Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ X–РАЗЛОЖИМЫХ ГРУППАХ ПРИ $X = \{1, m, m+1, m+2\}$

Ж. Чень, С. Го, К. П. Шум

Аннотация. Нормальная подгруппа N конечной группы G называется *n-разложимой*, если она является объединением n различных классов сопряженности группы G. Исследуется строение несовершенных групп, в которых любая собственная нетривиальная нормальная подгруппа является m-разложимой, $m+1$-разложимой или $m+2$-разложимой для некоторого натурального m. В разрешимом случае приводится классификация таких групп.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.517

Ключевые слова: разрешимая группа, класс G-сопряженности, n-разложимость.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Представляет интерес изучение связей между строением группы и некоторыми арифметическими условиями на ее сопряженные классы (см., например, [1–5]). В последнее время появилась тенденция изучения строения нормальной подгруппы группы G при условии, что нормальная подгруппа является объединением «небольшого» числа классов сопряженности G (см. [6–9]). К примеру, в [10] описана структура нормальной подгруппы, являющейся объединением двух классов сопряженности G, а также изучена связь между строением группы G и строением ее нормальных подгрупп, являющихся объединением двух классов сопряженности в G. В [8, 9] описано строение нормальной подгруппы, являющейся объединением трех и четырех классов сопряженности G соответственно. Кроме того, в [11–14] исследуется строение группы, у которой каждая нетривиальная нормальная подгруппа есть объединение данного числа классов сопряженности группы.

Напомним, что нормальная подгруппа N группы G называется *n-разложимой* в G, если N является объединением n различных классов сопряженности G. Группа G называется *n-разложимой*, если G не простая и каждая нетривиальная нормальная собственная подгруппа в G n-разложима. Впервые 2-разложимые нормальные подгруппы исследованы в [10], где они назывались *полными нормальными подгруппами*. В [15] рассмотрены 3-разложимые нормальные подгруппы. Недавно в [13, 14] было описано строение n-разложимых групп при $n = 7, 8, 9, 10$.

С другой стороны, если N — нормальная подгруппа группы G, то найдется натуральное число t такое, что N является объединением t различных классов сопряженности G. Для удобства обозначим $\xi(N) = t$ и положим $\mathscr{K}(G) =$

The research of the work was partially supported by the National Natural Science Foundation of China(11371237) and Shanghai Leading Academic Discipline Project(J50101).

$\{\xi(N) \mid N \trianglelefteq G, N \neq G\}$. Группу G будем называть *X-разложимой*, если $\mathscr{K}(G) = X$, где X — непустое множество натуральных чисел. В этом направлении в [6] описано строение несовершенных $\{1, 3, 4\}$-разложимых групп. В [16] классифицированы несовершенные $\{1, 2, 4\}$-группы. Недавно получена классификация несовершенных $\{1, 2, 3, 4\}$-групп [17]. Цель данной работы — изучить строение несовершенных $\{1, m, m+1, m+2\}$-групп для натурального $m > 2$.

2. Предварительные результаты

Напомним, что группа G называется *совершенной*, если $G' = G$, и G называется *примитивной*, если существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $\mathrm{Core}_G(M) = \bigcap\limits_{x \in G} M^x = 1$. Через $G', \Phi(G)$, $Z(G)$ и $F(G)$ обозначим коммутант, подгруппу Фраттини, центр и подгруппу Фиттинга группы G соответственно. Если x — элемент из G, то $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$ — класс сопряженности G, содержащий x. Для натурального n через Z_n обозначаем циклическую группу порядка n, через D_n — диэдральную группу порядка n, через Q_n — обобщенную кватернионную группу порядка n, через $d(n)$ — множество всех натуральных делителей n. SmallGroup(n, i) — это i-я группа порядка n в библиотеке маленьких групп GAP (см. [18]). Запись $G = N \rtimes_{\mathrm{Irr}} H$ означает, что $G = NH$, $N \trianglelefteq G$ и действие H на N сопряжением неприводимо; запись $G = N \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$ означает, что G является группой Фробениуса с ядром N и дополнением H.

Ниже приводятся некоторые фундаментальные факты, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2.1 [19, лемма 12.3]. *Пусть G — разрешимая группа, G' — единственная минимальная нормальная подгруппа G. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(i) *G является p-группой, $|G'| = p$ и $Z(G)$ циклическая.*

(ii) *G — группа Фробениуса с ядром G' и циклическим дополнением.*

Лемма 2.2 [16, пример 2.1]. *Пусть G — абелева группа порядка n. Тогда $\mathscr{K}(G) = d(n) - \{n\}$.*

Лемма 2.3. *Пусть m натуральное, $m > 2$, и G — группа такая, что $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Тогда G неабелева.*

Доказательство. Предположим, что G — абелева группа порядка n. Тогда по лемме 2.2 $\mathscr{K}(G) = d(n) - \{n\}$. Поскольку 2 делит $m(m+1)(m+2)$, то 2 делит n. Следовательно, $m = 2$, что противоречит условию $m > 2$.

Лемма 2.4. *Пусть m натуральное, $m > 2$, и G — группа такая, что $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу.*

Доказательство. Пусть N и M — две различные минимальные нормальные подгруппы G. Тогда $[M, N] = 1$. По условию $\xi(M) \geq m$ и $\xi(N) \geq m$. Так как $m > 2$, то $\xi(M \times N) > m + 2$. Следовательно, $M \times N = G$.

Если G разрешима, то N и M — абелевы подгруппы и потому G абелева, что противоречит лемме 2.3.

Допустим, что G неразрешима. Пусть K — нетривиальная собственная нормальная подгруппа G такая, что $\xi(K) \neq \xi(M)$ и $\xi(K) \neq \xi(N)$. Поскольку $G = M \times N$, можно считать, что $M \nleq K$. Также имеем $G = M \times K$. Таким образом, $K \cong G/M \cong N$. Следовательно, $N \nleq K$, поэтому $G = N \times K$. Так как G неразрешима, N и K неразрешимы, тем самым являются неабелевыми конечными простыми группами. Тогда по [20, пример I.7.9] $M = N$ либо $M = K$; противоречие. (Пусть $G = N_1 \times N_2$ и H — нетривиальная собственная нормальная подгруппа G. Если N_1 — неабелева простая группа и $N_2 \cong N_1$, то $H = N_1$ или N_2.)

Лемма 2.5. *Пусть m натуральное, $m > 2$, и G — группа такая, что $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Тогда порядок G не является степенью простого числа.*

Доказательство. Предположим, что группа G удовлетворяет условию $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$ и имеет порядок p^n, где p простое, n натуральное. Рассмотрим главный ряд

$$1 = N_0 < N_1 < \dots < N_{n-1} < N_n = G$$

группы G. Тогда $|N_i| = p^i$ для $i = 0, 1, \dots, n$. Поскольку $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$, то $n = 4$ и, таким образом, $|G| = p^4$. Если $|Z(G)| = p^3$, то G абелева, что противоречит лемме 2.3. Поэтому $|Z(G)|$ равно p или p^2. Если $|Z(G)| = p^2$, то можно выбрать нормальную подгруппу N порядка p в G, содержащуюся в $Z(G)$. Таким образом, $\xi(N) = m$ и $\xi(Z(G)) = m+1$. Предположим, что $Z(G) = N \cup x^G$ для некоторого $x \in G$. Тогда $|x^G| = p^2 - p$. С другой стороны, $|x^G| = 1$, так как $x \in Z(G)$, поэтому $1 = p^2 - p$; противоречие. Если $|Z(G)| = p$, то $Z(G)$ — минимальная нормальная подгруппа G. Любая минимальная нормальная подгруппа G содержится в $Z(G)$, поэтому $p = m$. Пусть $\overline{G} = G/Z(G)$. Тогда $\mathscr{K}(\overline{G}) = \{1, 2, 3\}$. По [7] $\overline{G}$ изоморфна одной из групп Z_6, D_8, Q_8, S_4, $Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$ или $\mathrm{SL}(2, 3)$. Так как G является p-группой, $|G/Z(G)| = 8$ и $m = p = 2$; противоречие.

Лемма 2.6. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда $G \neq G'T$ для любой собственной нормальной подгруппы T в G.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть T — собственная нормальная подгруппа G такая, что $G = G'T$. Тогда G/T разрешима. С другой стороны, $(G/T)' = G'T/T = G/T$; противоречие.

3. Разрешимый случай

В этом разделе приводится классификация разрешимых групп G с условием $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Последовательно рассматриваются три случая: $\xi(G')$ равно m, $m+1$ и $m+2$ соответственно.

Теорема 3.1. *Пусть m натуральное, $m > 2$, и G — разрешимая группа с условием $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Если $\xi(G') = m$, то $G = G' \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$, где G' является элементарной абелевой p-группой порядка $1 + 6(m-1)$ и $H \cong Z_6$. Обратное также верно.*

Доказательство. По лемме 2.4 G' является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Таким образом, по леммам 2.5 и 2.1 G является группой Фробениуса с ядром G' и циклическим дополнением. С другой стороны, рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/G'$, тогда $\mathscr{K}(\overline{G}) = \{1, 2, 3\}$. По лемме 2.2 $\{1, 2, 3\} = d(n) - \{n\}$, где $n = |G/G'|$. Следовательно, $n = 6$ и $G = G' \rtimes H$, где $H \cong Z_6$. Для любого $1 \neq x \in G'$ имеем $C_G(x) \leq G'$. Поскольку G' абелева, $C_G(x) = G'$ для любого $1 \neq x \in G'$. Допустим, что $|G'| = p^\alpha$ для некоторых простого p и натурального α. Так как $\xi(G') = m$, то $p^\alpha = |G'| = 1 + 6(m-1)$. Более того, поскольку G' минимальная нормальная в G, то H действует неприводимо на G'.

Допустим, что $G = G' \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$ удовлетворяет условиям теоремы. Докажем, что $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. По [21, упражнение 8.5.7] любая нормальная подгруппа G содержит или содержится в G'. Поскольку H действует неприводимо на G', то G' является единственной минимальной нормальной подгруппой G. Пусть $H = \langle a \mid a^6 = 1\rangle$. Тогда G', $G'\langle a^3\rangle$ и $G'\langle a^2\rangle$ — это все нетривиальные нормальные подгруппы G. Так как G' элементарная абелева, для любого $1 \neq x \in G'$ имеем $C_G(x) = G'$, таким образом, $\xi(G') = m$, поскольку $|G'| = 1 + 6(m-1)$. Так как $C_G(a^3) = H$, то $|(a^3)^G| = |G : H| = p^\alpha$, поэтому $G'\langle a^3\rangle = G' \cup (a^3)^G$. Докажем, что $G'\langle a^2\rangle = G' \cup (a^2)^G \cup (a^4)^G$. Достаточно доказать, что $a^2 \neq (a^4)^g$ для всех $g \in G$. Иначе если $a^2 = (a^4)^g$ для некоторого $g \in G$, то $a^2G' = (a^4)^gG' = a^4G'$, поскольку G/G' абелева, откуда $a^2 = a^4g_1$ для $g_1 \in G'$, что противоречит $a^2 \in G' \cap H = 1$. Таким образом, $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$, и теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть m натуральное, $m > 2$, и G — разрешимая группа с условием $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Если $\xi(G') = m+1$, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *$G = F(G) \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$, где $F(G)$ — элементарная абелева p-группа порядка $1 + 8(m-1)$ и $H \cong Q_8$.*

(2) *$G = F(G) \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$, где $F(G)$ — элементарная абелева p-группа порядка $1 + 20(m-1)$ и $H \cong Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$.*

Обратное также верно.

Доказательство. Пусть N — нормальная подгруппа G такая, что $\xi(N) = m$. Тогда по лемме 2.4 N является единственной минимальной нормальной подгруппой G. Пусть K — нормальная подгруппа G такая, что $\xi(K) = m+1$. Если $K \neq G'$, то $G'K \trianglelefteq G$, $G' \cap K = N$ и $\xi(G'K) > m+2$. Следовательно, $G'K = G$, что противоречит лемме 2.6. Таким образом, $K = G'$. С другой стороны, если $M \trianglelefteq G$ такая, что $\xi(M) = m+2$, то M максимальна в G и, следовательно, $G' \leq M$. Положим $\overline{G} = G/N$. Тогда $\mathscr{K}(\overline{G}) = \{1, 2, 3\}$ и G'/N — единственная минимальная нормальная подгруппа $\overline{G}$. По лемме 2.1 $\overline{G}$ является p-группой для некоторого простого p, $|\overline{G'}| = p$ и $Z(\overline{G})$ циклическая либо является группой Фробениуса с ядром $\overline{G'}$ и циклическим дополнением. По [7] $\overline{G}$ изоморфна D_8, Q_8 или $Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$.

Пусть M — нормальная подгруппа G такая, что $\xi(M) = m+2$. Тогда последовательность

$$1 < N < G' < M < G$$

является главным рядом группы G. Поскольку N минимальная нормальная в G, можно считать, что $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого p и натурального α.

(i) Предположим, что $\overline{G} \cong D_8$ или Q_8. По лемме 2.5 порядок G не является степенью простого числа, поэтому $p \neq 2$. Следовательно, $|G'| = 2p^\alpha$, $|M| = 4p^\alpha$ и $|G| = 8p^\alpha$. Предположим, что $G' = N \cup x^G$ для некоторого $x \in G$. Тогда $|x^G| = p^\alpha$, следовательно, $|C_G(x)| = 8$. Покажем, что G' не нильпотентна. Действительно, если G' нильпотентна, то G' содержит подгруппу порядка 2, которая нормальна в G вопреки тому, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Таким образом, $N = F(G) < G'$. Поскольку G разрешима, $\Phi(G) < F(G)$, откуда $\Phi(G) = 1$. Отсюда вытекает, что $N = F(G)$ имеет дополнение H в G.

Сначала рассмотрим случай $\overline{G} \cong D_8$. Тогда $H \cong G/F(G) \cong D_8$, таким образом, $H = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. Тем самым $Z(H) = \langle a^2\rangle$ и $F(G)Z(H) \trianglelefteq G$. Сравнение порядков показывает, что $G' = F(G)\langle a^2\rangle$. Если найдется $1 \neq t \in F(G)$ такой, что $a^2t = ta^2$, то $t \in Z(G')$. Таким образом, $Z(G') = F(G)$. Поскольку $G'/Z(G') = G'/F(G)$ порядка 2, G' оказывается нильпотентной; противоречие. Пусть $y \in H$ — произвольный элемент порядка 4. Тогда $y^2 = a^2$ и $F(G)\langle y\rangle$ индекса 2 в G, откуда $F(G)\langle y\rangle = F(G) \cup (a^2)^G \cup y^G = G' \cup y^G$. Таким образом, $\xi(F(G)\langle y\rangle) = m + 2$. Следовательно, $|C_G(y)| = 4$, и, значит, $t \notin C_G(y)$ для всех $1 \neq t \in F(G)$. Для любого $c \in H$ порядка 2 такого, что $c \neq a^2$, $T = \langle c, a^2\rangle$ порядка 4 и, стало быть, $F(G)T$ — максимальна нормальна подгруппа в G. Отсюда вытекает, что $F(G)T = G' \cup c^G$. Следовательно, $|C_G(c)| = 4$ и $C_G(c) = \langle a^2, c\rangle$, поэтому $c \notin C_G(t)$ для любого $1 \neq t \in F(G)$. Таким образом, G является группой Фробениуса. Вместе с тем силовские подгруппы дополнения Фробениуса являются циклическими или обобщенными кватернионными; противоречие.

Рассмотрим случай $\overline{G} \cong Q_8$. Тогда $H \cong G/F(G) \cong Q_8$. Пусть $H = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, докажем, что G является группой Фробениуса. Для любого $1 \neq w \in F(G)$ имеем $C_G(w) = F(G)$, откуда $|w^G| = 8$, поэтому $p^\alpha = 1 + 8(m-1)$. Поскольку $F(G)$ является минимальной нормальной подгруппой G, то H действует неприводимо на $F(G)$. Наоборот, если G имеет описанное выше строение, то нетрудно заметить, что $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$.

(ii) Предположим, что $\overline{G} \cong Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$. Отсюда следует, что $|G'| = 5p^\alpha$, $|M| = 10p^\alpha$ и $|G| = 20p^\alpha$. Пусть $G' = N \cup x^G$ для некоторого $x \in G$. Тогда $|x^G| = 4p^\alpha$ и, таким образом, $|C_G(x)| = 5$. Следовательно, G' не нильпотентна. Отсюда $N = F(G)$. Так как $\Phi(G) < F(G)$, то $\Phi(G) = 1$. Стало быть, $F(G)$ имеет дополнение H в G и $H \cong G/F(G) \cong Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$. Пусть T — нормальная подгруппа H порядка 10. Тогда $F(G)T \trianglelefteq G$. Поскольку $F(G)T$ — максимальная подгруппа G, то $\xi(F(G)T) = m+2$. Можно считать $M = F(G)T$. Предположим, что $M = G' \cup y^G$ для некоторого $y \in G$. Тогда $|y^G| = 5p^\alpha$, откуда $|C_G(y)| = 4$. Следовательно, $C_G(y) \leq H$. Нетрудно заметить, что $M = F(G) \rtimes T$ является группой Фробениуса, поэтому $p \neq 2$. Поскольку любой элемент порядка 5 лежит в G', то $5 \nmid |C_G(t)|$ для любого $1 \neq t \in F(G)$. Если 2 делит $|C_G(t)|$, то найдется $c \in C_G(t)$ такой, что $|c| = 2$. Пусть $K = F(G)\langle x, c\rangle$, где $H' = \langle x\rangle$. Тогда $|K| = 10p^\alpha$. Отсюда следует, что $K = M$ и $M = G' \cup c^G$. Стало быть, $|c^G| = 5p^\alpha$, откуда $|C_G(c)| = 4$, что противоречит тому, что $t \in C_G(c)$. Таким образом, $C_G(t)$ является p-группой, а G — группа Фробениуса. Поскольку $F(G)$ минимальная нормальная в G, то H действует неприводимо на $F(G)$ и, таким образом, $p^\alpha = 1 + 20(m-1)$. Наоборот, если G имеет описанное выше строение, то нетрудно заметить, что $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть m натуральное, $m > 2$, и G — разрешимая группа с условием $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$. Если $\xi(G') = m+2$, то $G = F(G) \rtimes_{\mathrm{Irr}} H$, где $H \cong SL(2,3)$ и $F(G) = G''$ — элементарная абелева p-группа такая, что G' является группой Фробениуса с ядром $F(G)$ и дополнением, изоморфным Q_8. Обратное также верно.*

Доказательство. В этом случае G' — максимальная подгруппа G и, таким образом, $|G/G'| = q$ для некоторого простого q. Для любой собственной нормальной подгруппы N в G если $N \nleq G'$, то $G = G'N$, поскольку G' максимальна в G, что противоречит лемме 2.6. Таким образом, $N \leq G'$. Далее доказательство делится на два случая в зависимости от того, является G' нильпотентной или нет.

Случай 1: G' нильпотентна.

В этом случае G' — прямое произведение своих силовских подгрупп. По лемме 2.4 G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, следовательно, порядок G' является степенью простого числа. Пусть $|G'| = p^\alpha$, где p простое, α натуральное, тогда $p \neq q$ по лемме 2.5.

Докажем, что G' не абелева. Если G' абелева, то $C_G(x)$ равна G' или G для любого $x \in G'$, стало быть, $|x^G|$ равно q либо 1. Так как по лемме 2.3 G неабелева, $Z(G) < G'$ (если $Z(G) = G'$, то $G/Z(G)$ циклическая и тем самым G абелева). Докажем, что $Z(G) = 1$. Действительно, допустим, что $Z(G) \neq 1$, и пусть N — собственная нормальная подгруппа G такая, что $\xi(N) = m$. Тогда $N \leq G'$ в силу разд. 1 и N — минимальная нормальная подгруппа G. Если $N \nleq Z(G)$, то $N \cap Z(G) = 1$ и $NZ(G) = N \times Z(G)$. В этом случае $\xi(N \times Z(G)) \geq 2m \geq m + 3$, поскольку $m > 2$, следовательно, $N \times Z(G) = G$, что противоречит $NZ(G) \leq G'$. Стало быть, $N \leq Z(G)$. Если $\xi(Z(G)) = m + 1$, то существует элемент $x \in G'$ такой, что $Z(G) = N \cup x^G$. Таким образом, $1 = |x^G| = |Z(G)| - |N|$; противоречие. Если $\xi(Z(G)) = m$, то $m = |Z(G)| = p$. Пусть $G' = Z(G) \cup x^G \cup y^G$ для некоторых $x, y \in G$. Тогда $p^\alpha = |Z(G)| + 2q = p + 2q$. Отсюда следует, что $p(p^{\alpha-1} - 1) = 2q$. Поскольку $p \neq q$, получаем $m = p = 2$ вопреки условию $m > 2$. Таким образом, $Z(G) = 1$, и, стало быть, $p^\alpha = |G'| = 1 + (m + 1)q$. Рассмотрим главный ряд группы G:

$$1 < A < B < G' < G.$$

Пусть $|A| = p^s$ и $|B| = p^t$ для натуральных s и t. Пусть $B = A \cup u^G$ и $G' = B \cup v^G$ для некоторых $u, v \in G$. Тогда $|u^G| = p^t - p^s$ и $|v^G| = p^\alpha - p^t$. Поэтому $p^t - p^s = p^\alpha - p^t = q$. Отсюда следует, что $2p^t = p^\alpha + p^s = p^s(p^{\alpha-s} + 1)$; противоречие. Следовательно, G' неабелева.

Из вышеизложенного следует, что $1 < Z(G') < G'$ и $1 < G'' < G'$. Таким образом, выполнена одна из следующих возможностей:

(i) $1 < G'' < Z(G') < G'$,

(ii) $1 < Z(G') < G'' < G'$,

(iii) $1 < G'' = Z(G') < G'$.

Рассмотрим случай (i). Пусть $|G''| = p^s$, $|Z(G')| = p^t$ для натуральных s, t и $Z(G') = G'' \cup w^G$ для некоторого $w \in G$. Тогда $|w^G| = p^t - p^s = q$; противоречие с тем, что p делит q.

Предположим, что выполнено условие (ii). Можно считать, что $|Z(G')| = p^s$ и $|G''| = p^t$ для натуральных s и t и $G'' = Z(G') \cup x^G, G' = G'' \cup y^G$ для $x, y \in G$. Тогда $|x^G| = p^t - p^s = p^s(p^{t-s} - 1)$ и $|y^G| = p^\alpha - p^t = p^t(p^{\alpha-t} - 1)$. Если $p^{\alpha-t} - 1 = 1$, то $p^{\alpha-t} = 2$. Отсюда следует, что G'/G'' циклическая, следовательно, G' абелева; противоречие. Таким образом, $p^{\alpha-t} - 1 = q$. Если $p^{t-s} - 1 = 1$, то $t - s = 1$ и $p = 2$. Отсюда следует, что $|C_G(x)| = p^{\alpha-s}q$. С другой стороны, $C_G(x) \geq \langle Z(G'), x\rangle$, следовательно, $p^{\alpha-s}q \geq p^{s+1}q = p^t q$. Поэтому $\alpha \geq s + t$. Поскольку $p^s - 1 = (m - 1)q = (m - 1)(p^{\alpha-t} - 1)$, то $s > \alpha - t$. Таким образом, $s + t > \alpha \geq s + t$; противоречие. Тем самым $p^{t-s} - 1 = q$. Если $Z(G) = 1$, то $|Z(G')| = p^s = 1 + (m-1)q$ и, таким образом, $(p-1)(p^{s-1} + p^{s-2} + \cdots + 1) = (m-1)q$. Если $p^{s-1} + p^{s-2} + \cdots + 1 = q$, то $p = m$. С другой стороны, поскольку $q = p^{s-t} - 1$, то $p^{s-1} + p^{s-2} + \cdots + 1 = p^{s-t} - 1$ и получаем $m = p = 2$, что невозможно. Таким образом, $p - 1 = q$. Отсюда следует, что $p = 3, q = 2$ и $t - s = \alpha - t = 1$, значит,

$\alpha - s = 2$. Тем самым $|G'/Z(G')| = p^2$, следовательно, $G'/Z(G')$ абелева, что противоречит условию $Z(G') < G''$. Таким образом, $Z(G) \neq 1$ и $Z(G) = Z(G')$, поскольку $Z(G) < G'$. Получаем, что $s = 1$ и $m = p$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z(G)$. Тогда $\mathscr{K}(\overline{G}) = \{1, 2, 3\}$ и $|\overline{G}| = p^{\alpha-1}q$. Так как $Z(G') < G''$, то $G'/Z(G)$ неабелева и потому $\alpha - 1 \geq 3$. Из [7] следует, что $|\overline{G}| = 24 = 2^3 \cdot 3$, откуда $\alpha - 1 = 3, q = 3$. Отсюда получаем $\alpha = 4$. С другой стороны, поскольку $q = p^{t-1} - 1 = p^{\alpha-t} - 1 = 3$, то $t - 1 = \alpha - t = 2$, что влечет $t = 3$ и $\alpha = 5$; противоречие.

Предположим, что выполнено условие (iii). Если $Z(G')$ не является минимальной нормальной в G, то обозначим через N единственную минимальную нормальную подгруппу G. Тогда последовательность

$$1 < N < Z(G') < G' < G$$

является главным рядом G. Пусть $Z(G') = N \cup x^G$ для некоторого $x \in G$, и пусть $|N| = p^s$, $|Z(G')| = p^t$ для некоторых натуральных s и t. Тогда $|x^G| = |Z(G')| - |N|$ равно q или 1. Однако ни одно из равенств невозможно. Таким образом, $Z(G')$ минимальная нормальная в G, и можно считать, что

$$1 < Z(G') < M < G' < G$$

есть главный ряд группы G. Пусть $|Z(G')| = p^s$ и $|M| = p^t$ для натуральных s, t. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z(G')$. Тогда $\mathscr{K}(\overline{G}) = \{1, 2, 3\}$ и $|\overline{G}| = p^{\alpha-s}q$. Согласно [7] с учетом того, что $\overline{G'}$ — максимальная подгруппа в $\overline{G}$, получаем, что $\overline{G}$ изоморфна S_4 или $SL(2, 3)$. Если $\overline{G} \cong S_4$, то $|\overline{G'}| = |G'/Z(G')| = 2^2 \cdot 3$. Отсюда следует, что $|G'| = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^s = 2^\alpha$; противоречие. Если $\overline{G} \cong SL(2, 3)$, то $|M| = 2^{s+1}$ и $|G'| = 2^{3+s}$. Пусть $G' = M \cup y^G$ для некоторого $y \in G$. Тогда $|y^G| = 2^{s+1} \cdot 3$. Отсюда следует, что $|C_G(y)| = 2^2$. С другой стороны, $C_G(y) \geq \langle Z(G'), y \rangle > Z(G')$, таким образом, $2^2 > 2^s$, откуда $s = 1$, поэтому $Z(G') = Z(G)$ порядка 2. Таким образом, $m = p = 2$, что противоречит условию.

Случай 2: G' не нильпотентна.

В этом случае $F(G) < G'$. Пусть N — единственная минимальная нормальная подгруппа G, обозначим $\overline{G} = G/N$. Тогда так же, как в случае 1, $\overline{G}$ изоморфна S_4 или $SL(2, 3)$. Так как G разрешима, если $\Phi(G) = 1$, то $N = F(G)$; если $\Phi(G) \neq 1$, то $1 < \Phi(G) < F(G) < G' < G$ — главный ряд группы G.

Пусть сначала $\overline{G} \cong S_4$. Если $\Phi(G) = 1$, то пусть последовательность

$$1 < F(G) < K < G' < G$$

является главным рядом группы G, и пусть $K = F(G) \cup x^G$, $G' = K \cup y^G$ для $x, y \in G$. Пусть $|F(G)| = p^\alpha$ для простого p и натурального α. Тогда $|K| = 4p^\alpha$ и $|G'| = 12p^\alpha$. Отсюда следует, что $|C_G(x)| = 8$ и $|C_G(y)| = 3$. Если $p = 2$, то $|K| = 2^{\alpha+2}$ и K нильпотентна, что противоречит условию $F(G) < K$. Если $p = 3$, то $|C_G(y)| \geq 9$, что противоречит условию $|C_G(y)| = 3$. Таким образом, $p \neq 2$ и $p \neq 3$. Для произвольного элемента $1 \neq z \in F(G)$ группа $C_{G'}(z)$ не содержит x^g и y^h для $g, h \in G$, поэтому $C_{G'}(z) \leq F(G)$. Так как $G'/F(G) \cong A_4$, любой элемент из $G'/F(G)$ имеет порядок 2 или 3. Поэтому G' является группой Фробениуса с ядром $F(G)$ и дополнением, изоморфным A_4. Получили противоречие, поскольку силовская подгруппа дополнения Фробениуса обязана быть либо циклической группой, либо обобщенной кватернионной [21, теорема 10.5.6]. Таким образом, $\Phi(G) \neq 1$, и последовательность

$$1 < \Phi(G) < F(G) < G' < G$$

является главным рядом группы G. Можно считать, что $|\Phi(G)| = p^\alpha$ для некоторого простого p и натурального α. Тогда $|F(G)| = 4p^\alpha, |G'| = 12p^\alpha$ и $|G| = 24p^\alpha$. Пусть $F(G) = \Phi(G) \cup x^G$ и $G' = F(G) \cup y^G$ для $x, y \in G$. Тогда $|C_G(x)| = 8$ и $|C_G(y)| = 3$. Так как G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, порядок $F(G)$ является степенью простого числа и потому $p = 2$. Поскольку $F(G) \leq C_G(\Phi(G))$, то $\Phi(G) < C_G(x)$, откуда $2^\alpha < 8$. Отсюда следует, что α равно 1 или 2. Если $\alpha = 1$, то $\Phi(G) = Z(G)$ порядка 2, поэтому $m = 2$; противоречие. Если $\alpha = 2$, то $|G| = 2^5 \cdot 3$ и $|F(G)| = 16, |\Phi(G)| = 4$. Для любого $x \in \Phi(G)$ имеем $F(G) \leq C_G(x)$, поэтому $|x^G|$ делит $|G/F(G)| = 6$. Таким образом, $|x^G|$ равно 2, 3 или 6. Отсюда следует, что $4 = 1 + \left|x_1^G\right| + \dots + \left|x_{m-1}^G\right|$ и потому $m = 2$; противоречие.

Пусть $\overline{G} \cong SL(2,3)$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то

$$|(G/\Phi(G))'| = |G'/\Phi(G)| = 8,$$

поэтому $G'/\Phi(G)$ нильпотентна и, следовательно, G' нильпотентна по [21, теорема 5.2.15], что противоречит условию рассматриваемого случая. Следовательно, $\Phi(G) = 1$ и $N = F(G)$. Пусть

$$1 < F(G) < K < G' < G$$

— главный ряд группы G, пусть $|F(G)| = p^\alpha$ для простого p и натурального α. Тогда $|K| = 2p^\alpha$ и $|G'| = 8p^\alpha$. Поскольку G' не нильпотентна, то $p \neq 2$. Так как $G'' \trianglelefteq G$ и G'/K абелева, $G'' \leq K$. Если $G'' < K$, то $G'' = F(G)$, поэтому $G'/F(G)$ абелева, что противоречит условию $G'/F(G) \cong Q_8$. Таким образом, $G'' = K$. Так как $G = F(G)H$, то $H \cong SL(2,3)$, пусть y — элемент порядка 4 из H такой, что $y^2 \in Z(H)$. Тогда $K = F(G) \cup (y^2)^G$ и $G' = F(G) \cup (y^2)^G \cup y^G$. Отсюда следует, что $|C_G(y^2)| = 24$ и $|C_G(y)| = 4$. Таким образом, $C_G(y^2) = H$ и $C_G(y) = \langle y \rangle$, поэтому G' является группой Фробениуса с ядром $F(G)$. Поскольку $F(G)$ — минимальная нормальная в G, то H действует неприводимо на $F(G)$. Нетрудно заметить, что если G имеет описанное выше строение, то $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$, и теорема доказана.

Собирая вместе результаты трех теорем, получаем следующее утверждение.

Теорема А. *Если G — разрешимая группа, $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$ и $m > 2$, то выполнено одно из следующих утверждений.*

(1) *$G = G' \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$, где G' является элементарной абелевой p-группой порядка $1 + 6(m-1)$ и $H \cong Z_6$.*

(2) *$G = F(G) \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$, где $F(G)$ — элементарная абелева p-группа порядка $1 + 8(m-1)$ и $H \cong Q_8$.*

(3) *$G = F(G) \rtimes_{\mathrm{Fpf}} H$, где $F(G)$ — элементарная абелева p-группа порядка $1 + 20(m-1)$ и $H \cong Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$.*

(4) *$G = F(G) \rtimes_{\mathrm{Irr}} H$, где $H \cong SL(2,3)$ и $F(G) = G''$ — элементарная абелева p-группа такая, что G' является группой Фробениуса с ядром $F(G)$ и дополнением, изоморфным Q_8.*

4. Неразрешимый случай

В этом разделе рассматривается неразрешимый случай. Напомним, что по лемме 2.4 G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу.

Теорема B. *Пусть m натуральное и $m > 2$. Если G — несовершенная неразрешимая группа и $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$, то G' является единственной минимальной нормальной подгруппой G и $G/G' \cong Z_2 \times Z_2$.*

Доказательство. Пусть N — единственная минимальная нормальная подгруппа G и $\overline{G} = G/N$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G}$. Для любой нетривиальной нормальной подгруппы M в G имеем $N \leq M$, поэтому M/N — нормальная подгруппа $\overline{G}$. Рассмотрим следующие два случая.

(1) Не существует нормальных подгрупп M, K в G таких, что $N < M < K < G$.

В этом случае любая нетривиальная нормальная подгруппа $\overline{G}$ минимальная нормальная в $\overline{G}$. Пусть M — нормальная подгруппа G с $\xi(M) = m+1$. Тогда M/N 2-разложима в $\overline{G}$. Если K — нормальная в G с $\xi(K) = m+2$, то K/N 2- или 3-разложима в $\overline{G}$.

Предположим сначала, что любая нетривиальная нормальная подгруппа $\overline{G}$ 2-разложима в $\overline{G}$. Тогда $\overline{G} = M/N \times K/N$, где M и K — две различные нетривиальные нормальные подгруппы G и $N < M$, $N < K$. По теореме 1 из [10] группы M/N и K/N абелевы, поэтому $\overline{G} \cong Z_2 \times Z_2$ по теореме 3 из [6]. Так как G/N абелева и G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, $N = G'$.

Пусть K/N является 3-разложимой нормальной подгруппой $\overline{G}$. Тогда $\xi(K) = m+2$ и K/N является минимальной нормальной подгруппой $\overline{G}$. Из теоремы 1 в [15] следует, что K/N абелева. Если M — нормальная подгруппа G с $\xi(M) = m+1$, то $\overline{G} = M/N \times K/N$. Известно также, что $\overline{G}$ абелева. Так как $\mathscr{K}(\overline{G}) = \{1, 2, 3\}$, то $\overline{G} \cong Z_6$ по [7]. Пусть $\overline{G} = \langle aN \rangle$, где $a \in G$. Тогда $a^6 \in N$ и 6 делит $|a|$. Если $T/N = \langle a^2 N \rangle$, то $T = \langle a^2 \rangle N$ и $T = N \cup (a^2)^G \cup (a^4)^G$. Отсюда следует, что $|(a^2)^G| + |(a^4)^G| = 2|N|$. Так как $C_G(a^2) \leq C_G(a^4)$, то $|(a^4)^G| \leq |(a^2)^G|$. Если $|(a^4)^G| < |N|$, то $|(a^2)^G| > |N|$. Таким образом, $|C_G(a^2)| < 6$, что является противоречием, поскольку $\langle a \rangle \leq C_G(a^2)$ и $|a| \geq 6$. Таким образом, $|(a^2)^G| = |(a^4)^G| = |N|$ и $|C_G(a^2)| = |C_G(a^4)| = 6$, поэтому $C_G(a^2) = \langle a \rangle$ и $|a| = 6$. Пусть $L/N = \langle a^3 N \rangle$. Тогда $|L/N| = 2$ и $L = N \cup (a^3)^G$. Отсюда вытекает, что $|(a^3)^G| = |N|$, поэтому $|C_G(a^3)| = 6$, следовательно, $C_G(a^3) = \langle a \rangle$. Получаем $G = \langle a \rangle N$ и $\langle a \rangle \cap N = 1$. Кроме того, $\langle a \rangle$ действует без неподвижных точек на N. Следовательно, G является группой Фробениуса с ядром N, поэтому N нильпотентна и G разрешима; противоречие.

(2) Существуют нормальные подгруппы M, K в G такие, что $N < M < K < G$.

Вновь положим $\overline{G} = G/N$, тогда $\mathscr{K}(\overline{G}) = \{1, 2, 3\}$. По [7] $\overline{G}$ изоморфна D_8, Q_8, S_4, $Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$ или $SL(2, 3)$.

Предположим, что $\overline{G} \cong Q_8$. Тогда N неразрешима. Стало быть, силовская 2-подгруппа N не может быть нормальной в N, и 4 делит $|N|$. Можно считать, что $\overline{G} = \langle aN, bN \mid a^4 \in N,\ b^4 \in N,\ a^2 N = b^2 N,\ b^{-1}abN = a^{-1}N \rangle$. Тогда $K = \langle a \rangle N$ и $T = \langle a^2 \rangle N$ нормальны в G и $\xi(T) = m+1, \xi(K) = m+2$. Отсюда следует, что $T = N \cup (a^2)^G$ и $K = T \cup a^G$. Нетрудно заметить, что $|a^G| = 2|N|$ и $|(a^2)^G| = |N|$. Таким образом, $|C_G(a)| = 4$ и $|C_G(a^2)| = 8$. Так как $\langle a \rangle \leq C_G(a)$ и 4 делит $|a|$, то $C_G(a) = \langle a \rangle$, тем самым $|a| = 4$. Пусть P — силовская 2-подгруппа G такая, что $a \in P$. Тогда $Z(P) \leq C_G(a)$. Поэтому $Z(P) = \langle a^2 \rangle$ и $P \leq C_G(a^2)$, стало быть, $|C_G(a^2)| \geq |P| \geq 32$; противоречие.

Если $\overline{G} \cong D_8$, то можно считать

$$\overline{G} = \langle aN, bN \mid a^4 \in N,\ b^2 \in N,\ b^{-1}abN = a^{-1}N \rangle.$$

Подгруппы $K = \langle a\rangle N$ и $T = \langle a^2\rangle N$ нормальны в G, и $\xi(T) = m+1$, $\xi(K) = m+2$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим противоречие.

Если $\overline{G} \cong SL(2,3)$, то силовская 2-подгруппа $\overline{T} = T/N$ группы $\overline{G}$ нормальна в $\overline{G}$ и $\overline{T} \cong Q_8$. Отсюда следует, что $K/N = Z(T/N) \trianglelefteq \overline{G}$. Пусть

$$T/N = \langle aN, bN \mid a^4 \in N,\ b^4 \in N,\ a^2N = b^2N,\ b^{-1}abN = a^{-1}N\rangle.$$

Тогда $K/N = \langle a^2\rangle N$. По условию $K = N \cup (a^2)^G$ и $T = N \cup (a^2)^G \cup a^G$. Отсюда следует, что $|C_G(a^2)| = 24$ и $|C_G(a)| = 4$. Поскольку 4 делит $|a|$ и $\langle a\rangle \leq C_G(a)$, то $|a| = 4$. Пусть L — силовская 2-подгруппа G такая, что $a \in L$. Так как $Z(L) \leq C_G(a)$, то $a^2 \in Z(L)$, поэтому $L \leq C_G(a^2)$. Поскольку 4 делит $|N|$, 32 делит $|L|$, что противоречит условию $|C_G(a^2)| = 24$.

Предположим, что $\overline{G} \cong S_4$. Пусть K/N — нормальная подгруппа G/N порядка 5. По условию $K = a^G$ для некоторого $a \in G$. Отсюда следует, что $|a^G| = 4|N|$, таким образом, $|C_G(a)| = 5$. Поэтому $|a| = 5$, $K = N\langle a\rangle$ и a действует без неподвижных точек на N. Тогда K является группой Фробениуса с ядром N, тем самым N нильпотентна. Следовательно, G разрешима, поскольку G/N разрешима; противоречие.

Наконец, предположим, что $\overline{G} \cong Z_5 \rtimes_{\mathrm{Fpf}} Z_4$. Пусть T/N — нормальная силовская 5-подгруппа G/N. Тогда $T = N \cup x^G$ для некоторого $x \in G$. Поэтому $|x^G| = |T| - |N| = 4|N|$ и, следовательно, $|C_G(x)| = 5$. Таким образом, порядок x равен 5, и x действует на N сопряжением без неподвижных точек. По [21, теорема 10.5.4] N нильпотентна и, стало быть, G разрешима; противоречие. Теорема доказана.

Несложно получить

Следствие С. *Пусть m натуральное и $m > 2$. Если G несовершенная неразрешимая группа и $\mathscr{K}(G) = \{1, m, m+1, m+2\}$, то G примитивна.*

Доказательство. По теореме В получаем $\Phi(G) = 1$. Действительно, в противном случае G' содержится в $\Phi(G)$. Отсюда следует, что $G/\Phi(G)$ нильпотентна, тогда G нильпотентна; противоречие. Если для любой максимальной подгруппы M в G выполнено $\mathrm{Core}_G(M) \neq 1$, то $G' \leq \mathrm{Core}_G(M) \leq M$. Поэтому $G' \leq \Phi(G) = 1$; противоречие. Таким образом, найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $\mathrm{Core}_G(M) = 1$, поэтому G примитивна.

Авторы благодарны рецензенту за ценные предложения и полезные комментарии, отраженные в заключительной версии данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beltrán A., Felipe M. J.* Structure of finite groups under certain arithmetical conditions on class sizes // J. Algebra. 2008. V. 319. P. 897–910.
2. *Chillag D., Herzog M.* On the length of conjugacy classes of finite groups // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 110–125.
3. *Guo X., Zhao X., Shum K. P.* On p-regular G-conjugacy classes and the p-structure of normal subgroups, // Comm. Algebra. 2009. V. 37. P. 2052–2059.
4. *López A. V., López J. V.* Classification of finite groups according to the number of conjugacy classes. II // Israel J. Math. 1986. V. 56. P. 188–221.
5. *Zhao X. H., Guo X. Y.* On conjugacy class sizes of the p'-elements with prime power order // Algebra Colloq. 2009. V. 16, N 4. P. 541–548.
6. *Ashrafi A. R., Sahraei H.* On finite groups whose every normal subgroup is a union of the same number of conjugacy classes // Vietnam J. Math. 2002. V. 30, N 3. P. 289–294.

7. *Ashrafi A. R., Venkatraman G.* On finite groups whose every proper normal subgroup is a union of a given number of conjugacy classes // Proc. Indian Acad. Sci. 2004. V. 114, N 3. P. 217–224.
8. *Riese U., Shahabi M. A.* Subgroups which are the union of four conjugacy classes // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 2. P. 695–701.
9. *Shahryari M., Shahabi M. A.* Subgroups which are the union of three conjugacy classes // J. Algebra. 1998. V. 207. P. 326–332.
10. *Shi W.* A class of special minimal normal subgroups (Chinese) // J. Southwest Teachers College. 1984. V. 9. P. 9–13.
11. *Ashrafi A. R., Sahraei H.* Subgroups which are a union of a given number of conjugacy classes // Groups St. Andrews 2001 in Oxford. V. 1. (Oxford, 2001). Cambridge: Camb. Univ. Press, 2001. P. 101–109 (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 304).
12. *Ashrafi A. R.* On decomposability of finite groups // J. Korean Math. Sci. 2004. V. 41, N 3. P. 479–487.
13. *Ashrafi A. R., Shi W.* On 7- and 8-decomposable finite groups // Math. Slovaca. 2005. V. 55, N 3. P. 253–262.
14. *Ashrafi A. R., Shi W.* On 9- and 10-decomposable finite groups // J. Appl. Math. Comput. 2008. V. 26. P. 169–182.
15. *Wang J.* A special class of normal subgroups (Chinese) // J. Chengdu Univ. Sci. Tech. 1987. V. 4. P. 115–119.
16. *Го Х., Ли Дж., Шум К. П.* О конечных X-разложимых группах при $X = \{1, 2, 4\}$ // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 558–565.
17. *Guo X., Chen R.* On finite X-decomposable groups for $X = \{1, 2, 3, 4\}$ // Bull. Iranian Math. Soc. 2014. V. 40, N 5. P. 1243–1262.
18. *Schonert M. et al.* GAP: Groups, algorithms and programming. Lehrstuhl de fur Mathematik. Aachen: RWTH, 1992.
19. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Dover, 1994.
20. *Xu M.* Introduction to finite groups (Chinese). Beijing: Science Press, 1987.
21. *Robinson J. S.* A course in the theory of groups. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1991.

Статья поступила 27 июля 2016 г.

Ruifang Chen (Чень Жуйфан)
College of Mathematics and Information Science,
Henan Normal University,
Henan 453007, P. R. China
fang119128@126.com

Xiuyun Guo (Го Сююнь)
Department of Mathematics,
Shanghai University,
Shanghai, 200444, P. R. China
xyguo@shu.edu.cn

Kar Pign Shum (Шум Кар Пинь)
Institute of Mathematics,
Yunnan University,
Kunming 650091, P. R. China
kpshum@ynu.edu.cn