простую замкнутую кривую $a_i \subset T^2$, что $\#(D_i^\circ \cap a_i) = 1$. Тогда найдутся два таких вертикальных кольца $A_1, A_2 \subset T^2 \times I$, что $\#(K \cap A_i) = 1$ и кольцо A_i изотопно кольцу $a_i \times I$, $i = 1, 2$. Рассмотрим два случая в зависимости от того, являются ли кольца A_1 и A_2 изотопными в $T^2 \times I$ или нет.

СЛУЧАЙ 1: кольца A_1 и A_2 не изотопны в $T^2 \times I$. Тогда по теореме 1 (в качестве кольца A берется кольцо A_1 , а в качестве кольца B — кольцо A_2) найдется

такое вертикальное кольцо A'_2 , что $\#(K \cap A'_2) = 1$ и пересечение $A_1 \cap A'_2$ состоит из одного радиального отрезка. Можно считать, что $A_1 \cup A'_2 = (a_1 \cup a'_2) \times I$, где $a'_2 \subset T^2$ — простая замкнутая кривая, пересекающая диаграмму узла K в одной точке. Разрезав тор T^2 по кривой a_1 и стянув каждую компоненту края получившегося кольца в точку, получим диаграмму нотоида N_1 . При этом кривая a'_2 перейдет в дугу, соединяющую концевые точки этой диаграммы и пересекающую ее в одной точке. Это противоречит тому, что сложность нотоида N_1 не меньше двух.

СЛУЧАЙ 2: кольца A_1 и A_2 изотопны в $T^2 \times I$. Если они изотопны в $(T^2 \times I, K)$, то нотоиды N_1 и N_2 совпадают. Если кольца A_1 и A_2 не изотопны в $(T^2 \times I, K)$, то по теореме 1 (в качестве кольца A берется кольцо A_1 , а в качестве кольца B — кольцо A_2) кольцо A_2 изотопно некоторому кольцу A_3 в $(T^2 \times I, K)$, причем $A_3 \cap A_1 = \emptyset$. Следовательно, нотоиды N_1 и N_2 не примарны, что противоречит условию теоремы. $\square$

6. Таблицы нотоидов и узлов в утолщенном торе

Ресурс [4] содержит таблицу нотоидов (не обязательно примарных), допускающих диаграммы с не более чем пятью двойными точками. Работа [3] содержит таблицу всех примарных узлов в утолщенном торе, также допускающих диаграммы с не более чем пятью двойными точками. В табл. 1 представлен список примарных табличных нотоидов и соответствующих им узлов в утолщенном торе, получающихся в результате поднятия. Для обозначений нотоидов используется нумерация, предложенная в [4]. Для обозначений узлов в утолщенном торе используется нумерация, предложенная в [3].



Рис. 11. Нотоид, поднятие которого совпадает с узлом 5_{69} в [3]

Отметим, что в таблице из [4] пропущен один из нотоидов. Его диаграмма изображена на рис. 11. Этот нотоид поднимается до узла геометрической степени 1, который в таблице из [3] имеет номер 5_{69} .

Таблица 1. Нотоиды и получающиеся из них поднятием узлы в утолщенном торе

Нотоид	Узел	Нотоид	Узел	Нотоид	Узел	Нотоид	Узел	Нотоид	Узел
2.1	2 ₁	4.7	4 ₆	5.6	5 ₆	5.19	5 ₃₅	5.25	5 ₂₃
3.1	3 ₁	4.8	4 ₇	5.7	5 ₃₁	5.20	5 ₃₆	5.26	5 ₄₆
4.1	4 ₂	4.9	4 ₉	5.8	5 ₁₂	5.21	5 ₃₇	5.27	5 ₄₃
4.2	4 ₁	5.3	5 ₁₀	5.9	5 ₇	5.22	5 ₃₉	5.28	5 ₄₄
4.3	4 ₃	5.4	5 ₃₀	5.10	5 ₅	5.23	5 ₃₈	5.29	5 ₁₄
4.6	4 ₈	5.5	5 ₁₃	5.18	5 ₃₄	5.24	5 ₂₄	5.30	5 ₄₅

ЛИТЕРАТУРА

1. Turaev V. Knotoids // Osaka J. Math. 2013. V. 49, N 1. P. 195–223.
2. Matveev S. Prime decompositions of knots in $T^2 \times I$ // Topology Appl. 2012. V. 159, N 7. P. 1820–1824.
3. Akimova A., Matveev S. Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings // J. Knot Theory Ramifications. 2014. V. 23, N 6.
4. Bartholomew A. Knotoids. <http://www.layer8.co.uk/maths/knotoids/index.htm>.

5. Матвеев С. В. Корни и разложения трехмерных топологических объектов // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 3. С. 63–114.

Статья поступила 9 марта 2017 г.

Кораблев Филипп Глебович
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
korablev@csu.ru

Май Яна Константиновна
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
vinney1989@inbox.ru