Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 510.64+510.65+510.66

ИНТРАНЗИТИВНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ МНОГОАГЕНТНЫЕ ЛОГИКИ, ИНФОРМАЦИЯ И ЗНАНИЕ, РАЗРЕШИМОСТЬ

В. В. Рыбаков

Аннотация. Многоагентные и временные логики образуют активную область в науках об информации и искусственном интеллекте. Преимущественно внимание уделялось временным логикам с транзитивным отношением времени. Но это не выглядит как очень надежное допущение, так как нетранзитивность отношения передачи информации легко может быть продемонстрирована примерами. В данной статье вводятся и изучаются многоагентные временные логики, базирующиеся на нетранзитивном времени. Другое новшество состоит в рассмотрении течения времени с пробелами с неполной информацией. Найдены разрешающие алгоритмы для технически наиболее важной части, состоящей в решении проблем выполнимости и разрешимости. Приводится список интересных открытых проблем.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.514

Ключевые слова: временная логика, вычислимость, информация, многоагентные логики, выполнимость разрешимость, не транзитивное время.

1. Введение

Информация и знание — ключевые понятия в информационных и компьютерных науках, объединенных термином «анализ знания» (на который часто ссылаются как на computational intelligence), образует солидную область информатики, в которой привлекаются инструменты математической логики и символических вычислений. Наиболее технические аспекты относятся к нахождению эффективных алгоритмов для обработки информации с целью извлечения скрытой информации из известных данных.

Моделирование знания посредством многоагентных логик, базирующихся на специальных моделях Крипке — Хинтикка, впервые, по-видимому, систематически исследуется в [1]. Существенная особенность этого подхода — использование многоагентных логик с логическими операциями K_i, интерпретируемыми как $S5$-модальности. Еще одна особенность монографии [1] — использование временной логики, что легко согласуется с наблюдением о накоплении знаний с течением времени.

В свою очередь, временная логика является популярной областью в информатике и искусственном интеллекте (см. [2–4]). Линейная временная логика (с Until и Next) введена в [5, 6]; эффективные методы для вычисления выполнимости в $\mathcal{LTL}$, базирующиеся на теории автоматов, были предложены в [7, 8]; $\mathcal{LTL}$ нашла эффективные применения в анализе протоколов вычислений и проверке непротиворечивости, совместимости и других концепциях информатики.

Начиная с общего мультидисциплинарного подхода, знание часто анализировалось через многоагентную технику и различные качества агентов, такие как автономность и взаимодействие, эффекты кооперации и пр. [9–13]. Для математического моделирования накопления информации и знания весьма полезными стали инструменты модальной и других неклассических логик. Этот подход (возможно, впервые) рассматривался в [14]. С тех пор неклассические логики многократно демонстрировали свою эффективность (см. [15–18]). В частности, автором ранее изучались многоагентные логики с операцией расстояния [19]; модели для описания концепции Chance Discovery в многоагентном окружении рассматривались в [20, 21]; логика, моделирующая неопределенность через многоагентный подход, изучалась в [22]; представление взаимодействия агентов (как дуальная к common knowledge-концепции, развитой в [22]) исследовано в [23–25].

Целью данной статьи является развитие математических методов исследования неполных информации и знаний (например, с пробелами во времени — с фрагментами забытого прошлого) на основе временной логики. Основой подхода являются модели для знаний агентов с линейным временем, транзитивным на тех участках, которые агенты могут помнить. Течение времени может выглядеть неполным, агенты могут не помнить некоторые интервалы времени, и в целом течение времени может быть нетранзитивным. Эти модели обобщают реляционные модели Крипке — Хинтикка (которые являлись эффективным инструментом изучения модальных, временных и других неклассических логик на протяжении долгого времени). Для исследования свойств и утверждений об их истинности мы используем логический язык в комбинации с языком временной логики. Выбранные правила для вычисления истинности формул отражают возможность пробелов во времени в прошлом. Мы вводим логику, базирующуюся на таких моделях, как множество всех формул, истинных на рассматриваемых моделях, и исследуем проблемы выполнимости и разрешимости. Решение этих проблем найдено через специальные алгоритмы для конечных модифицированных моделей. В заключительной части статьи рассматриваем новую версию нашей логики с допущением неограниченного временного отношения и ее разрешимость.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 описана семантика (модели) и введены язык логики и сама MA^{Int}_{Lin}-мультиагентная линейная интранзитивная логика. Новизна подхода состоит в том, что на время не накладывается условие транзитивности. Этот подход обосновывается несколькими модельными примерами, иллюстрирующими, как в этом случае использовать подход к неполной информации.

В разд. 3 развивается математическая техника реляционных многоагентных моделей. Используются трансформация формул в правила и построение редуцированных форм таких правил (это очень упрощает доказательства, позволяя избегать формул с временной глубиной подформул больше единицы). Основной результат здесь — теорема 14, в которой утверждается, что проблема выполнимости для MA^{Int}_{Lin} разрешима (и, следовательно, сама логика MA^{Int}_{Lin} разрешима). В разд. 4 рассматривается другая версия логики MA^{Int}_{Lin}, в которой есть агенты, помнящие все прошлое. С использованием техники из разд. 3, 4 показано, что эта логика также разрешима (теорема 24). В заключение, в разд. 5, приведен список открытых проблем по этой тематике.

2. Мультиагентная линейная временная логика, базирующаяся на нетранзитивном времени

Наша цель в этом разделе — ввести адекватную технику для вычисления истинностных значений формул, кодирующих информацию и знания в многоагентной среде. Будем использовать логический язык, включающий временные логические операции. Формулы этого языка построены из потенциально бесконечного множества пропозициональных букв (переменных) Pr, булевых логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ и множества временных операций: унарного отношения N (next) и множества бинарных временных операций U_j (until для агента j), где $j \in Ag$ (Ag — множество всех агентов в нашем рассмотрении). Таким образом этот язык расширяет язык стандартной линейной временной логики с помощью нового конечного числа логических операций типа until. Правила образования формул стандартны, т. е. p есть формула для любого $p \in Pr$ и если φ, ψ — формулы, то $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi U_j \psi$ и $N\varphi$ также формулы.

Проиллюстрируем использование этого языка для кодирования утверждений об информации чуть позже, а сначала введем семантические модели нашей логики.

Определение 1. *Мультиагентным линейным нетранзитивным фреймом* называют модель

$$\mathcal{ALF}_{In} = \Big\langle W_{\mathcal{ALF}_{In}}, \Big(\bigcup_{\xi \in In, j \in [1,k]} \langle R_{\xi,j} \rangle \Big), Nxt, \Big\rangle$$

со следующими свойствами.

• $W_{\mathcal{ALF}_{In}} := \bigcup_{\xi \in In \subset N} It[\xi] = N$, где N — множество натуральных чисел; $(\forall \xi \in In)\ d(\xi) \in In, d(\xi) > \xi$ и $It[\xi]$ — замкнутый интервал всех натуральных чисел, расположенных между ξ и $d(\xi)$ (в частности, содержащий ξ и $d(\xi)$), т. е. $It[\xi] = [\xi, d(\xi)]$. Интервалы $It[\xi]$ могут иметь непустое пересечение только на их границах, т. е. $(\forall \xi_1, \xi_2 \in In)\ \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow d(\xi_1) \leq \xi_2$.

• $[\xi, d(\xi)] \cap [d(\xi), d(d(\xi)] = \{d(\xi)\}$.

• Любое $R_{\xi,j}$ является ограничением обычного линейного порядка $(\leq)$ в интервале $It[\xi]$ на некоторое подмножество $\mathrm{Dom}_{\xi,j} \subseteq It[\xi]$.

• $(\forall j \in [1,k])\ R_j := \bigcup_{\xi \in In} R_{\xi,j}$ (заметим что любое R_j нетранзитивно, но линейно).

• Nxt есть стандартное отношение *next* на N: $[n\ Nxt\ m]$, если и только если $m = n + 1$; пишем $Nxt(a) = b$ для обозначения, что $b = a + 1$.

Заметим, что $\big(\bigcup_{\xi \in In, j \in [1,k]} \langle R_{\xi,j} \rangle \big)$ рассматриваем не как бинарное отношение, а как бесконечное счетное множество отношений $R_{\xi,j}$; $d(\xi) \in In$ для любого ξ — мера интранзитивности, интерпретируем $[\xi, d(\xi)]$ как максимальный интервал времени, который агент может помнить в точке ξ.

Используем обозначение $|\mathcal{ALF}_{In}|$ для базисного множества $W_{\mathcal{ALF}_{In}}$ фрейма $\mathcal{ALF}_{In}$ и для краткости будем писать $a \in \mathcal{ALF}_{In}$ для обозначения того, что $a \in |\mathcal{ALF}_{In}|$.

Например, можно рассматривать отношения $R_{\xi,j}$ и $\leq$ направленными в прошлое, и $a \leq b$ тогда означает, что b было раньше, чем a, т. е. b — прошлое для a. Также можно рассматривать случаи, когда память агентов может иметь пробелы, т. е. агенты помнят прошлое, но не непрерывно. Например, для агента 1 и точки 3 из $[3, d(3)]$, где $d(3) = 12$, мы можем считать, что $R_{3,1}$ есть $\leq$ на $[3,4,5] \cup [7,9] \cup [11,12]$, т. е. агент не помнит точки 6 и 10.

Этот подход применим и к случаю, когда размер (длина) памяти агентов может быть различным (они могут, например, иметь различный объем баз для хранения информации о прошлом). Это моделирует ситуацию и в том случае, когда рассматриваются некоторые пробелы в отношениях $R_{\xi,j}$ на $[\xi, d(\xi)]$ непосредственно перед $d(\xi)$. В частности, допустимо, чтобы все агенты имели пробелы в памяти перед $d(\xi)$. Это означает, что потенциально мера интранзитивности для всех агентов может быть большой, но все же все агенты не достигают предела — точки $d(\xi)$.

Как обычно, для любой временной логики для каждого $\mathcal{ALF}_{In}$ можно определить модель на нем введением некоторого означивания V на $\mathcal{ALF}_{In}$ для некоторого множества пропозициональных букв p: $V(p) \subseteq W_{\mathcal{ALF}_{In}}$, и расширить его на все формулы следующим образом.

Определение 2. Для любого $a \in W_{\mathcal{ALF}_{In}}$ и $j \in Ag$
$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V p \Leftrightarrow p \in V(p)$;
$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \neg\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{ALF}_{In}, a) \nVdash_V \varphi$;
$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow ((\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \varphi) \wedge ((\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \psi)$;
$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow ((\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \varphi) \vee ((\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \psi)$;
$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow ((\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \psi) \vee ((\mathcal{ALF}_{In}, a) \nVdash_V \varphi)$;
для формул $\varphi U_j \psi$ истинность определяем так:
$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V (\varphi U_j \psi) \Leftrightarrow$
$\exists\xi(a \in It[\xi]) \& \exists b[(aR_{\xi,j}b) \wedge ((\mathcal{ALF}_{In}, b) \Vdash_V \psi) \wedge$
$\forall c[(c \in \mathrm{Dom}_{\xi,j} \& aR_{\xi,j}c \& c < b) \Rightarrow (\mathcal{ALF}_{In}, c) \Vdash_V \varphi]]$;
$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V N\varphi \Leftrightarrow [(a\ Nxt\ b) \Rightarrow (\mathcal{ALF}_{In}, b) \Vdash_V \varphi]$.
($(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \varphi$ читается: *формула φ истинна в состоянии (точке) a при означивании V.*)

Определение 3. *Логика MA^{Int}_{Lin}* есть множество всех формул, истинных на любой модели на любом фрейме $\mathcal{ALF}_{In}$.

Ниже иллюстрируем наше предположение, почему время может быть нетранзитивным.

Пример (i). Точка зрения индивидуального наблюдателя. Если интерпретируем время в прошлом как последовательность событий, которые индивидуально помним, поток времени воспринимается как последовательность событий, которые наблюдатели помнят и передают друг другу, то интерпретация ясна. Мы не обязательно помним и не знаем то, что наши предшественники помнили и знали.

Пример (ii). Точка зрения, основанная на процессах вычисления. Проверка протоколов вычислений ограничена временем и доступными ресурсами и имеет неоднородную длину (хотя в любой точке проверки она может ссылаться на старые протоколы, содержащиеся в базах данных). Поэтому если мы интерпретируем наши модели как модели проверки корректности вычислений, то объем доступных точек проверки конечен, но не все они могут быть доступны для проверки в текущий момент времени.

Пример (iii). Точка зрения агентов — администраторов веб-сетей. Мы можем рассматривать состояния модели как временные точки проверки администраторами поведения сетевой активности в прошлом. Любой администратор имеет некоторое количество состояний, проверенных в прошлом, но только в сфере его собственной ответственности (из соображений сетевой безопасности или иных причин). Поэтому отношение достижимости точек проверки снова нетранзитивно. Администратор (a1) может инспектировать некоторое состояние, где администратор (a2) ответствен за это состояние и (a2) снова имеет доступное множество точек проверки. Но в целом (a1) не может проинспектировать все состояния, за которые ответственен (a2).

Пример (iv). Точка зрения администратора и пользователя. Если рассматриваем состояния модели как содержание веб-страниц, доступных пользователю, он может переходить к другим страницам, например, используя закладки в гипертекстах. Но этот поиск различен для пользователя и администратора, ибо администратор и пользователь обладают разными правами доступа и паролями и этот поиск предстает как нетранзитивное отношение достижимости.

Пример (v). Точка зрения на прошлое как источник накопленных знаний. В представлении индивидуума только сам ограниченный интервал времени в прошлом достижим ему для изучения. Время в прошлом выглядит для нас линейным и имеет ограниченную память для запоминания информации и событий. Там, в прошлом, в самой дальней запомненной точке наблюдатели снова имеют ограниченные интервалы запомненного времени с накопленной там другими наблюдателями информацией, и т. д. Поэтому время в прошлом выглядит нетранзитивным, если рассматриваем его с точки зрения информации, накопленной в текущий момент.

Теперь прокомментируем, почему мы рассматриваем неполную информацию: знания агентов с информацией, забытой в прошлом.

(i) Рассмотрим знания агентов как информацию из протоколов, накопленных в параллельных вычислительных процессах. Тогда некоторая информация может быть накоплена на шаге i в одном процессе, в то время как другие процессы не получили этой информации. Это может произойти по причине сбоя оборудования или различия в использованных вычислительных алгоритмах. Таким образом, в интерпретации этой ситуации наше $R_{\xi,j}$ может не перекрывать все временные интервалы $[\xi, d(\xi)]$, их области $D_{\xi,j}$ могут быть меньше, чем во всем $[\xi, d(\xi)]$.

(ii) Аналогичный комментарий может относиться и к человеческой памяти, и к записям различных авторов об исторических событиях. Некоторые помнят особенные исторические события, а другие нет. Возможно, Темные Века в греческой истории могут быть интерпретированы таким образом: по какой-то причине большинство историков не помнят событий тех дней.

(iii) Наконец, рассмотрим некоторое множество администраторов, анализирующих поведение веб-сети. События их действий и шагов могут располагаться в той же общей цепи шагов. Но сами их действия могут быть различны, потому что некоторые администраторы могут не иметь паролей доступа к протоколам, доступным другим администраторам, поэтому такие протоколы будут недоступны для их анализа.

В дальнейшем можно рассматривать любое состояние $a \in N$ как некоторую временную точку и любой интервал $[\xi, d(\xi)]$ как интервал, в принципе доступный для агентов, ответственных за проверку во временных точках $a \in [\xi, d(\xi)]$. Время ($\leq, R_{\xi,j}$ в нашей формализации) может быть направлено как в прошлое, так и в будущее в зависимости от желательной структуры модели.

Прокомментируем выбор наших моделей в более формальном виде.

(1) Интерпретация $R_{\xi,j}$ как агентных отношений достижимости. Мы рассматриваем отношения $R_{\xi,j}$ на $[\xi, d(\xi)]$ с областями определения, которые не обязательно включают все точки из $[\xi, d(\xi)]$. Это имеет целью отразить ситуацию, когда некоторые фрагменты прошлого могут быть забыты, т. е. когда информация о прошлом неполна.

(2) Все интервалы времени $[\xi, d(\xi)]$, $\xi \in In$, конечны (имеется в виду отражение ограниченного объема информации о прошлом). Но связи такие, как из $[\xi, d(\xi)]$ в $[d(\xi), d(d(\xi))]$ через $Nxt(d(\xi)) = d(\xi) + 1$, и все $R_{d(\xi),j}$ присутствуют. По интранзитивным отношениям в принципе можем идти в прошлое и анализировать накопленную информацию. В частности, как результат получаем, что все $R_{\xi,j}$ могут быть линейными, но интранзитивными.

(3) Операции U_j также определены нестандартно для отражения присутствия забываемого прошлого, пробелов в памяти, а именно

$$(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V (\varphi U_j \psi) \Leftrightarrow \exists \xi (a \in It[\xi]) \& \exists b [(a R_{\xi,j} b) \wedge ((\mathcal{ALF}_{In}, b) \Vdash_V \psi)$$
$$\wedge \forall c [(c \in \mathrm{Dom}_{\xi,j} \ \& \ a R_{\xi,j} c \ \& \ c < b) \ \Rightarrow (\mathcal{ALF}_{In}, c) \Vdash_V \varphi]].$$

Согласно этому правилу существует состояние b в прошлом, предшествующее a, которое агент j помнит, где формула ψ истинна, а во всех состояниях после b, но до a, *которые агент j еще помнит*, формула φ истинна.

(4) Присутствие различных агентных отношений достижимости $R_{\xi,j}$ не позволяет просто игнорировать состояния, которые вне области некоторого отдельного отношения $R_{\xi,j}$, но внутри $[\xi, d(\xi)]$, потому что эти состояния могут быть внутри областей, доступных для некоторых других отношений R_{ξ,j_1}. Поэтому $\varphi\ U_1\ \psi$ может быть истинно в некотором состоянии a, но $\varphi\ U_2\ \psi$ может быть ложно в a.

Ниже в примерах будем использовать модальные логические операции $\Diamond_j$ и $\Box_j$ (где j — индекс агента, т. е. $j \in [1, k]$), определяемые через временные операции обычным образом, а именно $\Diamond_j \varphi := \top U_j \varphi$, $\Box_j := \neg \Diamond_j \neg \varphi$.

Примеры. (i) Формула $\neg \Diamond_1 \varphi \wedge N\varphi$ представляет невозможную для обычной линейной темпоральной логики ситуацию: формула φ истинна в следующей временной точке, но невозможна с точки зрения временной достижимости. В нашей агентной интерпретации получаем: φ истинна вчера, но агент 1 не помнит «вчера».

(ii) Следующее необычное свойство: $\neg \Diamond_1 \varphi \wedge N \Box_1 \varphi$. Эта формула сообщает, что вчера и всегда прежде этого формула φ была истинна во всех точках, которые агент 1 помнит. Но сегодня агент 1 не помнит «вчера» и то, что было прежде (т. е. существует пробел в его памяти, начиная со вчера).

(iii) Формула $\Box_1 \varphi \wedge \Diamond_1 [N(\neg \varphi \wedge \Box_1 \varphi)]$ описывает следующее состояние дел. Начиная с сегодня и до последнего запомненного состояния φ была истинна с точки зрения агента a_1 во всех состояниях, которые он помнит (знает). Но в последнем запомненном состоянии формула φ была ложна на его предшественнике, хотя и истинна на всех его предшественниках, которых он помнит.

(iv) Формула $(\varphi U_1 \psi) \wedge (\neg \psi) \wedge \neg \Diamond_1 \varphi$ означает, что не сегодня, но в прошлом ψ было истинно, однако агент a_1 не помнит этого, в частности, не помнит ни одного состояния до того, как первый раз ψ было истинно.

(v) Формула $\varphi \wedge (\varphi \to N\varphi) \wedge \Box_1 (\varphi \to N\varphi) \wedge \neg NN\varphi$ означает, что сегодня и вчера φ было истинно, но агент a_1 не помнит этого.

(vi) Формула $\Box_1 \varphi \wedge \varphi \wedge \neg \Box_1 \Box_1 \varphi$ означает, что время нетранзитивно с точки зрения агента (a1). Но в действительности эта формула сообщает большее.

Согласно ей агент (a1) может достигнуть последнее запомненное состояние и, только будучи в этом состоянии, (a1) может видеть еще более позднее состояние, где φ ложна.

(vii) Формула $\big[\bigvee_{X\subseteq Ag,\|X\|\le\|Ag\|/2}\big[\bigwedge_{j\in X}(\varphi U_j\psi)\big]\big]\to\varphi U_1\psi$ означает, что агент (a1) легко следует мнению большинства других агентов из Ag: если как минимум половина агентов считает, что φ выполняется до того, как выполнится ψ, то (a1) тоже верит в это.

3. Алгоритмы разрешимости

Напомним, что для любой логики L проблема выполнимости состоит в определении по любой данной формуле φ, выполнима ли она в L, т. е. существует ли модель, где φ истинна на каком-то состоянии (если существует алгоритм, отвечающий на этот вопрос для любой данной φ, то говорят, что *проблема выполнимости разрешима*). О некоторой логике L говорят, что она *разрешима*, если существует алгоритм, отвечающий на вопрос «для любой формулы φ выполняется ли $\varphi\in L$ (т. е. является ли φ теоремой логики L)?». Эти проблемы взаимосвязаны: φ выполнима в L, если и только если $\neg\varphi\notin L$; $\varphi\in L$, если и только если $\neg\varphi$ невыполнима; поэтому разрешимость влечет разрешимость проблемы выполнимости, и наоборот.

Определение 4. Формула φ *опровергается на* $a\in W_{\mathcal{ALF}_{In}}$ в модели, базируемой на некотором $\mathcal{ALF}_{In}$, ее означиванием V, если $(\mathcal{ALF}_{In},a)\nVdash_V\varphi$.

Для любой модели, базируемой на некотором фрейме

$$\mathcal{ALF}_{In}=\Big\langle W_{\mathcal{ALF}_{In}},\Big(\bigcup_{\xi\in In,j\in[1,k]}\langle R_{\xi,j}\rangle\Big),Nxt,\Big\rangle$$

и натуральном числе $m\ge 0$, модель $\mathcal{ALF}_{In}(m)$, полученная из $\mathcal{ALF}_{In}$, выглядит так: она базируется на множестве

$$|\mathcal{ALF}_{In}|\setminus\Big[\bigcup\{It[\xi]\mid\xi\in In,\xi=d^t(0),\ t>m+2\}\cup(d^{m+2}(0),d^{m+3}(0))\Big]$$

и на ней переопределяем Nxt, полагая $Nxt(d^{m+2}(0))=d^{m+2}(0)$, что для любого отношения достижимости $R_{d^{m+2}(0),j}$ оно стандартное $\le$ на $[d^{m+2}(0),d^{m+2}(0)]$ и что все пропозициональные переменные истинны на $d^{m+2}(0)$. В частности, $d^{m+2}(0)$ является финальным состоянием нашего фрейма.

Определение индуктивных шагов для вычисления истинностных значений то же самое, что и ранее. Для любой формулы α через $td(\alpha)$ обозначаем темпоральную степень формулы α.

Лемма 5. *Пусть α — некоторая формула и $td(\alpha)=g$. Если α опровергается на фрейме $\mathcal{ALF}_{In}=\langle W_{\mathcal{ALF}_{In}},(\bigcup_{\xi\in In,j\in[1,k]}\langle R_{\xi,j}\rangle),Nxt,\rangle$ на состоянии 0, то она может быть опровергнута на 0 в некоторой модели, базируемой на некотором фрейме $\mathcal{ALF}_{In}(g+1)$.*

Доказательство проводится довольно стандартной индукцией. Нужно вспомогательное утверждение: для любых $m\in N$ и для всех формул β

$$td(\beta)\le n\Rightarrow[\forall a\in[d^m(0),d^{m+1}(0)]$$
$$\subseteq\mathcal{ALF}_{In}(\mathcal{ALF}_{In},a)\Vdash_V\beta\ \Leftrightarrow\ (\mathcal{ALF}_{In}(m+n+r)\Vdash\beta)\quad\forall r\ge 1.\quad(1)$$

Действительно, для $n = 0$ это очевидно. Пусть (1) выполняется для всех $n \leq n_1$ и имеем формулу β временной степени $n_1 + 1$. Тогда β построена из формул β_i с временной степенью не больше чем n_1 и некоторых формул γ_i с временной степенью $n_1 + 1$ посредством булевых логических операций.

Для формул β_i, применяя(1) для интервала $[d^m(0), d^{m+1}(0)]$, получаем

$$\forall a \in [d^m(0), d^{m+1}(0)]\ (\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \beta_i \Leftrightarrow (\mathcal{ALF}_{In}(m + n_1 + r), a) \Vdash \beta_i\ \forall r \geq 1. \tag{2}$$

Для формул γ_i можем положить $\gamma_i = \delta_{i,1} U_j \delta_{i,2}$ или $\gamma_i = N\alpha_i$. Если $\gamma_i = \delta_{i,1} U_j \delta_{i,2}$, то по (2)

$$\forall a \in [d^m(0), d^{m+1}(0)]\ (\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \delta_{i,k} \Leftrightarrow (\mathcal{ALF}_{In}(m + n_1 + r), a) \Vdash \delta_{i,k}\ \forall r \geq 1, \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \forall a \in [d^m(0), d^{m+1}(0)]\ &(\mathcal{ALF}_{In}, a) \Vdash_V \delta_{i,1} U_j \delta_{i,2} \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{ALF}_{In}(m + n_1 + r), a) \Vdash \delta_{i,1} U_j \delta_{i,2}\ \forall r \geq 1. \end{aligned}$$

Пусть $\gamma_i = N\alpha_i$. Если $a < d^{m+1}(0)$, то применяем рассуждение, как для $\gamma_i = \delta_{i,1} U_j \delta_{i,2}$ выше. Если $a = d^{m+1}(0)$, то вначале применяем (2) к интервалу $[d^{m+1}(0), d^{m+2}(0)]$ и получаем

$$\forall b \in [d^{m+1}(0), d^{m+2}(0)]\ (\mathcal{ALF}_{In}, b) \Vdash_V \alpha_i \Leftrightarrow (\mathcal{ALF}_{In}(m + n_1 + r), b) \Vdash \alpha_i\ \forall r \geq 1.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{ALF}_{In}, d^{m+1}(0)) \Vdash_V N\alpha_i \ \Leftrightarrow\ (\mathcal{ALF}_{In}(m + n_1 + r), d^{m+1}(0) \Vdash_V N\alpha_i).$$

Таким образом, (1) выполняется для $n = n_1 + 1$, значит, по индукции верно для любых n. Это завершает доказательство леммы, если возьмем $m = 0$. $\square$

Лемма 6. *Если формула α опровергается в модели на фрейме $\mathcal{ALF}_{In}(m)$ на состоянии 0, то она опровергается в некоторой модели, базирующейся на некотором стандартном фрейме $\mathcal{ALF}_{In}$.*

Доказательство вполне очевидно: достаточно развернуть фрейм $\mathcal{ALF}_{In}(m)$ в некоторый бесконечный. Действительно, рассмотрим финальный интервал $[d^{m+1}(0)), d^{m+2}(0)]$ фрейма $\mathcal{ALF}_{In}(m)$ и присоединим к $\mathcal{ALF}_{In}(m)$ начиная с $[d^{m+2}(0), d^{m+2}(0)]$ бесконечную последовательность интервалов $[a_i, b_i]$, $i \in N$, с $Nxt(a_i) = b_i$, $Nxt(b_i) = a_{i+1}$, предполагая, что означивание всех пропозициональных букв на всех новых состояниях будет ровно тем же, что было на $d^{m+2}(0)$. Легко видеть, что такая модификация не влияет на истинность формул в интервале $[0, d^{m+2}(0)]$. $\square$

Поэтому по леммам 5 и 6, имея в виду построение алгоритма для разрешимости, можем рассматривать только модели, базирующиеся на фреймах типа $\mathcal{ALF}_{In}(m)$.

Для нашей логики MA^{Int}_{Lin} обычная стандартная техника (как, например, в [24, 25]) не может быть напрямую применена, потому что отношения временной достижимости нетранзитивны. Например, интранзитивность затрудняет преобразование формул в более однородные и обозримые. Техника сведения формул к правилам (которую мы уже много раз использовали в других целях (см. [25–27]) может быть полезна и здесь. Этот подход существенно упрощает доказательства, потому что тогда рассматриваются очень простые и однородно устроенные формулы без вложенных временных логических операций. Напомним эту технику. Правило — это выражение

$$\mathbf{r} := \frac{\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_l(x_1,\dots,x_n)}{\psi(x_1,\dots,x_n)},$$

где $\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_l(x_1,\dots,x_n)$ и $\psi(x_1,\dots,x_n)$ — некоторые формулы, построенные из букв (переменных) $x_1,\dots,x_n$.

Понимание правила $\mathbf{r}$ таково: $\psi(x_1,\dots,x_n)$ (которая называется *заключением*) следует (логически следует) из предположений $\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,$ $\varphi_l(x_1,\dots,x_n)$. Истинность правила на модели определяется формально следующим образом.

Определение 7. Правило $\mathbf{r}$ *истинно на модели* $\mathcal{M}$, если

$$\Big[\forall a\ \Big((\mathcal{M},a)\Vdash_V \bigwedge_{1\le i\le l}\varphi_i\Big)\Big] \Rightarrow \forall a\ ((\mathcal{M},a)\Vdash_V \psi),$$

т. е. как только все посылки правила истинны на всех состояниях модели, то же самое верно и для его заключения. Если это не так, будем говорить, что правило $\mathbf{r}$ *опровергнуто в* $\mathcal{M}$, или *опровергнуто в* $\mathcal{M}$ *означиванием* V, и писать $\mathcal{M}\nVdash_V \mathbf{r}$. Правило $\mathbf{r}$ истинно на фрейме $\mathcal{F}$ (обозначение: $\mathcal{F}\Vdash\ \mathbf{r}$), если оно истинно на любой модели, базирующейся на $\mathcal{F}$.

Любая формула φ может быть трансформирована в правило $x\to x/\varphi$.

Лемма 8. *Любая формула φ является теоремой MA^{Int}_{Lin} (т. е. $\varphi\in MA^{Int}_{Lin}$), если и только если правило $(x\to x/\varphi)$ истинно на любом фрейме логики MA^{Int}_{Lin}. Формула φ выполнима на модели тогда и только тогда, когда правило $x\to x/\neg\varphi$ опровергается на этой модели.*

Доказательство очевидно.

Определение 9. Правило $\mathbf{r}$ *имеет редуцированную нормальную форму*, если $\mathbf{r}=\varepsilon/x_1$, где

$$\varepsilon := \bigvee_{1\le j\le v}\Big[\bigwedge_{1\le i\le n} x_i^{t(j,i,0)}\wedge \bigwedge_{1\le i\le n}(Nx_i)^{t(j,i,1)}\wedge \bigwedge_{p\in[1,k],1\le i_1,j_1\le n}(x_{i_1}U_p x_{j_1})^{t(j,i_1,j_1,p)}\Big],$$

$t(j,i,z),t(j,i_1,j_1,p)\in\{0,1\}$ и для любой формулы α выше $\alpha^0:=\alpha$, $\alpha^1:=\neg\alpha$.

Определение 10. Для любого правила $\mathbf{r}$ правило в редуцированной нормальной форме $\mathbf{r}_{nf}$ является *нормальной формой правила* $\mathbf{r}$, если для любого фрейма $\mathcal{ALF}_{In}$ нашей логики MA^{Int}_{Lin} выполняется следующее:

$$\mathcal{ALF}_{In}\Vdash\mathbf{r}\Leftrightarrow\mathcal{ALF}_{In}\Vdash\mathbf{r}_{nf}.$$

Теорема 11. *Существует алгоритм, вычисляющий в (single) экспоненциальное время нормальную форму $\mathbf{r}_{nf}$ любого данного правила $\mathbf{r}$.*

Доказательство сходного утверждения для различных логик было найдено нами давно (например, доказательство должно дословно повторять предложенное доказательство для самой линейной временной логики $\mathcal{LTL}$, см. лемму 5 в [28], или сходное доказательство в [26, 29]). $\square$

Согласно указанной последовательности шагов формула φ является теоремой логики MA^{Int}_{Lin} (т. е. $\varphi\in MA^{Int}_{Lin}$), если и только если правило $r:=p\to p/\varphi$ истинно во всех фреймах $\mathcal{ALF}_{In}$ (см. лемму 8), т. е. редуцированная форма $\mathbf{r}_{nf}$ истинна на всех фреймах $\mathcal{ALF}_{In}$ (см. теорему 11). Поэтому для решения проблемы выполнимости можем рассматривать только правила в редуцированной форме.

Лемма 12. *Если правило в редуцированной нормальной форме* $\mathbf{r}_{nf}$ *опровергается на модели, базирующейся на некотором фрейме* $\mathcal{ALF}_{In}(g)$, *то* $\mathbf{r}_{nf}$ *может быть опровергнуто на некотором таком фрейме, где*

$$\forall \xi \in In\ (d(\xi) - \xi \leq r(D) + 2),$$

$r(D)$ — *число дизъюнктов в* $\mathbf{r}_{nf}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{r}_{nf} = \varepsilon / x_1$, где $\varepsilon = \bigvee\limits_{1 \leq j \leq v} \theta_j$,

$$\theta_j = \Big[\bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i^{t(j,i,0)} \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq n} (Nx_i)^{t(j,i,1)} \wedge \bigwedge_{p\in[1,k], 1\leq i_1, j_1\leq n} (x_{i_1} U_p x_{j_1})^{t(j,i_1,j_1,p)} \Big],$$

пусть $\mathbf{r}_{nf}$ опровергнуто на некотором фрейме $\mathcal{ALF}_{In}(g)$ означиванием V.

По предположению об опровержении правила для любого a из базисного множества фрейма $\mathcal{ALF}_{In}(g)$ существует некоторый уникальный дизъюнкт θ_j из посылки правила $\mathbf{r}_{nf}$, истинный на a:

$$(\mathcal{ALF}_{In}(g), a) \Vdash_V \theta_j;$$

обозначим этот уникальный дизъюнкт через $\theta(a)$.

Рассмотрим $[\xi, d(\xi)]$ для $\xi \in In$. Если $d(\xi) = \xi + 1$, то ничего не предпринимаем. Иначе рассмотрим $Nxt(\xi)$ и наибольшее число $Nx_1(\xi)$ из $[\xi, d(\xi))$, строго большее $Nxt(\xi)$ (если такое существует), для которого $\theta(Nxt(\xi)) = \theta(Nx_1(\xi))$.

Прореживаем интервал $[\xi, d(\xi)]$ удалением всех чисел, расположенных строго между ξ и $Nx_1(\xi)$, и полагаем, что $Nxt(\xi) = Nx_1(\xi)$. Означивание на модели остается прежним. Обозначим полученный фрейм через $\mathcal{ALF}_{In}(r,g)$ и соответственно модель — через $\mathcal{MALF}_{In}(r,g)$.

Отношения временной достижимости $R_{\xi,j}$ для всех оставшихся состояний модели $\mathcal{MALF}_{In}(r,g)$ оставляем теми же, какими они были в исходной модели.

Лемма 13. *Для любого* $a \in [\xi, d(\xi)] \cap \mathcal{ALF}_{In}(r,g)$ *и любого* θ_δ

$$(\mathcal{ALF}_{In}(g), a) \Vdash_V \theta_\delta \Leftrightarrow (\mathcal{ALF}_{In}(r,g), a) \Vdash_V \theta_\delta. \tag{4}$$

Доказательство. Если $a \geq Nx_1(\xi)$, это очевидно, так как ничего не изменили выше $Nx_1(\xi)$. Если $a = \xi$, то совпадение истинности всех компонент из θ_j очевидны, кроме случая операций U_s.

Вначале допустим, что $(\mathcal{ALF}_{In}(g), \xi) \Vdash_V x_{i_1} U_s x_{i_2}$. Тогда существует $b \in \mathrm{Dom}_{\xi,s}$ такой, что

$$[(\xi R_{\xi,s} b) \wedge ((\mathcal{ALF}_{In}(g), b) \Vdash_V x_{i_2}) \ \&\ \forall c[(c \in \mathrm{Dom}_{\xi,s}\ \&\ \xi R_{\xi,s} c\ \&\ c < b) \\ \Rightarrow (\mathcal{ALF}_{In}(g), c) \Vdash_V x_{i_1}]].$$

Возьмем минимальный b с этими свойствами. Если $b = \xi$, то все ясно. Если $b > \xi$, то $b \geq Nxt(\xi)$, и если $b \geq Nx_1(\xi)$, то получаем

$$(\mathcal{ALF}_{In}(g), Nx_1(\xi)) \Vdash_V x_{i_1} U_s x_{i_2}$$

и соответственно $(\mathcal{ALF}_{In}(r,g), \xi) \Vdash_V x_{i_1} U_s x_{i_2}$.

Допустим, что $b < Nx_1(\xi)$ и $b > \xi$, т. е. $Nxt(\xi) \leq b < Nx_1(\xi)$. Тогда так как $\theta(Nxt(\xi)) = \theta(Nx_1(\xi))$, имеем

$$(\mathcal{ALF}_{In}(g), Nx_1(\xi)) \Vdash_V x_{i_1} U_s x_{i_2} \quad \text{и} \quad (\mathcal{ALF}_{In}(r,g), Nx_1(\xi)) \Vdash_V x_{i_1} U_s x_{i_2}.$$

Поскольку $(\mathcal{ALF}_{In}(g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$, заключаем, что если $\xi \in \mathrm{Dom}_{\xi,s}$, то $(\mathcal{ALF}_{In}(d),\xi) \Vdash_V x_{i_1}$ и, следовательно,

$$(\mathcal{ALF}_{In}(r,g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}.$$

Обратно, пусть $(\mathcal{ALF}_{In}(r,g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$. Тогда

$$\exists b \in |\mathcal{ALF}_{In}(r,g)|\ [(\xi R_{\xi,s} b) \wedge (\mathcal{ALF}_{In}(r,g),b) \Vdash_V x_{i_2}]$$
$$\&\forall c[(c \in \mathcal{ALF}_{In}(r,g) \cap \mathrm{Dom}_{\xi,s}\ \&\ \xi R_{\xi,s} c\ \&\ c < b)\ \Rightarrow (\mathcal{ALF}_{In}(r,g),c) \Vdash_V x_{i_1}].$$

Возьмем минимальный b с этим свойством. Если $b = \xi$, то все ясно. Иначе $b \geq Nx_1(\xi)$ и тем самым

$$(\mathcal{ALF}_{In}(r,g),Nx_1(\xi)) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2} \quad \text{и} \quad (\mathcal{ALF}_{In}(g),Nx_1(\xi)) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}.$$

Так как $\theta(Nxt(\xi)) = \theta(Nx_1(\xi))$, получаем

$$(\mathcal{ALF}_{In}(g),Nxt(\xi)) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}.$$

Если $\xi \notin \mathrm{Dom}_{\xi,s}$, то $(\mathcal{ALF}_{In}(g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$.

Если $\xi \in \mathrm{Dom}_{\xi,s}$, то $(\mathcal{ALF}_{In}(r,g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$ влечет

$$(\mathcal{ALF}_{In}(r,g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}$$

и $(\mathcal{ALF}_{In}(g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}$, что вместе с $(\mathcal{ALF}_{In}(g),Nxt(\xi)) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$ позволяет заключить, что $(\mathcal{ALF}_{In}(g),\xi) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$. $\square$

Вместо $[\xi, d(\xi)]$ рассмотрим интервал $[Nx_1(\xi), d(\xi)]$ и воспроизведем в $[Nx_1(\xi), d(\xi)]$ то же прореживание, что и выше для $[\xi, d(\xi)]$. Аналог леммы 13 будет выполнятся, и это не будет влиять на истинность формул θ_δ на ξ. Далее продолжаем эту процедуру, которая останавливается не позже, чем после $r(D)$ шагов, и получаем $d(\xi) - \xi \leq r(D) + 2$. Выполнив это преобразование во всех $\xi \in In$ и $[\xi, d(\xi)]$, завершаем доказательство леммы 12. $\square$

Из лемм 5, 6, 8, 12 и теоремы 11 вытекает

Теорема 14. *Проблема выполнимости для логики MA^{Int}_{Lin} разрешима: существует алгоритм, описанный в серии цитированных лемм, который проверяет выполнимость. Логика MA^{Int}_{Lin} разрешима.*

Доказательство. Действительно, леммы 5, 6 сводят выполнимость в MA^{Int}_{Lin} к выполнимости в конечной модели $\mathcal{ALF}_{In}(g+1)$ с эффективно ограниченным размером интервалов, но без верхней возможной границы ее собственного размера. Затем лемма 8 позволяет рассматривать только правила вместо формул и теорема 11 позволяет работать с правилами в редуцированной нормальной форме. Наконец, лемма 12 позволяет проверять опровержение правил в редуцированной форме только на моделях вычислимо ограниченного размера.

В завершение этого раздела приведем расширение этого результата на сами правила, а не только на формулы. Как видели, правила являются более общей формализацией.

Определение 15. Правило $\mathbf{r}$ *истинно в логике* MA^{Int}_{Lin}, если для любого фрейма $\mathcal{ALF}_{In}$ из множества фреймов, порождающих логику MA^{Int}_{Lin}, правило $\mathbf{r}$ истинно на $\mathcal{ALF}_{In}$.

Используя результаты, предваряющие теорему 14, можно получить следующее утверждение.

Теорема 16. *Логика MA^{Int}_{Lin} разрешима относительно истинных правил: существует алгоритм, описанный в серии цитируемых, который проверяет истинность.*

Прокомментируем коротко этот результат. Истинность правила в любой транзитивной логике (например, в самой LTL) или модальной логике может быть легко представлена истинностью формул. Например, правило φ/ψ истинно, если и только если $\Box\varphi\wedge\varphi \to \psi$ — теорема логики (где $\Diamond\varphi := \top U\varphi$, $\Box := \neg\Diamond\neg$ для LTL). Но это не так в случае нетранзитивных модальных или временных логик, потому что операции $\Box_i$ и даже их конечные композиции $\Box_i^n$ всегда локальны и не могут описывать свойства всех областей фреймов. Например, для любых чисел k, n правило $N^k\Box_i^n x/x$, как можно проверить, истинно в нашей логике MA^{Int}_{Lin}, но мы не можем описать это формулой.

4. Транзитивизация, обозрение прошлого

Используя накопленную технику, рассмотрим версию логики MA^{Int}_{Lin} при допущении потенциально бесконечной проверки прошлого, присутствия агента, который может проверить все прошлое и помнит все прошлое. Это возможно в случае допущения логической операции типа $\Diamond^\infty\varphi = \exists m\Diamond^m\varphi$, так сказать, транзитивизации наших агентных отношений достижимости или, точнее, допущения операции $\Box^\infty\varphi = \varphi\wedge\forall m N^m\varphi$. Это напоминает подход, использованный в формализации концепции *common knowledge* из [1].

Подойдем к решению через более общий случай: будем рассматривать $\leq$ на N как новое дополнительное отношение достижимости на $\mathcal{ALF}_{In}$ (это просто стандартный линейный порядок) и новую логическую операцию U (просто стандартную until операцию), как и было определено изначально в самой линейной временной логике. Тем самым U определяется так:

$$\forall a\in N, (\mathcal{ALF}_{In}, a)\Vdash_V (\varphi U\psi) \ \Leftrightarrow\ \exists b[(a\leq b)\wedge((\mathcal{ALF}_{In}, b)\Vdash_V \psi) \wedge\forall c[(a\leq c<b)\Rightarrow(\mathcal{ALF}_{In}, c)\Vdash_V \varphi]].$$

Модифицируемый фрейм будем обозначать через $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$ и для единообразия обозначений в дальнейшем U будем обозначать через U_0.

Определение 17. *Логика $MA^{Int,\infty}_{Lin}$* является множеством формул, истинных на любой модели с любым фреймом $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$.

Для работы с этой логикой можно использовать результаты и элементы доказательств, полученных выше в этой работе (это позволит давать более короткие доказательства и сделать их прозрачнее).

Лемма 18. *Если правило в нормальной форме $\mathbf{r}_{nf}$ опровергается на модели с фреймом $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$, то $\mathbf{r}_{nf}$ может быть опровергнуто на некотором таком фрейме, где $\forall\xi\in In$ $(d(\xi)-\xi\leq r(D)+2)$, где $r(D)$ — число дизъюнктов в $\mathbf{r}_{nf}$.*

Доказательство. Будем дословно следовать доказательству леммы 12. Дело в том, что присутствие U не влияет на любой шаг доказательства (4). Просто рассматриваем U как одно из U_s внутри интервалов $[\xi, d(\xi)]$ и выполняем все шаги для доказательства (4) для всех ξ одновременно. $\Box$

Для любого фрейма $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$ (или модели, базирующейся на таком фрейме) и любых чисел $m = d^v(0)$, $v>2$, $n = d^{v_1}(0) > d^{v+1}(0)$ из базисного множества этого фрейма (как и ранее) $\mathcal{ALF}_{In,\leq,m,n}$ является фреймом, полученным из начального допущением $Nxt(d^{v_1}(0)) = d^v(0)$ и удалением всех чисел, больших $d^{v_1}(0)$.

Лемма 19. *Если правило в редуцированной нормальной форме $\mathbf{r}_{nf}$ опровергается в модели на фрейме $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$ в точке 0, где $\forall\xi \in In\ (d(\xi) - \xi \leq r(D) + 2)$, то $\mathbf{r}_{nf}$ может быть опровергнуто на некотором фрейме $\mathcal{ALF}_{In,\leq,m,n}$ для $m = d^v(0)$, $v > 2$, $n = d^{v_1}(0) > d^{v+1}(0)$ на 0, где $\forall\xi \in In\ (d(\xi) - \xi \leq r(D) + 2)$.*

Доказательство. Для любого $x_{i_1}U_s x_{i_2}$, где $(\mathcal{ALF}_{In,\leq}, a) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$, реализаторы x_{i_2} суть все $b \in \mathcal{ALF}_{In,\leq}$ такие, что

(i) $(aR_{\xi,s}b) \wedge ((\mathcal{ALF}_{In,\leq}, b) \Vdash_V x_{i_2})$,

(ii) $\forall c[(c \in \mathrm{Dom}_{\xi,s}\ \&\ aR_{\xi,s}c\ \&\ c < b) \Rightarrow (\mathcal{ALF}_{In,\leq}, c) \Vdash_V x_{i_1}]$.

Для любых $x_{i_1}U_s x_{i_2}$, где $(\mathcal{ALF}_{In,\leq}, d^2(0)) \Vdash_V x_{i_1}U_s x_{i_2}$, когда реализаторы для x_{i_2} расположены строго выше $d^2(0)$, рассмотрим наименьшие реализаторы $r(x_{i_1}U_s x_{i_2})$ из $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$ и обозначим их множество через S. Пусть максимальное число в S является числом n_m.

Из допущения об опровержении правила следует, что для любого a из базисного множества фрейма существует уникальный дизъюнкт θ_j из предпосылки $\mathbf{r}_{nf}$, который истин на a:

$$(\mathcal{ALF}_{In,\leq}, a) \Vdash_V \theta_j;$$

обозначим этот уникальный дизъюнкт через $\theta(a)$.

Рассмотрим минимальное число $m_n > n_m$, при котором для любого $d^v(0) > m_n$ список $[\theta(d^v(0)), \dots, \theta(d^{v+1}(0))]$ повторяется для других $v_1 > v$ бесконечное число раз.

Вначале рассмотрим интервал $[d^v(0), d^{v+1}(0)]$, расположенный строго выше m_n, и множество S_r для наименьших реализаторов для всех возможных $x_{i_1}U_s x_{i_2}$, которые истинны на $d^{v+1}(0)$. Пусть m_1 — любое число, строго большее любого в S_r.

Рассмотрим самый ранний интервал $[d^{v+w}(0), d^{v+w+1}(0)]$, расположенный строго выше начального интервала $[d^v(0), d^{v+1}(0)]$, где $d^{v+w}(0) > m_1$ и список $[\theta(d^{v+w}(0)), \dots, \theta(d^{v+w+1}(0))]$ повторяет список $[\theta(d^v(0)), \dots, \theta(d^{v+1}(0))]$.

Модифицируем фрейм, вводя $Nxt(d^{v+w}(0) - 1) = d^v(0)$ и после этого удаляя все числа, строго большие $d^{v+w}(0) - 1$.

Лемма 20. *Введенное выше преобразование сохраняет истинность всех подформул правила $\mathbf{r}_{nf}$ на элементах новой модели той же самой, что была в исходной модели.*

Доказательство получается непосредственным вычислением с использованием присутствия реализаторов S_r, выбранных выше и расположенных прежде, чем $[d^{v+w}(0), d^{v+w+1}(0)]$. □

Используя лемму 20, завершаем доказательство леммы 19.

Лемма 21. *Если правило в нормальной форме $\mathbf{r}_{nf}$ опровергается на модели с фреймом $\mathcal{ALF}_{In,\leq,m,n}$ для $m = d^v(0)$, $v > 2$, $n = d^{v_1}(0) > d^{v+1}(0)$ на 0 с $\forall\xi \in In\ (d(\xi) - \xi \leq r(D) + 2)$, то $\mathbf{r}_{nf}$ может быть опровергнуто в некотором фрейме $\mathcal{ALF}_{In,\leq,m_1,n_1}$ размера, эффективно вычисляемого от размера $\mathbf{r}_{nf}$.*

Доказательство. Действительно, вначале двигаясь начиная с $d^2(0)$ вверх, удаляем все интервалы $[d^w(0), \dots, d^{w+1}(0)]$, расположенные прежде $m = d^v(0) > 2$, с повторяющимися $[\theta(d^w(0)), \dots, \theta(d^{w+1}(0))]$ вместе с числами, расположенными между ними.

Лемма 22. *Удаление любого указанного повторения $[d^w(0), \dots, d^{w+1}(0)]$ не меняет истинности подформул правила $\mathbf{r}_{nf}$.*

Доказательство является прямым вычислением, использующим структуру фрейма и повторение списков, указанных выше. □

После этого преобразования часть фрейма, расположенная прежде $d^v(0)$, не только конечна, но и имеет эффективно вычислимый ограниченный размер.

Выберем начиная с $d^v(0)$ все минимальные интервалы $[d^f(0), d^{f+1}(0)]$, расположенные после $d^v(0)$ (т. е. расположенные в циклической части) и содержащие минимальные реализаторы для $r(x_{i_1} U_s x_{i_2})$ и $x_{i_1} U_s x_{i_2}$, истинных на $d^v(0)$.

Пусть X_r является множеством всех таких интервалов. Повторяем процедуру, описанную выше для интервала $[0, d^v(0)]$, действуя последовательно строго внутри между двумя соседствующими такими различными интервалами $I_1, I_2 \in X$. Удаляем повторения интервалов, расположенные строго между ними, продвигаясь от конца I_1 к началу. Затем двигаемся внутри цикла, повторяя такое же преобразование для каждой пары $I_1, I_2 \in S$. Это преобразование не меняет истинности подформул из $\mathbf{r}_{nf}$ ввиду выбора X_r. Лемма 21 доказана. □

Лемма 23. *Если правило в нормальной форме $\mathbf{r}_{nf}$ опровергается на некотором фрейме $\mathcal{ALF}_{In,\leq,m,n}$, то $\mathbf{r}_{nf}$ также опровергается на некотором фрейме $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$.*

Доказательство состоит в простом наблюдении: если растянем циклическую часть фрейма $\mathcal{ALF}_{In,\leq,m,n}$, прокатывая циклическую часть в будущее, то получим некоторый фрейм $\mathcal{ALF}_{In,\leq}$, сохраняющий истинность всех подформул правила $\mathbf{r}_{nf}$ во всех точках копий. □

Применяя аналоги теоремы 11 и леммы 8, а также леммы 18, 19, 21 и 23, приходим к следующему утверждению.

Теорема 24. *Проблема выполнимости для $MA_{Lin}^{Int,\infty}$ разрешима: существует алгоритм, описанный в серии лемм, проверяющий выполнимость. Логика $MA_{Lin}^{Int,\infty}$ разрешима.*

5. Открытые проблемы

Область имеет много интересных открытых проблем. Вначале укажем типичную открытую проблему: проблему аксиоматизации обоих логик MA_{Lin}^{Int} и $MA_{Lin}^{Int,\infty}$. Проблемы распознавания допустимых правил вывода в этих логиках также открыты. Вопросы расширения полученных результатов на временные логики, где агентные отношения достижимости не обязательно ограничены интервалами $[\xi, d(\xi)]$, а могут быть произвольными, пока не исследованы (мы не нашли путей решения возникающих технических проблем; даже проблема выполнимости не исследована). Помимо этого интересно рассмотреть модификации введенных реляционных интранзитивных моделей на случай не дискретного, а непрерывного времени, базируемого, например, на множествах рациональных или вещественных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fagin R., Halpern, J. Moses Y., Vardi M.* Reasoning about knowledge. Cambridge: MIT Press, 1995.
2. *Gabbay D. M., Hodkinson I. M., Reynolds M. A.* Temporal logic: Mathematical foundations and computational aspects. Oxford: Clarendon Press, 1994. V. 1.
3. *Gabbay D. M., Hodkinson I. M.* An axiomatization of the temporal logic with Until and Since over the real numbers // J. Log. Comput. 1990. N 1. P. 229–260.

4. *Gabbay D., Hodkinson I.* Temporal logic in context of databases. Oxford: Oxford University Press, 1995. (Logic and reality, essays on the legacy of Arthur Prior).

5. *Manna Z., Pnueli A.* The temporal logic of reactive and concurrent systems: Specification. New York: Springer-Verl., 1992.

6. *Manna Z., Pnueli A.* Temporal verification of reactive systems: safety. New York: Springer-Verl., 1995.

7. *Vardi M.* An automata-theoretic approach to linear temporal logic // Y. Banff Higher Order Workshop (1995). P. 238–266. http://citeseer.ist.psu.edu/vardi96automatatheoretic.html.

8. *Vardi M. Y.* Reasoning about the past with two-way automata // K. G. Larsen, S. Skyum, G. Winskel, eds. ICALP. New York: Springer-Verl., 1998. (LNCS; V. 1443). P. 628–641.

9. *Wooldridge M., Lomuscio A.* Multi-agent VSK logic. Proc. Seventh European workshop on logics in artificial intelligence (JELIAI-2000), September 2000. New York: Springer-Verl., 2000.

10. *Wooldridge M.* An automata-theoretic approach to multiagent planning // Proc. First European workshop on multiagent systems (EUMAS 2003), December 2003. Oxford: Oxford Univ. Press.

11. *Wooldridge M., Huget M.-P., Fisher M., Parsons S.* Model checking multi-agent systems: The MABLE language and its applications // Intern. J. Artif. Intellig. Tools. 2006. V. 15, N 2. P. 195–225.

12. *Belardinelli F., Lomuscio A.* Interactions between knowledge and time in a first-order logic for multi-agent systems: Completeness results // J. Artif. Intellig. Res. 2012. V. 45. P. 1–45.

13. *Lomuscio A., Michaliszyn J.* An epistemic Halpern–Shoham logic // Proc. 23rd Intern. joint conf. on artificial Intelligence (IJCAI13). Beijing: AAAI Press, 2013. P. 1010–1016.

14. *Hintikka J.* Knowledge and belief: An introduction to the logic of the two notions. Ithaca: Cornell Univ. Press, 1962.

15. *Artemov S.* Justified common knowledge // Theor. Comput. Sci. 2006. V. 357, N 1. P. 4–22.

16. *Balbiani Ph., Vakarelov D.* A modal logic for indiscernibility and complementarity in information systems // Fundam. Inform. 2001. V. 45. P. 173–194.

17. *Halpern J., Samet D., Segev E.* Defining knowledge in terms of belief // The Modal Logic Perspective. The Review of Symbolic Logic. 2009. V. 2, N 3. P. 469–487.

18. *Vakarelov D.* A modal characterization of indiscernibility and similarity relations in Pawlak's information systems // Intern. Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Soft Computing. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2005. P. 12–22 (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 3641).

19. *Rybakov V., Babenyshev S.* Multi-agent logic with distances based on linear temporal frames // Artificial intelligence and soft computing, 2010: Conf. proc. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl. P. 337–344.

20. *Rybakov V. V.* Chance discovery and unification in linear modal logic // Knowledge-based and intelligent information and engineering systems (KES 2011). Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2011. P. 478–485 (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 6882).

21. *Rybakov V. V.* Logical analysis for chance discovery in multi-agents' environment // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications / KES 2012. Conf. Proc. Amsterdam, the Netherlands: IOS Press, 2012. P. 1593–1601.

22. *McLean D., Rybakov V.* Multi-agent temporary logic $TS4^U_{K_n}$ based at non-linear time and imitating uncertainty via agents interaction // Artificial intelligence and soft computing (ISAICS), 2013. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2013 (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 7895). P. 375–384.

23. *Rybakov V. V.* Refined common knowledge logics or logics of common information // Arch. Math. Log. 2003. V. 42, N 2. P. 179–200.

24. *Rybakov V.* Logic of knowledge and discovery via interacting agents. Decision algorithm for true and satisfiable statements // Inf. Sci. 2009. V. 179, N 11. P. 1608–1614.

25. *Rybakov V.* Linear temporal logic LTL_{K_n} extended by multi-agent logic K_n with interacting agents // J. log. Comput. 2009. V. 19, N 6. P. 989–1017.

26. *Rybakov V. V.* Linear temporal logic with until and next, logical consecutions // Ann. Pure Appl. Logic. 2008. V. 155. P. 32–45.

27. *Rybakov V. V.* Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations // J. Log. Comput. 2016. V. 26, N 3. P. 945–958.

28. *Babenyshev S., Rybakov V.* Linear temporal logic LTL: Basis for admissible rules // J. Log. Comput. 2011. V. 21, N 2. P. 157–177.

29. *Rybakov V. V.* Logical consecutions in discrete linear temporal logic // J. Symbol. Log. 2005. V. 70, N 4. P. 1137–1149.

Статья поступила 12 декабря 2016 г.

Рыбаков Владимир Владимирович
Сибирский федеральный университет, Институт математики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`Vladimir_Rybakov@mail.ru`