Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 517.983+517.968.25

О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА В L_2

В. Б. Коротков

Аннотация. Рассматривается общая система функциональных уравнений 2-го рода в L_2 с линейным непрерывным оператором T, удовлетворяющим условию: нуль принадлежит предельному спектру сопряженного оператора T^*. Показывается, что это условие выполняется для операторов из широкого класса, содержащего, в частности, все интегральные операторы. Рассматриваемая система унитарным преобразованием редуцируется к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений 2-го рода в L_2 с карлемановским матричным ядром специального вида. Эта система линейной непрерывной обратимой заменой приводится к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода в L_2 с квазивырожденным карлемановским ядром. К такому уравнению применимы различные приближенные методы решения.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.511

Ключевые слова: система линейных функциональных уравнений 2-го рода, интегральный оператор, карлемановский интегральный оператор, оператор Гильберта — Шмидта, резольвента Фредгольма, разрешающее ядро, спектр, предельный спектр.

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой μ. *Атомом меры* μ называется множество положительной меры, не представимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ *не является чисто атомической*, если в X есть множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ. Всюду далее через χ_E будем обозначать характеристическую функцию множества E: $\chi_E(s) = 1$, если $s \in E$, и $\chi_E(s) = 0$, если $s \notin E$.

Обозначим через $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$ пространство всех классов μ-эквивалентных μ-измеримых функций на X с суммируемым квадратом. Через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ обозначим норму и скалярное произведение в $L_2(\mu)$. Меру μ назовем *сепарабельной*, если $L_2(\mu)$ — сепарабельное пространство. Линейный оператор $\tau : L_2(\mu) \longmapsto L_2(\mu)$ называется *интегральным*, если существует определенная на $X \times X$ $(\mu\times\mu)$-измеримая $(\mu\times\mu)$-почти всюду конечная функция $k(s,t)$ такая, что для всех $f \in L_2(\mu)$

$$\tau f(s) = \int\limits_X k(s,t)f(t)\,d\mu(t)$$

при почти всех $s \in X$. Интеграл здесь и далее понимается в лебеговом смысле.

Рассмотрим пространство $L_{2,m}(\mu) := L_{2,m}(X, \mu)$ всех классов μ-эквивалентных вектор-функций $h(t) = \{h_1(t), \dots, h_m(t)\}$ с конечной нормой

$$\|h\|_{m,\mu} = \left(\sum_{i=1}^m \int\limits_X |h_i(t)|^2\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

и скалярным произведением

$$\langle h, g\rangle = \sum_{i=1}^{m} \int_X h_i(t)\overline{g_i(t)}\, d\mu(t).$$

Пусть $\tau_{ij} : L_2(\mu) \mapsto L_2(\mu)$, $i, j = 1, \dots, m$, — линейные непрерывные операторы. Определим матричный оператор $T = (\tau_{ij})_1^m : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$ равенствами

$$(Th(s))_i = \sum_{j=1}^{m} \tau_{ij} h_j(s), \quad h(t) = \{h_1(t), \dots, h_m(t)\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

здесь $(Th(s))_i$ — i-я компонента вектор-функции $Th(s)$.

Оператор T называется *матричным интегральным оператором*, если все операторы τ_{ij} интегральные. Пусть $k_{ij}(s,t)$ — их ядра. Матрица $K(s,t) = (k_{ij}(s,t))_1^m$ называется *ядром* матричного интегрального оператора. Если все ядра $k_{ij}(s,t)$ удовлетворяют условию Карлемана

$$\int_X |k_{ij}(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$, то T называется *матричным карлемановским интегральным оператором.* Если

$$N(T) := \left[\sum_{i,j=1}^{m} \int_X \int_X |k_{ij}(s,t)|^2\, d\mu(t) d\mu(s)\right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то T называется *матричным интегральным оператором Гильберта — Шмидта*, а число $N(T)$ — его *абсолютной нормой.* Из теории операторов Гильберта — Шмидта следует, что оператор

$$Hh = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, f_n\rangle g_n, \quad h \in L_{2,m}(\mu),$$

где $\{f_n\} \subset L_{2,m}(\mu)$, а $\{g_n\}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(\mu)$, будет матричным интегральным оператором Гильберта — Шмидта, если

$$M(H) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{m,\mu}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

при этом имеет место равенство

$$N(H) = M(H). \tag{1}$$

Линейный оператор $V : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$ называется *унитарным*, если $VL_{2,m}(\mu) = L_{2,m}(\mu)$ и $\|Vh\|_{m,\mu} = \|h\|_{m,\mu}$ для любого $h \in L_{2,m}(\mu)$.

Будем говорить, что *нуль принадлежит предельному спектру $\sigma_c(L)$ оператора $L : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$*, если найдется ортонормированная последовательность $\{\phi_n\} \subset L_{2,m}(\mu)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|L\phi_n\|_{m,\mu} = 0$.

Рассмотрим в $L_{2,m}(\mu)$ систему функциональных уравнений 2-го рода

$$x - \lambda Tx = f \in L_{2,m}(\mu), \tag{2}$$

где $T : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$ — линейный оператор, λ — числовой параметр, решение ищется в $L_{2,m}(\mu)$. Обозначим через $\{e_n\}$ произвольную последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами.

Теорема 1. *Пусть мера μ сепарабельна и не является чисто атомической, $T : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$ — линейный непрерывный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$, где T^* — сопряженный оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от λ и f унитарный оператор $U : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$ такой, что замена $y = Ux$, $g = Uf$ приводит систему (2) к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений 2-го рода*

$$y - \lambda(\Gamma + K)y = g, \tag{3}$$

где Γ — матричный интегральный оператор Гильберта — Шмидта в $L_{2,m}(\mu)$ с абсолютной нормой, меньшей, чем ε, а K — матричный карлемановский интегральный оператор в $L_{2,m}(\mu)$ с квазивырожденным матричным ядром

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} K_n(t), \tag{4}$$

причем для любого n первая строка $(m \times m)$-матрицы $K_n(t)$ при почти всех $t \in X$ имеет вид

$$\{(\overline{UT^* z_n(t)})_1, \dots, (\overline{UT^* z_n(t)})_m\},$$

а остальные строки равны 0, $\{z_n\}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(\mu)$.

Доказательство. В силу $0 \in \sigma_c(T^*)$ найдется ортонормированная система $\{\phi_n\} \subset L_{2,m}(\mu)$ такая, что $\|T^*\phi_n\|_{m,\mu} \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{\phi_{2n}\}$ так, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* w_n\|^2_{m,\mu}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{5}$$

Определим в $L_{2,m}(\mu)$ унитарный оператор U равенствами

$$Uz_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} h_0, \quad Uw_n = \chi_n^{\perp}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где h_0 — вектор-столбец, первая компонента которого равна 1, а остальные $m-1$ компонент равны 0, $\{z_n\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{w_n\}$, $\{\chi_n^{\perp}\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\chi_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} h_0$, $n = 1, 2, \dots$.

Сделав в (2) замену $y = Ux$ и применив к обеим частям (2) оператор U, получим

$$y - \lambda UTU^{-1}y = g, \quad g = Uf.$$

Имеем

$$UTU^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle UTU^{-1}y, \chi_n^{\perp}\rangle \chi_n^{\perp} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle UTU^{-1}y, \chi_n\rangle \chi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, UT^* w_n\rangle \chi_n^{\perp} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, UT^* z_n\rangle \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} h_0 = \Gamma y + Ky.$$

Оператор

$$\Gamma h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, UT^* w_n\rangle \chi_n^{\perp}, \quad h \in L_{2,m}(\mu),$$

в силу (5) и (1) является матричным интегральным оператором Гильберта — Шмидта с абсолютной нормой, меньшей, чем ε,

$$Kh = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, UT^* z_n \rangle \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} h_0, \quad h \in L_{2,m}(\mu) \tag{6}$$

— матричный карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным матричным ядром (4). Это следует из (6), дизъюнктности множеств e_n и выбора h_0.

Линейный оператор в $L_2(\mu)$ называется *компактным по мере* [1], если он отображает единичный шар пространства $L_2(\mu)$ в множество, компактное в смысле сходимости по мере на каждом множестве конечной меры. Линейный оператор $\kappa : L_2(\mu) \mapsto L_2(\mu)$ назовем *почти компактным*, если существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что все операторы $P_{X_n}\kappa$ компактны; здесь $P_{X_n} f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_2(\mu)$. Каждый почти компактный оператор компактен по мере. Кроме того, по теореме I.6.2 из [2] любой интегральный оператор в $L_2(\mu)$ почти компактен.

Теорема 2. *Условию $0 \in \sigma_c(T^*)$ удовлетворяет матричный линейный непрерывный оператор $T = (\tau_{ij})_1^m : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$, обладающий свойством: существует не содержащее атомов меры μ множество e, $0 < \mu e < \infty$, такое, что операторы $P_e \tau_{1j}$, $j = 1, \dots, m$, компактны по мере; здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2(\mu)$.*

Доказательство. По теореме 3.7 из [1] все операторы $P_e\tau_{1j}$ компактны как операторы, действующие из $L_2(\mu)$ в $L_1(\mu)$. Следовательно, все операторы $\tau_{1j}^* P_e : L_\infty(\mu) \mapsto L_2(\mu)$ компактны. Пусть $\{a_n\}$ — равномерно ограниченная ортонормированная последовательность функций из $L_2(\mu)$ с носителями в e. В качестве $\{a_n\}$ можно выбрать систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$ (определение функций $r_{n,e}$ см., например, [2, гл. 1, § 1]). Рассмотрим ортонормированную последовательность вектор-функций $d_n = h_0 a_n$, $n = 1, 2 \dots$, где h_0 — вектор-столбец, первая компонента которого равна 1, а остальные $m-1$ компонент равны 0. Имеем

$$\|T^* d_n\|_{m,\mu}^2 = \|T^*(h_0 P_e a_n)\|_{m,\mu}^2 = \sum_{j=1}^{m} \|\tau_{1j}^* P_e a_n\|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$.

Назовем *e-срезкой оператора* $\tau : L_2(\mu) \mapsto L_2(\mu)$ оператор $P_e\tau$.

Следствие 1. *Условию $0 \in \sigma_c(T^*)$ удовлетворяет матричный линейный непрерывный оператор $T = (\tau_{ij})_1^m$ в $L_{2,m}(\mu)$, у которого e-срезки операторов τ_{1j}, $j = 1, \dots, m$, компактны по мере или почти компактны, или являются интегральными операторами.*

Следствие 2. *Теорема 1 охватывает системы линейных интегральных уравнений 2-го рода в $L_{2,m}(\mu)$ с произвольными матричными интегральными операторами.*

Теорема 3. *Система (3) эквивалентна линейному интегральному уравнению 2-го рода в $L_2(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} q_n(t),$$

где $\{q_n(t)\}$ — *ограниченная последовательность в* $L_2(\mu)$.

Доказательство. Запишем систему (3) в виде

$$(1-\lambda\Gamma)y - \lambda K y = g \tag{7}$$

и в теореме 1 выберем $\varepsilon < \frac{1}{|\lambda|}$. Тогда

$$|\lambda|\|\Gamma\| \le |\lambda| N(\Gamma) < |\lambda|\varepsilon < 1,$$

где $N(\Gamma)$ — абсолютная норма оператора Γ и $\|\Gamma\|$ — его норма. Следовательно, оператор $G_\lambda = 1-\lambda\Gamma$ имеет обратный G_λ^{-1}. Сделав в (7) замену $z=(1-\lambda\Gamma)y$, получим эквивалентную систему интегральных уравнений

$$z - \lambda K G_\lambda^{-1} z = g. \tag{8}$$

В силу (6) и дизъюнктности множеств e_n матричное ядро системы (8) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} M_n(t),$$

где для каждого n и почти всех $t \in X$ первая строка $(m\times m)$-матрицы $M_n(t)$ такова:

$$\{\overline{u_{n,1}(t)}, \dots, \overline{u_{n,m}(t)}\} =: \overline{u_n(t)},$$

здесь $u_n(t) = \left(G_\lambda^{-1}\right)^* v_n$, $v_n = UT^* z_n$. Остальные строки матрицы $M_n(t)$ равны 0. Имеем

$$z_1(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \sum_{j=1}^{m} z_j(t)\overline{u_{n,j}(t)}\, d\mu(t) = g_1(s), \quad z_2 = g_2, \quad z_m = g_m,$$

где g_i — i-я компонента вектор-функции g, z_i — i-я компонента решения z. Отсюда

$$z_1(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \left[z_1(t)\overline{u_{n,1}(t)} + \sum_{j=2}^{m} g_j(t)\overline{u_{n,j}(t)} \right] d\mu(t) = g_1(s).$$

Положив $q_n = \overline{u_{n,1}}$, получим

$$z_1(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} q_n(t) z_1(t)\, d\mu(t) = g_1(s) + g_0(s), \tag{9}$$

где

$$g_0(s) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \langle \tilde g, u_n\rangle, \quad \tilde g = (0, g_2, \dots, g_m).$$

Пусть $\beta_n := \langle \tilde g, u_n \rangle$. Тогда

$$\beta_n = \left\langle \tilde g, \left(G_\lambda^{-1}\right)^* v_n \right\rangle = \left\langle G_\lambda^{-1}\tilde g, v_n \right\rangle = \left\langle G_\lambda^{-1}\tilde g, UT^* z_n \right\rangle = \left\langle TU^{-1}G_\lambda^{-1}\tilde g, z_n \right\rangle.$$

Так как $\{z_n\}$ — ортонормированная система, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty$. Поэтому $g_0 \in L_2(\mu)$ и правая часть g_1+g_0 в уравнении (9) принадлежит $L_2(\mu)$.

Замечание. К интегральному уравнению (9) с квазивырожденным карлемановским ядром применимы приближенные методы решения, предложенные в [3, гл. 3, § 7, п. 2^0].

Лемма о правом умножении. *Пусть $C : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$ — матричный карлемановский интегральный оператор, $B : L_{2,m}(\mu) \mapsto L_{2,m}(\mu)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда CB — матричный карлемановский интегральный оператор.*

Эта лемма доказана в [3, гл. 3, § 7, п. 2^0] и обобщает на случай $m > 1$ лемму о правом умножении из [4].

По теореме 1 система функциональных уравнений (2) эквивалентна системе линейных интегральных уравнений 2-го рода

$$y - \lambda C y = g, \tag{10}$$

где C — матричный карлемановский интегральный оператор. Пусть $1/\lambda$ не принадлежит спектру оператора C. Тогда по лемме о правом умножении резольвента Фредгольма $F_{1/\lambda} = -1/\lambda C\bigl(C - \frac{1}{\lambda} I\bigr)^{-1}$ является матричным карлемановским интегральным оператором. Его ядро $F(s,t;\lambda)$ назовем *разрешающим ядром.* Из определения $F(s,t;\lambda)$ непосредственно следует, что система (10) при любой правой части $g \in L_{2,m}(\mu)$ имеет, и притом единственное, решение $y \in L_{2,m}(\mu)$ и это решение представляется в виде

$$y(s) = g(s) + \lambda \int\limits_X F(s,t;\lambda) g(t)\, d\mu(t).$$

Карлемановость оператора существенна для интегральности его резольвенты Фредгольма: в [5; 6, § 5, теорема 8] построен некарлемановский интегральный оператор в $L_2(\mu)$, для которого резольвента Фредгольма F_ζ не является интегральным оператором при любом $\zeta \neq 0$. Отметим еще, что спектральное представление разрешающего ядра для оператора C при условии самосопряженности C получено в [3, гл. 3, § 7, п. 2^0, теорема 7]. В общем случае в большой статье И. М. Новицкого [7] разработаны приближенные методы нахождения разрешающего ядра.

Замечания. 1. Результаты статьи справедливы и когда $L_{2,m}(\mu)$ — вещественное пространство.

2. Условия на меру μ в теореме 1 выполняются в важном случае, когда X — произвольное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства или вещественной оси, μ — мера Лебега.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
2. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
3. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.
4. *Misra B., Speiser D., Targonski G.* Integral operators in the theory of scattering // Helv. Phys. Acta. 1963. V. 36, N 7. P. 963–980.
5. *Коротков В. Б.* О неинтегральности резольвент Фредгольма некоторых интегральных операторов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 905–907.
6. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. Владивосток: Колорит, 2000.

7. *Novitskii I. M.* Some properties of the resolvent kernels for integral equations with bi-Carleman kernels // Дальневост. мат. журн. 2016. Т. 16, № 2. С. 186–208.

Статья поступила 15 ноября 2016 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090