Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 512.55

ДУАЛЬНО АВТОМОРФИЗМ–ИНВАРИАНТНЫЕ МОДУЛИ НАД СОВЕРШЕННЫМИ КОЛЬЦАМИ

А. Н. Абызов, Ч. К. Куинь, Д. Д. Тай

Аннотация. Изучаются дуально автоморфизм-инвариантные модули и псевдопроективные модули. Найдены условия, при которых дуально автоморфизм-инвариантный модуль над совершенным кольцом квазипроективен. Также показано, что если R — совершенное справа кольцо, то псевдопроективный правый R-модуль M конечно порожденный в точности тогда, когда M — модуль Хопфа.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.501

Ключевые слова: дуально автоморфизм-инвариантный модуль, псевдопроективный модуль, совершенное кольцо, модуль Хопфа.

1. Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными. Подмодуль N модуля M называется *малым* в M, если $N + N' \neq M$ для каждого собственного подмодуля N' модуля M. Тот факт, что N является подмодулем (малым подмодулем) модуля M, будем обозначать через $N \leq M$ (соответственно через $N \ll M$). Модуль M называется *дуально автоморфизм-инвариантным*, если для каждых малых подмодулей K_1, K_2 модуля M каждый эпиморфизм $f : M/K_1 \to M/K_2$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \ll M/K_1$, поднимается до некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$. Дуально автоморфизм-инвариантные модули были впервые изучены в [1]. Модуль M называется *квазипроективным* (*псевдопроективным*), если для каждого подмодуля N модуля M каждый гомоморфизм (эпиморфизм) $f : M \to M/N$ поднимается до некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$. Согласно [1, предложение 7] каждый псевдопроективный модуль является дуально автоморфизм-инвариантным. Обратное верно для правых модулей над совершенными справа кольцами (см. [2]). В последнее время дуально автоморфизм-инвариантные модули и их дуальные аналоги были изучены в работах [1–7].

В настоящей работе изучаются дуально автоморфизм-инвариантные модули и псевдопроективные модули. Основные полученные результаты связаны со свойствами дуально автоморфизм-инвариантных модулей на совершенными кольцами. В разд. 2 рассмотрены условия, при которых дуально автоморфизм-инвариантный модуль над совершенным кольцом квазипроективен. Также установлено, что произвольный правый модуль M над совершенным справа кольцом дуально автоморфизм-инвариантный в точности тогда, когда для каждого

The second author and third authors have been partially founded by the Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED) under grant number 101.04–2017.22.

подмодуля N модуля M всякий автоморфизм модуля M/N поднимается до автоморфизма модуля M. В разд. 3 показано, что если R — совершенное справа кольцо, то псевдопроективный правый R-модуль M является конечно порожденным в точности тогда, когда M — модуль Хопфа.

Через $J(R)$ и $J(M)$ будем соответственно обозначать радикал Джекобсона кольца R и модуля M. Тот факт, что правые R-модули M и N изоморфны, обозначается через $M \cong N$. Кольцо эндоморфизмов и группу автоморфизмов правого R-модуля M будем обозначать соответственно через $\mathrm{End}(M)$ и $\mathrm{Aut}(M)$.

В работе используются стандартные понятия и обозначения теории колец (см., например, [8–10]).

2. Дуально автоморфизм-инвариантные модули

Эпиморфизм $f : P \to M$ правых R-модулей называется *проективной оболочкой* модуля M, если P — проективный модуль и $\mathrm{Ker}(f) \ll P$.

Лемма 1. *Пусть $M_1 \oplus M_2$ — дуально автоморфизм-инвариантный модуль и $p_1 : P_1 \to M_1$, $p_2 : P_2 \to M_2$ — проективные оболочки. Если $P_1 \cong P_2$, то $M_1 \cong M_2$.*

Доказательство. По предположению существуют такие подмодули K_1, K_2 модуля P_1, что $K_1, K_2 \ll P_1$ и $M_1 \cong P_1/K_1$, $M_2 \cong P_1/K_2$. Тогда гомоморфизм $\pi : P_1 \times P_1 \to P_1/K_1 \times P_1/K_2$, действующий по правилу $\pi(x, y) = (x + K_1, y + K_2)$ для каждых $x, y \in P_1$, является проективной оболочкой модуля $P_1/K_1 \times P_1/K_2$. Рассмотрим автоморфизм φ модуля $P_1 \times P_1$, действующий по правилу $\varphi(x, y) = (y, x)$ для каждых $x, y \in P_1$. Так как $P_1/K_1 \times P_1/K_2 \cong M_1 \oplus M_2$ — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, из [1, теорема 2.7] следует равенство $\varphi(K_1 \times K_2) = K_1 \times K_2$. Таким образом, $K_1 = K_2$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\pi : P \to M$ — проективная оболочка дуально автоморфизм-инвариантного модуля M и $P = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$. Если $P_1 \cong P_2$, то*

(1) $\mathrm{Ker}(\pi) = (P_1 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \mathrm{Ker}(\pi))$;

(2) $M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, *где*

$$M_1 = \frac{P_1 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)} \cong \frac{P_2 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)} = M_2, \quad M_3 = \frac{P_3 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)}.$$

Доказательство. Согласно условию исходной леммы существует изоморфизм $f : P_1 \to P_2$. Пусть $\pi_i : P \to P_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — канонические проекции. Рассмотрим отображения

$$\begin{array}{llll} \phi_1 : & P & \to & P \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \mapsto & x_1 + (x_2 + f(x_1)) + x_3 \quad \forall x_1 \in P_1,\ x_2 \in P_2,\ x_3 \in P_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \phi_2 : & P & \to & P \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \mapsto & (x_1 + f^{-1}(x_2)) + x_2 + x_3 \quad \forall x_1 \in P_1,\ x_2 \in P_2,\ x_3 \in P_3. \end{array}$$

Очевидно, ϕ_1 и ϕ_2 — автоморфизмы модуля P. Поскольку M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, из [1, теорема 2.7] следует, что $\phi_1(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$ и $\phi_2(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$. Пусть $m \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Для некоторых элементов $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$ и $x_3 \in P_3$ имеет место равенство $m = x_1 + x_2 + x_3$. Так как

$$f(x_1) = \phi_1(m) - m, \quad f^{-1}(x_2) = \phi_2(m) - m \in \mathrm{Ker}(\pi),$$

то

$$x_1 = \phi_2(f(x_1)) - f(x_1), \quad x_2 = \phi_1(f^{-1}(x_2)) - f^{-1}(x_2) \in \mathrm{Ker}(\pi).$$

Следовательно, $x_3 \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом,

$$\operatorname{Ker}(\pi) = (P_1 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \operatorname{Ker}(\pi))$$

и

$$M \cong \frac{P}{\operatorname{Ker}(\pi)} \cong \frac{P_1 \oplus P_2 \oplus P_3}{(P_1 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \operatorname{Ker}(\pi))}$$
$$\cong \frac{P_1}{P_1 \cap \operatorname{Ker}(\pi)} \oplus \frac{P_2}{P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi)} \oplus \frac{P_3}{P_3 \cap \operatorname{Ker}(\pi)} \cong M_1 \oplus M_2 \oplus M_3,$$

где

$$M_1 = \frac{P_1 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)}, \quad M_2 = \frac{P_2 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)}, \quad M_3 = \frac{P_3 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)}.$$

Поскольку M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, согласно [1, предложение 11] $M_1 \oplus M_2$ также является дульно автоморфизм-инвариантным модулем. Так как P_1 — проективная оболочка модуля M_1 и P_2 — проективная оболочка модуля M_2, из леммы 1 следует изоморфизм $M_1 \cong M_2$. $\square$

Предложение 3. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Если P — прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Согласно [11, следствие 5.3] имеет место равенство $f = e + g$, где $e \in \operatorname{End}_R(P)$ — идемпотент и $g \in \operatorname{Aut}(P)$. В силу [12, теорема 3.10] имеют место равенства

$$eP = \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad (1-e)P = \bigoplus_{i \in I'} B_i,$$

где A_i, B_j — локальные проективные модули для каждых $i \in I, j \in I'$. Пусть

$$\pi_i : \Big(\bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I'} B_i\Big) \to A_i, \quad \pi'_j : \Big(\bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I'} B_i\Big) \to B_j$$

— естественные проекции для каждых $i \in I, j \in I'$. Так как модули из множества $\{A_i\}_{i \in I} \cup \{B_i\}_{i \in I'}$ попарно изоморфны, из леммы 2 следует, что $\pi_i(\operatorname{Ker}(\pi)) \subset \operatorname{Ker}(\pi), \pi'_j(\operatorname{Ker}(\pi)) \subset \operatorname{Ker}(\pi)$ для каждых $i \in I, j \in I'$. Следовательно, $e(\operatorname{Ker}(\pi)) \subset \operatorname{Ker}(\pi)$. Поскольку M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, согласно [1, теорема 2.7] $g(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и, следовательно, согласно [10, 18.2] M — квазипроективный модуль. $\square$

Следствие 4. *Пусть R — локальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль квазипроективен.*

Кольцо, в котором каждый идемпотентный элемент центральный, называется *нормальным.*

Следствие 5. *Пусть R — нормальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль квазипроективен.*

Лемма 6. *Пусть M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль и $\pi : P \to M$ — его проективная оболочка. Если $P = P_1 \oplus P_2$ — разложение модуля P и $\alpha, 1-\alpha$ — автоморфизмы модуля P_1 для некоторого $\alpha \in \mathrm{End}(P_1)$, то*

$$\mathrm{Ker}(\pi) = (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2).$$

Доказательство. Пусть $P = P_1 \oplus P_2$ и существует такой автоморфизм α модуля P_1, что $1-\alpha$ также является автоморфизмом модуля P_1. Тогда $\alpha \oplus 1_{P_2}, (1-\alpha) \oplus 1_{P_2}$ — автоморфизмы модуля P. Так как M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, из [1, теорема 2.7] следуют равенства

$$(\alpha \oplus 1_{P_2})(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi), \quad [(1-\alpha) \oplus 1_{P_2}](\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi).$$

Пусть m — произвольный элемент из подмодуля $\mathrm{Ker}(\pi)$ и $m = p_1 + p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$, где $p_1 \in P_1$ и $p_2 \in P_2$. Тогда $\alpha(p_1) + p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$ и $p_1 - \alpha(p_1) + p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Следовательно, $p_1 + 2p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Тогда $p_1 = 2m - (p_1 + 2p_2) \in \mathrm{Ker}(\pi)$ и $p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Таким образом,

$$m = p_1 + p_2 \in (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2). \quad \square$$

Предложение 7. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Если для каждого прямого слагаемого P' модуля P существует такой гомоморфизм $\alpha \in \mathrm{End}(P')$, что $\alpha, 1-\alpha \in \mathrm{Aut}(P')$, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть M — дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Покажем, что $\mathrm{Ker}(\pi)$ является вполне инвариантным подмодулем модуля P. Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Согласно [11, следствие 5.3] имеет место равенство $f = e + g$, где $e \in \mathrm{End}_R(P)$ — идемпотент и $g \in \mathrm{End}_R(P)$ — автоморфизм. Предположим, что $e \neq 0$. Из условия исходного предложения следует, что $\alpha, 1-\alpha \in \mathrm{Aut}(eP)$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{End}_R(eP)$. Из леммы 6 вытекает равенство

$$\mathrm{Ker}(\pi) = [e(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi)] \oplus [(1-e)(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi)].$$

Следовательно, $e(\mathrm{Ker}(\pi)) \subset \mathrm{Ker}(\pi)$. Если $e = 0$, то включение $e(\mathrm{Ker}(\pi)) \subset \mathrm{Ker}(\pi)$ очевидно. Так как M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, согласно [1, теорема 2.7] $g(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P, тем самым согласно [10, 18.2] M — квазипроективный модуль. $\square$

Ненулевой идемпотент e из кольца R называется *локальным*, если eRe — локальное кольцо.

Следствие 8. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Тогда если $\mathrm{Aut}(eP/eJ(P))$ — неединичная группа для каждого локального идемпотента $e \in \mathrm{End}_R(P)$, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть P' — ненулевое прямое слагаемое модуля P. Согласно [12, теорема 3.10] имеет место изоморфизм $P' \cong e_1 R^{(A_1)} \oplus \cdots \oplus e_n R^{(A_n)}$, где $e_1, \ldots, e_n$ — попарно не эквивалентные примитивные идемпотенты из кольца R. Из [10, 22.2] следуют изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_R(P')/J(\mathrm{End}_R(P')) &\cong \mathrm{End}_R(P'/J(P')) \\ &\cong \mathrm{End}_R((e_1R/e_1J(R))^{(A_1)}) \times \cdots \times \mathrm{End}_R(e_nR/e_nJ(R)^{(A_n)}). \end{aligned}$$

Значит, для некоторого целого числа $k \geq 1$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{End}_R(P')/J(\mathrm{End}_R(P')) \cong \mathrm{End}_{T_1}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_{T_k}(V_k),$$

где $V_1, \ldots, V_k$ — ненулевые векторные пространства соответственно над телами $T_1, \ldots, T_k$. Из условия следствия 8 вытекает, что $|T_i| > 2$ для каждого i. Очевидно, существует такой элемент $\bar{\alpha} = \alpha + J(\mathrm{End}_R(P')) \in \mathrm{End}_R(P')/J(\mathrm{End}_R(P'))$, что $1-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}$ обратимы в кольце $\mathrm{End}_R(P')/J(\mathrm{End}_R(P'))$. Следовательно, $\alpha, 1-\alpha \in \mathrm{Aut}(P')$, и по предложению 7 M — квазипроективный модуль. $\square$

Следствие 9. *Пусть R — совершенное справа кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль квазипроективен.*

Доказательство. Если кольцо R удовлетворяет условию следствия 9, то $\mathrm{End}_R(eR/eJ(R)) \ncong \mathbb{Z}_2$ для каждого локального идемпотента e из кольца R. Тогда из следствия 8 вытекает, что каждый дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль квазипроективен. $\square$

Следствие 10. *Пусть R — совершенное справа кольцо, у которого 2 обратимо. Тогда каждый дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль квазипроективен.*

Следствие 11. *Пусть R — полусовершенное кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый конечно порожденный дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль квазипроективен.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 9. $\square$

Предложение 12. *Пусть M — дуально автоморфизм-инвариантный неразложимый модуль. Предположим, что модуль M и каждый его простой фактор-модуль обладают проективной оболочкой. Тогда либо M — локальный квазипроективный модуль, либо для каждого максимального подмодуля N модуля M группа $\mathrm{Aut}(M/N)$ единичная.*

Доказательство. Предположим, что существует такой максимальный подмодуль N модуля M, что группа $\mathrm{Aut}(M/N)$ не единичная. Пусть $S = M/N$ и $\pi : P \to M$ и $\pi_1 : P_1 \to S$ — проективные оболочки. Так как модуль P_1 изоморфен прямому слагаемому модуля P, без ограничения общности можно считать, что P_1 — прямое слагаемое модуля P и $P = P_1 \oplus P_2$, где $P_2 \leq P$. Заметим, что согласно [8, 11.4.1] P_1 — локальный модуль. Поскольку $|\mathrm{End}_R(S)| > 2$, существует такой гомоморфизм $\sigma \in \mathrm{End}_R(S)$, что $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$. Тогда σ и $1 - \sigma$ — автоморфизмы модуля S. Так как P_1 — проективный локальный модуль, существует автоморфизм σ_1 модуля P_1, для которого выполнено равенство $\sigma \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \sigma_1$. Тогда $(1 - \sigma) \circ \pi_1 = \pi_1 \circ (1 - \sigma_1)$ и, следовательно, $1 - \sigma_1$ — автоморфизм модуля P_1. По лемме 6 имеет место равенство

$$\mathrm{Ker}(\pi) = (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2).$$

Тем самым

$$M \cong \frac{P}{\mathrm{Ker}(\pi)} \cong \frac{P_1}{\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1} \oplus \frac{P_2}{\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2}.$$

Так как M — неразложимый модуль и $\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1 \ll P_1$, то $P_2 = \mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2$. Поскольку $\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2 \ll P_2$, то $P_2 = 0$. Таким образом, $P = P_1$. Покажем, что $\mathrm{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P. Пусть α —

произвольный эндоморфизм модуля P. Так как $\mathrm{End}(P)$ — локальное кольцо, $\alpha = e + \beta$, где β — автоморфизм модуля P и либо $e = 0$, либо $e = 1$. Поскольку M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, согласно [1, теорема 2.7] $\beta(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$. Следовательно, $\alpha(\mathrm{Ker}(\pi)) \le \mathrm{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P. Стало быть, согласно [10, 18.2] $M \cong P/\mathrm{Ker}(\pi)$ — квазипроективный модуль. □

Теорема 13. *Пусть R — полусовершенное кольцо. Тогда каждый конечно порожденный дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль псевдопроективен.*

Доказательство. Пусть M — дуально автоморфизм-инвариантный конечно порожденный правый R-модуль, N — подмодуль модуля M, $\pi : M \to M/N$ — естественный гомоморфизм и $f : M \to M/N$ – эпиморфизм правых R-модулей. Согласно [10, 42.6] модуль M обладает проективной оболочкой $\alpha : P \to M$. Из [10, 41.15, 42.6] следует, что для некоторых подмодулей P_1, P_2, P_1', P_2' модуля P выполнены условия

$$P = P_1 \oplus P_2, \quad P_1 \le \mathrm{Ker}(\pi\alpha), \quad P_2 \cap \mathrm{Ker}(\pi\alpha) \ll P_2,$$

$$P = P_1' \oplus P_2', \quad P_1' \le \mathrm{Ker}(f\alpha), \quad P_2' \cap \mathrm{Ker}(f\alpha) \ll P_2'.$$

Ясно, что $\pi\alpha|_{P_2}, f\alpha|_{P_2'}$ — проективные оболочки модуля M/N. Следовательно, существует изоморфизм $h_1 : P_2' \to P_2$, для которого выполнено равенство $\pi\alpha|_{P_2}h_1 = f\alpha|_{P_2'}$. Так как согласно [8, 11.4.2] P — конечная прямая сумма модулей, у которых кольца эндоморфизмов локальны, из теоремы Крулля — Ремака — Шмидта следует существование изоморфизма $h_2 : P_1' \to P_1$. Тогда $h_1 \oplus h_2$ — автоморфизм модуля P и из [1, теорема 2.7] вытекает равенство $h_1 \oplus h_2(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \mathrm{Ker}(\alpha)$. Следовательно, для некоторого гомоморфизма $h : M \to M$ имеет место равенство $\alpha(h_1 \oplus h_2) = h\alpha$. Так как $\pi\alpha|_{P_2}h_1 = f\alpha|_{P_2'}$ и $0 = \pi\alpha h_2(P_1') = f\alpha(P_1')$, то $\pi\alpha(h_1 \oplus h_2) = f\alpha$. Тогда $f\alpha = \pi\alpha(h_1 \oplus h_2) = \pi h\alpha$. Поскольку α — сюръективный гомоморфизм, $f = \pi h$. □

Замечание 14. Теорема 13 установлена в [2]. Приведенное выше доказательство этой теоремы новое.

Правый R-модуль M называется *строго автоморфизм-продолжаемым,* если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля N может быть продолжен до автоморфизма f' модуля M. Понятие строго автоморфизм-продолжаемого модуля впервые было рассмотрено в [6, 7]. Определим понятие дуально строго автоморфизм-продолжаемого модуля. Правый R-модуль M называется *дуально строго автоморфизм-продолжаемым,* если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до автоморфизма f' модуля M:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/N \arrow[r, "f"] & M/N \end{tikzcd}.$$

Напомним понятия, которые будут использованы в дальнейшем. Подмодуль B модуля M называется *аддитивным дополнением для A в M*, если $A+B = M$ и B — наименьший элемент в множестве всех подмодулей $X \le M$, для которых выполнено равенство $A+X = M$. Модуль M называется *дополняемым*, если каждый его подмодуль обладает аддитивным дополнением в M. Если для каждых подмодулей A, B модуля M, для которых выполнено равенство $A+B=M$, существует такое аддитивное дополнение C для A в M, что $C \subset B$, то модуль M называется *строго дополняемым.* Модуль M называется *слабо дополняемым,* если для каждого его подмодуля A существует такой подмодуль B модуля M, что $A+B=M$ и $A \cap B \ll M$.

Предложение 15. *Каждый дуально автоморфизм-инвариантный слабо дополняемый модуль дуально строго автоморфизм-продолжаем.*

Доказательство. Пусть X — подмодуль модуля M и $f: M/X \to M/X$ — автоморфизм. Согласно условию существует такой подмодуль Y модуля M, что $X+Y=M$ и $X \cap Y \ll M$. Ясно, что $M/Y \cap X = X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y$. Пусть $\pi: X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y \to Y/X \cap Y$ — каноническая проекция и $g: M/X \cap Y \to M/X$ — естественный гомоморфизм. Так как $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Ker}(g)$, существует изоморфизм $\phi: Y/X \cap Y \to M/X$, для которого выполнено равенство $\phi\pi = g$. Рассмотрим отображение $h: X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y \to X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y$, действующее по правилу $h(a+b) = a + \phi^{-1} f \phi(b)$, где $a \in X/X \cap Y$, $b \in Y/X \cap Y$. Несложно заметить, что h — изоморфизм модулей и $\phi^{-1} f \phi \pi = \pi h$. Таким образом, $fg = gh$. Так как M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль, по [1, следствие 2] существует автоморфизм $h': M \to M$, для которого выполнено равенство $hg' = g'h'$, где $g': M \to M/X \cap Y$ — естественный гомоморфизм. Таким образом, $fgg' = gg'h'$. $\square$

Радикальным рядом модуля M называется убывающая цепочка

$$M \supset J^1(M) = J(M) \supset \dots \supset J^\alpha(M) \supset J^{\alpha+1}(M) \supset \dots,$$

где $J^\alpha(M) = J(J^{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа α и $J^\alpha(M) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} J^\beta(M)$ для каждого предельного ординального числа α.

Лемма 16. *Пусть P — псевдопроективный правый R-модуль, A — малый подмодуль модуля P и для каждого ординала α обозначим через P_α подмодуль модуля P, удовлетворяющий условиям $A \leq P_\alpha$ и $P_\alpha/A = J^\alpha(P/A)$. Если $J(P) \ll P$ и P/A — дуально строго автоморфизм-продолжаемый модуль, то для каждого автоморфизма f модуля P и каждого ординала α выполнено равенство $f(P_\alpha) = P_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $M = P/A$ — дуально строго автоморфизм-продолжаемый модуль и $f: P \to P$ — автоморфизм модуля P. Предположим, что $f(P_\alpha) \neq P_\alpha$ для некоторого ординала α. Пусть α_0 — наименьший ординал, для которого выполнено условие $f(P_{\alpha_0}) \neq P_{\alpha_0}$. Несложно заметить, что α_0 — непредельный ординал. Так как $A \ll P$ и $P_1/A = J(P/A)$, то $P_1 = J(P)$ и, следовательно, $f(P_1) = P_1$. Таким образом, $\alpha_0 > 1$. Пусть $h_1: P \to P/A$, $h_2: P/A \to P/P_{\alpha_0-1}$ — естественные гомоморфизмы. В силу выбора ординала α_0 имеет место равенство $f(P_{\alpha_0-1}) = P_{\alpha_0-1}$. Тогда автоморфизм f индуцирует автоморфизм $f': P/P_{\alpha_0-1} \to P/P_{\alpha_0-1}$, для которого выполнено равенство $h_2h_1f = f'h_2h_1$. Ввиду того, что P/A — дуально строго автоморфизм-продолжаемый модуль, для некоторого автоморфизма $g: P/A \to P/A$ выполнено равенство $h_2g = f'h_2$. Поскольку P — псевдопроективный модуль, для некоторого гомоморфизма $g': P \to P$ выполнено равенство $h_1g' = gh_1$. Тогда выполнены равенства $h_2h_1f = f'h_2h_1, h_2h_1g' = f'h_2h_1$ и, следовательно,

$$(f-g')(P) \leq P_{\alpha_0-1} \leq J(P) \ll P.$$

Так как P — псевдопроективный модуль, по [13, 4.25] $f - g' \in J(\mathrm{End}(P))$. Следовательно, g' — автоморфизм модуля P. В силу того, что $h_1 g' = g h_1$ и для любого ординала α верно равенство $g(P_\alpha/A) = P_\alpha/A$, для каждого ординала α имеет место равенство $g'(P_\alpha) = P_\alpha$. Поскольку

$$(f - g')(P_{\alpha_0 - 1}) \leq (f - g')(J(P)) \leq J(P_{\alpha_0 - 1})$$

и

$$h_1(J(P_{\alpha_0-1})) \leq J(P_{\alpha_0-1}/A) = J(J^{\alpha_0-1}(P/A)) = J^{\alpha_0}(P/A) = P_{\alpha_0}/A,$$

то $h_1((f - g')(P_{\alpha_0-1})) \leq P_{\alpha_0}/A$, следовательно, $(f - g')(P_{\alpha_0-1}) \leq P_{\alpha_0}$. Тогда

$$f(P_{\alpha_0}) \leq (f - g')(P_{\alpha_0}) + g'(P_{\alpha_0}) \leq (f - g')(P_{\alpha_0-1}) + P_{\alpha_0} \leq P_{\alpha_0}.$$

Так как

$$f(P_{\alpha_0}) \leq P_{\alpha_0}, \quad f(P_{\alpha_0}) \neq P_{\alpha_0}, \quad f(P_{\alpha_0-1}) = P_{\alpha_0-1},$$

существует такой элемент $p \in P_{\alpha_0-1} \setminus P_{\alpha_0}$, что $f(p) \in P_{\alpha_0}$. Поскольку

$$f(p) = (f - g')(p) + g'(p), \quad f(p), (f - g')(p) \in P_{\alpha_0},$$

то $g'(p) \in P_{\alpha_0}$. С другой стороны, из равенства $g'(P_{\alpha_0}) = P_{\alpha_0}$ следует, что $p \in P_{\alpha_0}$. Получили противоречие. Таким образом, для каждого ординала α выполнено равенство $f(P_\alpha) = P_\alpha$. $\square$

В [6] показано, что полуартиновый модуль M автоморфизм-инвариантен в точности тогда, когда M — строго автоморфизм-продолжаемый модуль. Двойственным аналогом этого утверждения является

Теорема 17. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Тогда для правого R-модуля M следующие условия равносильны:*

(1) M *— дуально строго автоморфизм-продолжаемый модуль;*

(2) M *— дуально автоморфизм-инвариантный модуль.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть M — дуально строго автоморфизм-продолжаемый модуль и $h : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Без ограничения общности можно считать, что $M = P/\mathrm{Ker}(h)$. Согласно [9, теорема 6.48] над кольцом R каждый правый модуль является max-модулем. Следовательно, по [14, предложение 2.2] для некоторого ординала α имеет место равенство $J^\alpha(M) = 0$. Тогда ввиду леммы 16 для каждого автоморфизма $g : P \to P$ имеет место равенство

$$g(\mathrm{Ker}(h)) = g(h^{-1}(J^\alpha(M))) = h^{-1}(J^\alpha(M)) = \mathrm{Ker}(h).$$

Значит, согласно [1, теорема 2.7] M — дуально автоморфизм-инвариантный модуль.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает из предложения 15 и того факта, что каждый правый модуль над совершенным справа кольцом строго дополняем. $\square$

Модуль M назовем *строго псевдопроективным*, если для каждого подмодуля N модуля M и каждого гомоморфизма $f : M \to M/N$, у которого $\mathrm{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля M/N, существует такой гомоморфизм $g : M \to M$, что $f = pg$, где $p : M \to M/N$ — естественный гомоморфизм. Если для каждого подмодуля N модуля M существуют такие подмодули M_1, M_2 модуля M, что выполнены условия

$$M = M_1 \oplus M_2, \quad M_1 \leq N, \quad M_2 \cap N \ll M_2,$$

то модуль M называется *модулем со свойством подъема.*

Предложение 18. *Каждый строго псевдопроективный строго дополняемый модуль является модулем со свойством подъема.*

Доказательство. Пусть M — строго псевдопроективный строго дополняемый модуль и N — аддитивное дополнение для подмодуля M' в модуле M. Рассмотрим аддитивное дополнение N' для подмодуля N в модуле M, для которого выполнено включение $N' \subset M'$. Пусть $p : M \to M/N$ — канонический гомоморфизм. Тогда $p|_{N'} : N' \to M/N$ — эпиморфизм. Следовательно, гомоморфизм $p|_{N'}$ индуцирует изоморфизм $\phi : N'/\operatorname{Ker}(p|_{N'}) \to M/N$. Так как M — строго псевдопроективный модуль и $M/\operatorname{Ker}(p|_{N'}) = N/\operatorname{Ker}(p|_{N'}) \oplus N'/\operatorname{Ker}(p|_{N'})$, существует гомоморфизм $\alpha : M \to M$, для которого выполнено равенство $\phi^{-1} \circ p = p' \circ \alpha$, где $p' : M \to M/\operatorname{Ker}(p|_{N'})$ — канонический гомоморфизм. Поскольку

$$(\alpha(M) + \operatorname{Ker}(p|_{N'}))/\operatorname{Ker}(p|_{N'}) = p' \circ \alpha(M) = \phi^{-1} \circ p(M) \subset N'/\operatorname{Ker}(p|_{N'}),$$

то $\alpha(M) \le N'$. Пусть m — произвольный элемент модуля M. Для некоторых элементов $n_1 \in N$, $n_2 \in N'$ имеет место равенство $m = n_1 + n_2$. Так как

$$\alpha(m) + \operatorname{Ker}(p|_{N'}) = p' \circ \alpha(m) = \phi^{-1} \circ p(m) = \phi^{-1}(n_2 + N) = n_2 + \operatorname{Ker}(p|_{N'}),$$

то $\alpha(m) - m = \alpha(m) - n_2 - n_1 \in N$. Таким образом, имеет место равенство $M = N + \alpha(M)$ и $\alpha(M) \le N'$. Следовательно, $N' = \alpha(M) = \alpha(N) + \alpha(N')$. Поскольку $\alpha(n) + N = n + N$ для каждого $n \in N$, то $\alpha(N) \le N$ и $M = N + \alpha(N')$. Тогда $\alpha(N') = \alpha(M) = N'$ и, стало быть, $M = N' + \operatorname{Ker}(\alpha)$. Из равенства $\phi^{-1} \circ p = p' \circ \alpha$ следует включение $\operatorname{Ker}(\alpha) \le N$. Значит, $N = \operatorname{Ker}(\alpha)$. Пусть $m \in \operatorname{Ker}(p|_{N'}) = N \cap N'$. Так как $\alpha(N') = N'$, то $m = \alpha(m')$ для некоторого элемента $m' \in N'$. Тогда $(\phi^{-1} \circ p)(m') = (p' \circ \alpha)(m') = 0$. Следовательно, $m' \in N$ и $m = \alpha(m') = 0$. Таким образом, $M = N \oplus N'$. □

Теорема 19. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Тогда для правого R-модуля M следующие условия равносильны:*
(1) *M — строго псевдопроективный модуль;*
(2) *M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Импликация (2) ⇒ (1) очевидна.

(1) ⇒ (2) Пусть M — строго псевдопроективный модуль. Из предложения 18 следует, что M — модуль со свойством подъема. Тогда из [1, теорема 30] вытекает, что M — квазипроективный модуль. □

3. (Обобщенные) модули Хопфа и псевдопроективные модули

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется *модулем Хопфа* (соответственно *кохопфа*), если каждый сюръективный (соответственно инъективный) эндоморфизм модуля M является автоморфизмом. Следуя [15], назовем модуль M *обобщенным модулем Хопфа,* если у каждого сюръективного гомоморфизма модуля M ядро мало в M.

Лемма 20. *Следующие условия равносильны для дуально автоморфизм-инвариантного модуля M:*
(1) *M — модуль Хопфа;*
(2) *M — обобщенный модуль Хопфа.*

Доказательство. Утверждение следует из [1, лемма 1]. □

Предложение 21. *Пусть M — псевдопроективный модуль. Тогда M является модулем Хопфа в точности тогда, когда M/N — обобщенный модуль Хопфа для каждого $N \ll M$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что M — модуль Хопфа и N — малый подмодуль модуля M. Пусть $\bar{f} : M/N \to M/N$ — эпиморфизм и $\pi : M \to M/N$ — естественный гомоморфизм. Так как модуль M псевдопроективен, существует такой гомоморфизм $f : M \to M$, что $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$. Поскольку $\operatorname{Ker}(\pi) \ll M$ и $\bar{f}\pi$ — эпиморфизм, f — эпиморфизм. Следовательно, f — изоморфизм и $f^{-1}(N) \ll M$. С другой стороны, для каждого $x \in M$ имеем $\bar{f}(x+N) = \bar{f}\circ\pi(x) = \pi\circ f(x) = f(x)+N$. Тогда $f(N) \leq N$ и $\operatorname{Ker}(\bar{f}) = f^{-1}(N)/N$. Поэтому $\operatorname{Ker}(\bar{f}) \ll M/N$. Таким образом, M/N — обобщенный модуль Хопфа.

($\Leftarrow$) Импликация следует из леммы 20. $\square$

Следствие 22. *Если M — конечно порожденный псевдопроективный модуль, то M является модулем Хопфа в точности тогда, когда $M/J(M)$ — обобщенный модуль Хопфа.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть M — конечно порожденный псевдопроективный модуль Хопфа. Тогда $J(M) \ll M$ и согласно предложению 21 $M/J(M)$ — обобщенный модуль Хопфа.

($\Leftarrow$) Импликация следует из леммы 20 и [15, теорема 1.1(6)] . $\square$

Лемма 23. *Пусть M — псевдопроективный правый R-модуль. Тогда M не является модулем Хопфа в точности тогда, когда для каждого натурального числа n существует разложение*

$$M = M_n \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} K_i\right),$$

где $M_n \cong M$ и $K_i \neq 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Предположим, что M не является модулем Хопфа. Тогда существует такой эпиморфизм φ модуля M, что $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq 0$. Покажем, что для каждого натурального числа n существует разложение

$$M = M_n \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} K_i\right),$$

где $M_n \cong M$ и $K_i \neq 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Достаточно показать, что для некоторого подмодуля M_1 модуля M имеет место равенство $M = \operatorname{Ker}(\varphi) \oplus M_1$ и $M \cong M_1$.

Ясно, что существует изоморфизм $\phi : M \to M/\operatorname{Ker}(\varphi)$. Пусть $p : M \to M/\operatorname{Ker}(\varphi)$ — естественный гомоморфизм. Так как M — псевдопроективный модуль, существует такой эндоморфизм g модуля M, что $p \circ g = \phi$, где $p : M \to M/\operatorname{Ker}(\varphi)$ — канонический гомоморфизм:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "\phi"] & \\
M \arrow[r, "p"] & M/\operatorname{Ker}(\varphi) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}\ .$$

Тогда p — расщепляющийся эпиморфизм и, следовательно, имеет место равенство $M = M_1 \oplus \operatorname{Ker}(\varphi)$. $\square$

Следствие 24 [16, теорема 18]. *Пусть R — полусовершенное кольцо и P — проективный правый R-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *P — модуль Хопфа;*

(2) *P — конечно порожденный модуль.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортогональные примитивные идемпотенты кольца R, в сумме дающие единицу. Согласно [12, теорема 3.10] имеет место изоморфизм $P \cong e_1 R^{(A_1)} \oplus \dots \oplus e_n R^{(A_n)}$. Несложно заметить, что для некоторого ненулевого правого R-модуля K имеет место изоморфизм $P \cong P \oplus K$ в точности тогда, когда для некоторого $1 \le i \le m$ множество A_i бесконечно. Тогда эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) непосредственно следует из леммы 23. $\square$

Лемма 25. *Пусть $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Если M — псевдопроективный модуль, то $\varphi(\mathrm{Ker}(\pi)) \le \mathrm{Ker}(\pi)$ для каждого эпиморфизма φ модуля P.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $M = P/\mathrm{Ker}(\pi)$. Пусть $\varphi : P \to P$ — эпиморфизм, $T = \mathrm{Ker}(\pi) + \varphi(\mathrm{Ker}(\pi))$ и $\pi' : P/\mathrm{Ker}(\varphi) \to P/T$ — естественный гомоморфизм. Эпиморфизм φ индуцирует эпиморфизм $\phi : P/\mathrm{Ker}(\pi) \to P/T$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P/\mathrm{Ker}(\pi) \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\phi"] \\ P/\mathrm{Ker}(\pi) \arrow[r, "\pi'"] & P/[\mathrm{Ker}(\pi) + \varphi(\mathrm{Ker}(\pi))] = P/T\ . \end{tikzcd}$$

Поскольку $P/\mathrm{Ker}(\pi)$ — псевдопроективный модуль, существует такой гомоморфизм $\beta : P/\mathrm{Ker}(\pi) \to P/\mathrm{Ker}(\pi)$, что $\pi' \circ \beta = \phi$. Пусть $p : P \to P/\mathrm{Ker}(\pi)$ — естественный гомоморфизм. Из проективности модуля P следует существование гомоморфизма $\alpha : P \to P$, для которого имеет место равенство $p \circ \alpha = \beta \circ p$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, dotted, "\alpha"'] & P/\mathrm{Ker}(\pi) \arrow[d, "\beta"] & \\ P \arrow[r, "p"] & P/\mathrm{Ker}(\pi) \arrow[r] & 0\ . \end{tikzcd}$$

Введем обозначение $X := \{x \in P \mid \varphi(x) - \alpha(x) \in \mathrm{Ker}(\pi)\}$. Так как $\phi \circ p = \pi' \circ \beta \circ p = \pi' \circ p \circ \alpha$, для каждого $x \in P$ имеет место равенство $\phi(x) + T = \alpha(x) + T$ и, следовательно, $(\varphi - \alpha)(P) \le T$. Из определения подмодуля T следует, что для каждого $x \in P$ выполнено равенство $\varphi(x) - \alpha(x) = k_1 + \varphi(k_2)$, где $k_1, k_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$ и, значит, $x - k_2 \in X$. Таким образом, $X + \mathrm{Ker}(\pi) = P$. Поскольку $\mathrm{Ker}(\pi) \ll P$, то $X = P$. С другой стороны, $\alpha(\mathrm{Ker}(\pi)) \le \mathrm{Ker}(\pi)$, и, следовательно, $\varphi(\mathrm{Ker}(\pi)) \le \mathrm{Ker}(\pi)$. $\square$

Теорема 26. *Пусть M — псевдопроективный модуль и $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Тогда M — модуль Хопфа в точности тогда, когда P — модуль Хопфа.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $M \cong P/\mathrm{Ker}(\pi)$ — псевдопроективный модуль Хопфа. Покажем, что P — модуль Хопфа. Пусть $f : P \to P$ — эпиморфизм. Так как M — псевдопроективный модуль, по лемме 25 $f(\mathrm{Ker}(\pi)) \le \mathrm{Ker}(\pi)$. Следовательно, гомоморфизм f индуцирует эпиморфизм $\bar{f} : P/\mathrm{Ker}(\pi) \to P/\mathrm{Ker}(\pi)$. Поскольку $P/\mathrm{Ker}(\pi)$ — модуль Хопфа, $\bar{f}$ — изоморфизм. Если

$x \in \operatorname{Ker}(f)$, то $\bar{f}(x + \operatorname{Ker}(\pi)) = 0$ или $x \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(f) \leq \operatorname{Ker}(\pi)$. Так как $\operatorname{Ker}(\pi) \ll P$, то $\operatorname{Ker}(f) \ll P$. Следовательно, по лемме 20 P — модуль Хопфа.

($\Leftarrow$) Пусть P — модуль Хопфа и $\bar{f} : P/\operatorname{Ker}(\pi) \to P/\operatorname{Ker}(\pi)$ — эпиморфизм. Существует такой гомоморфизм $f : P \to P$, что $\bar{f} \circ p = p \circ f$, где $p : P \to P/\operatorname{Ker}(\pi)$ — естественный гомоморфизм. Так как $\operatorname{Ker}(\pi) \ll P$, то f — эпиморфизм. Следовательно, f является изоморфизмом. Таким образом, $f^{-1}(\operatorname{Ker}(\pi)) \ll P$. Тогда $\operatorname{Ker}(\bar{f}) = f^{-1}(\operatorname{Ker}(\pi))/\operatorname{Ker}(\pi) \ll P/\operatorname{Ker}(\pi)$. Следовательно, согласно лемме 20 $M \cong P/\operatorname{Ker}(\pi)$ — модуль Хопфа. $\square$

Пусть P — поле, x — алгебраически независимый элемент над P и $P' = P(x)$. Согласно [17, пример 9] над кольцом $\begin{pmatrix} P & 0 \\ P' & P' \end{pmatrix}$ существует циклический правый модуль, который не является модулем Хопфа. Ясно, что R — совершенное кольцо. Таким образом, над совершенным кольцом, вообще говоря, не каждый конечно порожденный модуль является модулем Хопфа. С другой стороны, для псевдопроективных правых модулей над совершенными справа кольцами имеет место

Следствие 27. *Пусть R — совершенное справа кольцо и M — псевдопроективный правый R-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *M — модуль Хопфа;*

(2) *M — конечно порожденный модуль.*

Доказательство. Пусть M — псевдопроективный правый R-модуль и $f : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Несложно заметить, что модуль M является конечно порожденным в точности тогда, когда P — конечно порожденный модуль. Тогда эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из следствия 24 и теоремы 26. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Singh S., Srivastava A. K.* Dual automorphism-invariant modules // J. Algebra. 2012. V. 371, N 1. P. 262–275.
2. *Guil Asensio P. A., Keskin D. T., Kalebogaz B., Srivastava A. K.* Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers // J. Algebra. 2016. V. 466. P. 147–152.
3. *Guil Asensio P. A., Srivastava A. K.* Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property // J. Algebra. 2013. V. 388. P. 101–106.
4. *Koşan M. T., Quynh T. C., Srivastava A. K.* Rings with each right ideal automorphism-invariant // J Pure Appl. Algebra. 2015. V. 220, N 4. P. 1525–1537.
5. *Singh S., Srivastava A. K.* Rings with each right ideal automorphism-invariant // Ring theory and its applications. Providence RI: Amer. Math. Soc., 2014. P. 299–311. (Contemp. Math.; V. 609).
6. *Tuganbaev A. A.* Automorphism-invariant semi-Artinian modules // J. Algebra Appl. 2017. V. 16, N 2. P. 1750029 [5 pages].
7. *Tuganbaev A. A.* Automorphism-extendable modules // Discrete Math. Appl. 2015. V. 25, N 5. P. 305–309.
8. *Каш Ф.* Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
9. *Туганбаев А., А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М: МЦНМО, 2009.
10. *Wisbauer R.* Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach Sci. Publ., 1991.
11. *Camillo V. P., Khurana D., Lam T. Y., Nicholson W. K., Zhou Y.* Continuous modules are clean // J. Algebra. 2006. V. 304, N 1. P. 94–111.
12. *Facchini A.* Module theory. Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules. Basel: Birkhäuser, 1998.

13. *Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R.* Lifting modules. Supplements and projectivity in module theory. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2006.

14. *Shock R. C.* Dual generalizations of the artinian and noetherian conditions // Pacific J. Math. 1974. V. 54, N 2. P. 227–235.

15. *Ghorbani A., Haghany A.* Generalized Hopfian modules // J. Algebra. 2002. V. 255, N 2. P. 324–341.

16. *Hiremath V. A.* Hopfian rings and Hopfian modules // Indian J. Pure Appl. Math. 1986. V. 17, N 7. P. 895–900.

17. *Goodearl K. R.* Surjective endomorphisms of finitely generated modules // Commun. Algebra. 1987. V. 15, N 3. P. 589–609.

Статья поступила 2 сентября 2016 г.

Абызов Адель Наилевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 42000
`Adel.Abyzov@kpfu.ru`

Truong Cong Quynh (Куинь Чюонг Конг)
Department of Mathematics, Danang University,
459 Ton Duc Thang, Danang city, Vietnam
`tcquynhtcq@gmail.com, tcquynh@dce.udn.vn`

Dinh Duc Tai (Тай Динь Дык)
Faculty of Mathematics, Vinh University,
182 Le Duan street, Vinh City, Nghe An Province, Vietnam
`taidd@vinhuni.edu.vn`