

УДК 512.7

ГРУППЫ ВИРТУАЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

В. Г. Бардаков, Ю. А. Михальчишина,
М. В. Нецадим

Аннотация. Ранее авторами были построены два представления группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения свободной и свободной абелевой групп. С помощью этих представлений строятся две группы, каждая из которых является инвариантом виртуального зацепления. На примере виртуального трилистника показывается, что построенные группы не изоморфны, и устанавливается связь между этими группами, а также их связь с группой виртуального трилистника, определенной Картером, Сильвером и Вильямс.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.503

Ключевые слова: виртуальный узел, зацепление, группа.

Введение

В [1] были построены представления $\varphi_M : VB_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n,2n+1})$ и $\tilde{\varphi}_M : VB_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n,n})$ группы виртуальных кос VB_n в группу автоморфизмов свободного произведения свободной группы ранга n и свободной абелевой группы ранга $2n + 1$ и n соответственно. Представление φ_M обобщает все известные ранее представления (см. также [2], где рассмотрено представление, предложенное Камадой). Представление $\tilde{\varphi}_M$ является продолжением представления Артина классической группы кос в группу автоморфизмов свободной группы и равносильно представлению φ_M (равносильность означает, что эти представления оба либо точные, либо имеют нетривиальное ядро).

По представлениям φ_M и $\tilde{\varphi}_M$ могут быть определены группы $G_M(L)$ и $G_{\tilde{M}}(L)$ виртуального зацепления L . При этом можно использовать два подхода: косовой и диаграммный. В первом случае виртуальное зацепление представляется как замыкание виртуальной косы, а во втором — виртуальное зацепление представляется диаграммой.

В [1, предложение 6.3] было анонсировано, что группы, соответствующие представлению φ_M при косовом и диаграммном подходах, изоморфны. В данной работе приводится доказательство этого факта (см. предложение 1). Поэтому можно говорить о группе виртуального зацепления, построенной при помощи представления φ_M . Также в [1, теорема 6.1] была изложена схема доказательства того, что группа, построенная при диаграммном подходе, является инвариантом виртуального зацепления. В данной работе приводится доказательство инвариантности при косовом подходе (теорема 1). В основе приведенного доказательства лежит обобщение теоремы Маркова для виртуальных кос (см. [3, 4]). Как этап в доказательстве теоремы 1 доказана теорема 2, которая утверждает,

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (грант № 16-41-02006).

© 2017 Бардаков В. Г., Михальчишина Ю. А., Нецадим М. В.

что группа, построенная при косовом подходе на основе представления $\tilde{\varphi}_M$, является инвариантом виртуального зацепления. Также будет доказано, что для классического зацепления L группа $G_{\tilde{M}}(L)$ изоморфна свободному произведению фундаментальной группы дополнения зацепления в трехмерной сфере и некоторой свободной абелевой группы. Несмотря на то, что представления φ_M и $\tilde{\varphi}_M$ равносильны, группы, построенные по ним, не обязаны быть изоморфными. Покажем это для виртуального трилистника.

Принципиально другой подход к определению группы виртуального зацепления предложен в работе Картера, Сильвера и Вильямс [5], где группа виртуального зацепления определяется как фундаментальная группа дополнения некоторого классического зацепления в утолщенной поверхности.

В настоящей работе мы покажем, что группа виртуального трилистника, построенная по представлению φ_M , имеет гомоморфным образом группу виртуального трилистника, определенную в [5]. С другой стороны, группа виртуального трилистника, построенная по представлению $\tilde{\varphi}_M$, является гомоморфным образом группы виртуального трилистника, определенной в [5].

§ 1. Группы кос, виртуальных кос и их представления автоморфизмами

В работе используем следующие обозначения. Если a, b — элементы некоторой группы G , то $a^b = b^{-1}ab$ — сопряжение элемента a при помощи элемента b ; $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — коммутатор элементов a и b .

Напомним известные результаты о группах классических кос, группах виртуальных кос и их представлениях автоморфизмами (более подробно см. [6–12]).

Группа кос B_n на n , $n \geq 2$, нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2. \quad (2)$$

Существует гомоморфизм группы B_n на группу подстановок S_n , отображающий порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Группа виртуальных кос VB_n порождается группой классических кос $B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ и группой подстановок $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$. Порождающие σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, удовлетворяют соотношениям (1), (2), а порождающие ρ_i , $i = 1, \dots, n-1$, — следующим соотношениям (соотношения в группе подстановок S_n):

$$\rho_i^2 = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3)$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2, \quad (4)$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (5)$$

Остальные определяющие соотношения группы VB_n смешанные и имеют вид

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2, \quad (6)$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (7)$$

В [1] было определено представление φ_M группы виртуальных кос, которое обобщает все известные ранее. Пусть $F_{n,2n+1} = F_n * \mathbb{Z}^{2n+1}$ — свободное произведение, где F_n — свободная группа ранга n , порожденная элементами

x_1, x_2, \dots, x_n , а \mathbb{Z}^{2n+1} — свободная абелева группа, свободно порожденная элементами $u_1, u_2, \dots, u_n, v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$. Отображение $\varphi_M : VB_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n,2n+1})$, определенное действием на следующих порождающих:

$$\begin{aligned} \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v_0 u_{i+1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_0}, \end{cases} & \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} u_i \mapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \mapsto u_i, \end{cases} \\ \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} & \\ \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_{i+1}}, \end{cases} & \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} u_i \mapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \mapsto u_i, \end{cases} \\ \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} & \end{aligned}$$

задает представление группы VB_n в группу $\text{Aut}(F_{n,2n+1})$.

Представление φ_M не является продолжением представления Артина $B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$, которое, как известно, точное. Представление φ_M равносильно более простому представлению $\tilde{\varphi}_M$, которое является продолжением представления Артина. Чтобы его определить, положим $F_{n,n} = F_n * \mathbb{Z}^n$, где $F_n = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ — свободная группа ранга n , а $\mathbb{Z}^n = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ — свободная абелева группа ранга n . Представление $\tilde{\varphi}_M : VB_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n,n})$, заданное действием на следующих порождающих:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_M(\sigma_i) : \begin{cases} y_i \mapsto y_i y_{i+1} y_i^{-1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i, \end{cases} & \tilde{\varphi}_M(\sigma_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} \\ \tilde{\varphi}_M(\rho_i) : \begin{cases} y_i \mapsto y_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i^{v_{i+1}}, \end{cases} & \tilde{\varphi}_M(\rho_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} \end{aligned}$$

равносильно представлению φ_M , т. е. $\varphi_M(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}_M(\beta) = 1$, где $\beta \in VB_n [1]$.

§ 2. Группы зацеплений

Для нахождения генетического кода группы зацепления можно использовать два подхода. Первый подход — подход Виртингера, когда строим диаграмму зацепления и по ней находим порождающие и соотношения группы зацепления. Второй подход (косовый) основан на представлении зацепления в виде замкнутой косы и представлении группы кос в группу автоморфизмов некоторой группы. Оба эти подхода описаны в [7] для классических зацеплений и в [12] для виртуальных зацеплений.

Косовый подход. Предположим, что есть представление $\varphi : VB_n \rightarrow \text{Aut}(H)$ группы виртуальных кос в группу автоморфизмов некоторой группы $H = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \mid \mathcal{R} \rangle$, где \mathcal{R} — соотношения группы H . Сопоставим виртуальной косе $\beta \in VB_n$ следующую группу:

$$G_\varphi(\beta) = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \mid \mathcal{R}, h_i = \varphi(\beta)(h_i), i = 1, 2, \dots, m \rangle.$$

Группа $G_\varphi(\beta)$ будет инвариантом виртуального зацепления, если доказать, что для любой другой косы β' такой, что зацепления β и β' эквивалентны, $G_\varphi(\beta)$ изоморфна $G_\varphi(\beta')$.

Используем этот подход для представления φ_M . Пусть $\beta \in VB_n$ для некоторого n . Тогда группой косы β называется группа

$$G_M(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, v_0, v_1, \dots, v_n \mid [u_i, u_j] = [v_k, v_l] = [u_i, v_k] = 1, x_i = \varphi_M(\beta)(x_i), u_i = \varphi_M(\beta)(u_i), v_k = \varphi_M(\beta)(v_k), i, j = 1, 2, \dots, n, k, l = 0, 1, \dots, n \rangle.$$

Теорема 1 (см. [1, теорема 6.1]). Пусть $\beta \in VB_n$ и $\beta' \in VB_m$ — две виртуальные косы, замыкания которых определяют одно и то же зацепление L . Тогда $G_M(\beta) \cong G_M(\beta')$, т. е. группа $G_M(\beta)$ является инвариантом зацепления L и можно обозначать ее символом $G_M(\hat{\beta}) = G_M(L)$.

Эта теорема выводилась из того, что группы, соответствующие диаграммам зацеплений $\hat{\beta}$ и $\hat{\beta}'$ изоморфны. В §3 дадим доказательство этой теоремы, основанное на обобщении теоремы Маркова для виртуальных кос.

Диаграммный подход. Напомним, как находится группа виртуального зацепления по его диаграмме (см. [1]). Пусть D_L — диаграмма виртуального d -компонентного зацепления L . Каждой дуге диаграммы от одного перекрестка до другого (классического или виртуального) сопоставим свой порождающий. Получим некоторое множество порождающих a, b, c, \dots . Занумеруем все компоненты зацепления L числами от 1 до d и сопоставим i -й компоненте два порождающих u_i и v_i .

Группой диаграммы D_L называется группа, порожденная элементами $a, b, c, \dots, u_i, v_i, i = 1, \dots, d$, и определяемая системой соотношений, написанной по всем перекресткам (рис. 1, 2).

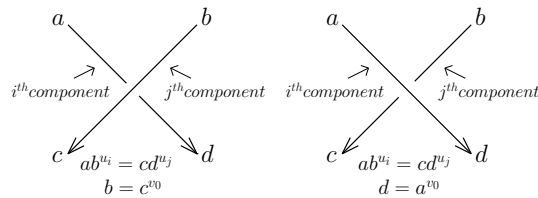


Рис. 1. Соотношения в классических перекрестках группы G_D

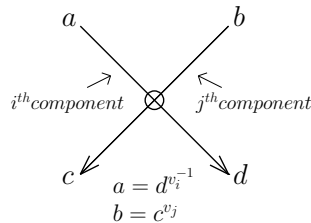


Рис. 2. Соотношения в виртуальном перекрестке группы G_D

Кроме того, все элементы u_i, v_j попарно перестановочны, т. е. группа $\langle u_1, \dots, u_d, v_0, v_1, \dots, v_d \rangle$ свободная абелева ранга $2d+1$. Обозначим полученную группу через $G_D(D_L)$.

Покажем, что группа виртуального зацепления L , построенная по косе, изоморфна группе, построенной по диаграмме. Более точно, справедливо

Предложение 1 (см. [1, предложение 6.3]). Пусть L — виртуальное зацепление, D_L — его диаграмма, β — виртуальная коса такая, что ее замыкание $\hat{\beta}$ эквивалентно L . Тогда группа $G_D(D_L)$ изоморфна группе $G_M(\beta)$.

Доказательство. Пусть β — виртуальная коса из группы VB_n для некоторого n . Будем рассматривать β как слово в алфавите $\{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}\}$. Каждый порождающий $\sigma_i^{\pm 1}$ и ρ_i имеет геометрическую интерпретацию и может быть представлен своей диаграммой. Поэтому коса β может быть представлена диаграммой, которая разбита на слои и в каждом слое которой есть только один перекресток: классический или виртуальный. Порождающие σ_i и σ_i^{-1} соответствуют классическим перекресткам, а порождающие ρ_i — виртуальным перекресткам. Если коса β является словом длины m в группе VB_n , то ее диаграмма содержит m слоев. Рассмотрим первый слой. Он состоит из n дуг. Средняя линия слоя разобьет эти дуги пополам. Сопоставим начальным половинам дуг символы $x_{1,j}, u_{1,j}, v_{1,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Следующим частям дуг, идущим до половины второго слоя, сопоставим символы $x_{2,j}, u_{2,j}, v_{2,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Продолжая этот процесс, разобьем диаграмму косы β на $n(m+1)$ дуг.

Будем двигаться по косе снизу вверх, т. е. читать слово β справа налево. Пусть k -й слой косы содержит классический перекресток (рис. 3), соответствующий элементарной косе σ_i . В этом слое имеется два набора дуг, которым соответствуют $x_{k,j}, u_{k,j}, v_{k,j}$ и $x_{k+1,j}, u_{k+1,j}, v_{k+1,j}$, $j = 1, \dots, n$.

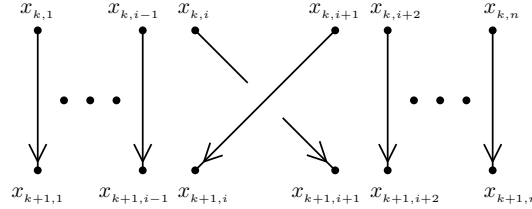


Рис. 3. Классический положительный перекресток

Согласно формулам теоремы 1 косе σ_i соответствует автоморфизм

$$\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_{k+1,i} \mapsto x_{k,i} x_{k,i+1}^{u_{k,i}} x_{k,i}^{-v_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,i+1} \mapsto x_{k,i}^{v_{k,i}}, \\ x_{k+1,j} \mapsto x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} \mapsto u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} \mapsto u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} \mapsto u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} \mapsto v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} \mapsto v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} \mapsto v_{k,j}, \end{cases}$$

где $j \neq i, i+1$. Аналогично рассматривается случай, когда k -му слою соответствует элементарная коса σ_i^{-1} .

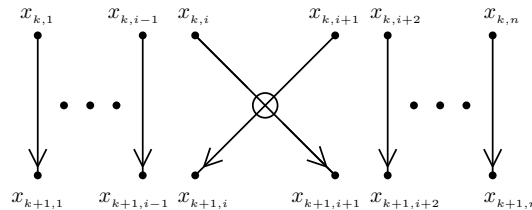


Рис. 4. Виртуальный перекресток

Если k -му слою соответствует виртуальный порождающий ρ_i (рис. 4), то ему отвечает автоморфизм

$$\varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} x_{k+1,i} \mapsto x_{k,i+1}^{v_{k,i}^{-1}}, \\ x_{k+1,i+1} \mapsto x_{k,i}^{v_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,j} \mapsto x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} \mapsto u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} \mapsto u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} \mapsto u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} \mapsto v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} \mapsto v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} \mapsto v_{k,j}, \end{cases}$$

где $j \neq i, i+1$.

В силу того, что в каждом слое верхние и нижние дуги отождествляются, можем написать соотношения

$$1) \begin{cases} x_{k+1,i} = x_{k,i} x_{k,i+1}^{u_{k,i}} x_{k,i}^{-v_0 u_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,i+1} = x_{k,i}^{v_0}, \\ x_{k+1,j} = x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} = u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} = u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} = u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} = v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} = v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} = v_{k,j}, \end{cases}$$

где $j \neq i, i+1$, для k -го слоя, соответствующего косе σ_i ;

$$2) \begin{cases} x_{k+1,i} = x_{k,i+1}^{v_{k,i}^{-1}}, \\ x_{k+1,i+1} = x_{k,i}^{v_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,j} = x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} = u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} = u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} = u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} = v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} = v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} = v_{k,j}, \end{cases}$$

где $j \neq i, i+1$, для k -го слоя, соответствующего косе ρ_i .

Также надо добавить

3) соотношения коммутативности

$$[u_{k,l}, u_{p,q}] = [u_{k,l}, v_{p,q}] = [v_{k,l}, v_{p,q}] = [u_{k,l}, v_0] = [v_{k,l}, v_0] = 1,$$

где $k, p = 1, \dots, m+1$, $l, q = 1, \dots, n$.

Используя эти соотношения, движемся по косе снизу вверх, выражая из m -го слоя порождающие $x_{m+1,j}$, $u_{m+1,j}$, $v_{m+1,j}$ через порождающие $x_{m,j}$, $u_{m,j}$, $v_{m,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Далее, рассматривая $(m-1)$ -й слой, выразим порождающие $x_{m+1,j}$, $u_{m+1,j}$, $v_{m+1,j}$ через порождающие $x_{m-1,j}$, $u_{m-1,j}$, $v_{m-1,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, и т. д. Дойдя до первого слоя, выразим порождающие $x_{m+1,j}$, $u_{m+1,j}$, $v_{m+1,j}$ через порождающие $x_{1,j}$, $u_{1,j}$, $v_{1,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Чтобы перейти к замкнутой косе $\hat{\beta}$, соединим начальные дуги диаграммы β с конечными дугами этой диаграммы, т. е. дополним соотношения 1–3 соотношениями

$$4) x_{m+1,j} = x_{1,j}, u_{m+1,j} = u_{1,j}, v_{m+1,j} = v_{1,j}, j = 1, \dots, n.$$

В силу соотношений 1, 2, 4 $u_{k,l}$, $v_{k,l}$, соответствующие одной компоненте зацепления, будут отождествлены. Это равносильно тому, что при гомоморфизме группы VB_n в группу подстановок S_n образ β в S_n является произведением d независимых циклов. Следовательно, среди порождающих $u_{i,l}$ (так же, как и среди порождающих $v_{i,l}$) останутся только d различных.

Исключая промежуточные $x_{k,l}$, $u_{k,l}$, $v_{k,l}$, $k \geq 2$, получим соотношения

$$\varphi_M(\beta)(x_1) = x_1, \dots, \varphi_M(\beta)(x_n) = x_n,$$

$$\varphi_M(\beta)(u_1) = u_1, \dots, \varphi_M(\beta)(u_n) = u_n,$$

$$\varphi_M(\beta)(v_1) = v_1, \dots, \varphi_M(\beta)(v_n) = v_n$$

группы виртуального зацепления, построенного по косе β . Здесь $x_{1,1} = x_1, \dots, x_{1,n} = x_n$, $u_{1,1} = u_1, \dots, u_{1,n} = u_n$, $v_{1,1} = v_1, \dots, v_{1,n} = v_n$. Таким образом, пришли к представлению группы $G_M(\beta)$. Предложение доказано.

§ 3. Инвариантность группы $G_{\tilde{M}}(\beta)$

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько этапов. Вначале покажем, что группа $G_{\tilde{M}}(\beta)$, построенная по представлению $\tilde{\varphi}_M$, является инвариантом косы $\hat{\beta}$. Справедлива

Теорема 2. Пусть $\beta \in VB_n$ и $\beta' \in VB_m$ — две виртуальные косы, замыкания которых определяют одно и то же зацепление L . Тогда $G_{\tilde{M}}(\beta) \cong G_{\tilde{M}}(\beta')$, т. е. группа $G_{\tilde{M}}(\beta)$ является инвариантом зацепления $L = \hat{\beta}$; будем обозначать ее через $G_{\tilde{M}}(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналог теоремы Маркова для случая виртуальных кос доказал Камада [3]. Кауффман и Ламбропулу [4] сформулировали эту теорему в виде, более удобном для проверки. Согласно этой теореме два ориентированных виртуальных зацепления эквивалентны тогда и только тогда, когда две соответствующие виртуальные косы связаны конечной последовательностью следующих преобразований или обратных к ним:

1) сопряжение в группе виртуальных кос

$$\beta \rightarrow \rho_k \beta \rho_k, \quad \beta \rightarrow \sigma_k \beta \sigma_k^{-1};$$

2) правая виртуальная и классическая стабилизации

$$\beta \rightarrow \beta \rho_n, \quad \beta \rightarrow \beta \sigma_n^{\pm 1},$$

3) правое прошивание сверху (снизу)

$$\beta \rightarrow \beta \sigma_n^{\pm 1} \rho_{n-1} \sigma_n^{\mp 1},$$

4) левое прошивание сверху (снизу)

$$\beta \rightarrow \beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{\mp 1} \rho_n \sigma_{n-1}^{\pm 1} \rho_{n-1} \rho_n,$$

где $\beta, \rho_k, \sigma_k \in VB_n, k = 1, \dots, n - 1$, а $\rho_n, \sigma_n \in VB_{n+1}$.

Нужно проверить, что при действии всех преобразований 1–4 получающиеся группы будут изоморфны группе $G_{\tilde{M}}(\beta)$.

Для упрощения обозначений будем писать просто β вместо $\tilde{\varphi}_M(\beta)$ и автоморфизмы — справа от аргументов. Обозначим символом G_1 группу, построенную по косе β :

$$G_1 = G_{\tilde{M}}(\beta) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, v_1, v_2, \dots, v_n \mid y_i = y_i \beta, v_i = v_i \beta, i = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Здесь и далее при выписывании системы соотношений будем опускать соотношения перестановочности элементов v_i .

1. Рассматриваем сопряжения косы β в группе VB_n . При сопряжении порождающим σ_k^{-1} получим группу

$$\begin{aligned} G_2 &= G_{\tilde{M}}(\sigma_k \beta \sigma_k^{-1}) \\ &= \langle y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n \mid y_i = y_i (\sigma_k \beta \sigma_k^{-1}), v_i = v_i (\sigma_k \beta \sigma_k^{-1}), i = 1, 2, \dots, n \rangle, \end{aligned}$$

где $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Для того чтобы доказать, что $G_2 \cong G_1$, перепишем определяющие соотношения G_2 в виде

$$y_i \sigma_k = y_i (\sigma_k \beta), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если $i \neq k, k+1$, то в силу равенства $y_i \sigma_k = y_i$ это соотношение эквивалентно $y_i = y_i \beta$, что является соотношением в G_1 . Следовательно, нужно рассмотреть только четыре соотношения:

$$\begin{aligned} y_k \sigma_k &= y_k(\sigma_k \beta), & y_{k+1} \sigma_k &= y_{k+1}(\sigma_k \beta), \\ v_k \sigma_k &= v_k(\sigma_k \beta), & v_{k+1} \sigma_k &= v_{k+1}(\sigma_k \beta). \end{aligned} \quad (8)$$

По определению $\tilde{\varphi}_M$ соотношения (8) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} y_k y_{k+1} y_k^{-1} &= (y_k y_{k+1} y_k^{-1}) \beta, & y_k &= y_k \beta, \\ v_{k+1} &= v_{k+1} \beta, & v_k &= v_k \beta. \end{aligned}$$

Видим, что второе, третье и четвертое соотношения — это соотношения из G_1 . Перепишем первое соотношение:

$$y_k y_{k+1} y_k^{-1} = (y_k \beta)(y_{k+1} \beta)(y_k^{-1} \beta).$$

Используя второе, получаем $y_{k+1} = y_{k+1} \beta$ — соотношение из G_1 . Таким образом, доказали, что, используя преобразование Тице, можно перейти от группы G_2 к группе G_1 , а потому эти группы изоморфны.

Рассмотрим сопряжение элементом ρ_k . В этом случае имеем

$$\begin{aligned} G_2 = G_{\tilde{M}}(\rho_k \beta \rho_k) &= \langle y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n \mid \\ & y_i = y_i(\rho_k \beta \rho_k), v_i = v_i(\rho_k \beta \rho_k), i = 1, 2, \dots, n \rangle. \end{aligned}$$

Перепишем определяющие соотношения G_2 в виде

$$y_i \rho_k = y_i(\rho_k \beta), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если $i \neq k, k+1$, то $y_i = y_i \beta$, так как $y_i \rho_k = y_i$. Но это соотношение в G_1 . Следовательно, нужно рассмотреть только четыре соотношения:

$$\begin{aligned} y_k \rho_k &= y_k(\rho_k \beta), & y_{k+1} \rho_k &= y_{k+1}(\rho_k \beta), \\ v_k \rho_k &= v_k(\rho_k \beta), & v_{k+1} \rho_k &= v_{k+1}(\rho_k \beta), \end{aligned}$$

которые эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{v_k^{-1}} &= y_{k+1}^{v_k^{-1}} \beta, & y_k^{v_{k+1}} &= y_k^{v_{k+1}} \beta, \\ v_{k+1} &= v_{k+1} \beta, & v_k &= v_k \beta. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что получаем соотношение G_1 . Таким образом, доказали, что множество соотношений из G_2 эквивалентно множеству соотношений из G_1 .

2. Рассмотрим преобразование косы $\beta \in VB_n$ в косу $\beta \sigma_n^{-1} \in VB_{n+1}$. Имеем две группы: G_1 и

$$\begin{aligned} G_2 = G_{\tilde{M}}(\beta \sigma_n^{-1}) &= \langle y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \mid \\ & y_i = y_i(\beta \sigma_n^{-1}), v_i = v_i(\beta \sigma_n^{-1}), i = 1, 2, \dots, n+1 \rangle, \end{aligned}$$

и необходимо доказать, что они изоморфны.

Перепишем соотношения G_2 в виде

$$y_i \sigma_n = y_i \beta, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

По тем же соображениям, что в п. 1, надо рассмотреть только четыре соотношения:

$$\begin{aligned} y_n \sigma_n &= y_n \beta, & y_{n+1} \sigma_n &= y_{n+1} \beta, \\ v_n \sigma_n &= v_n \beta, & v_{n+1} \sigma_n &= v_{n+1} \beta. \end{aligned} \quad (9)$$

По определению $\tilde{\varphi}_M$ соотношения (9) эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned} y_n y_{n+1} y_n^{-1} &= y_n \beta, & y_n &= y_{n+1}, \\ v_{n+1} &= v_n \beta, & v_n &= v_{n+1}. \end{aligned}$$

Используя второе соотношение, переписываем первое в виде $y_n = y_n \beta$, что является соотношением в G_1 . Применяя соотношения $y_{n+1} = y_n$, $v_{n+1} = v_n$, можно исключить y_{n+1}, v_{n+1} из множества порождающих группы G_2 . Таким образом, доказано, что группа G_2 изоморфна группе G_1 .

Преобразование косы $\beta \in VB_n$ в косу $\beta \sigma_n \in VB_{n+1}$ разбирается аналогично.

Рассмотрим преобразование косы $\beta \in VB_n$ в косу $\beta \rho_n \in VB_{n+1}$. Имеем две группы: G_1 и

$$G_2 = G_{\tilde{M}}(\beta \rho_n) = \langle y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \mid y_i = y_i(\beta \rho_n), v_i = v_i(\beta \rho_n), i = 1, 2, \dots, n+1 \rangle.$$

Для $i = n$ и $i = n+1$ получим следующие соотношения в G_2 :

$$\begin{aligned} y_n \rho_n &= y_n \beta, & y_{n+1} \rho_n &= y_{n+1} \beta, \\ v_n \rho_n &= v_n \beta, & v_{n+1} \rho_n &= v_{n+1} \beta, \end{aligned}$$

которые эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{v_n^{-1}} &= y_n \beta, & y_n^{v_{n+1}} &= y_{n+1} \beta = y_{n+1}, \\ v_{n+1} &= v_n \beta, & v_n &= v_{n+1}. \end{aligned}$$

Подставляя y_{n+1} из второго в первое соотношение, получаем $y_n = y_n \beta$, что является соотношением в G_1 . Используя второе и четвертое соотношения, можно исключить y_{n+1}, v_{n+1} из множества порождающих группы G_2 . Таким образом, доказали, что группа G_2 изоморфна группе G_1 .

3. Рассмотрим правое прошивание сверху, т. е. преобразование косы $\beta \in VB_n$ в косу $\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} \in VB_{n+1}$. Получаем две группы: G_1 и

$$G_2 = G_{\tilde{M}}(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \mid y_i = y_i(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}), v_i = v_i(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}), i = 1, 2, \dots, n+1 \rangle.$$

Чтобы доказать, что $G_1 \cong G_2$, перепишем соотношения G_2 в виде

$$y_i \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} = y_i \beta, \quad v_i \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} = v_i \beta, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Если $i = 1, 2, \dots, n-2$, то $y_i = y_i \beta$, $v_i = v_i \beta$, что является соотношениями в G_1 . Следовательно, нужно рассмотреть только шесть соотношений:

$$\begin{aligned} y_{n-1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= y_{n-1} \beta, & y_n(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= y_n \beta, & y_{n+1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= y_{n+1} \beta, \\ v_{n-1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= v_{n-1} \beta, & v_n(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= v_n \beta, & v_{n+1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= v_{n+1} \beta. \end{aligned} \quad (10)$$

По определению $\tilde{\varphi}_M$ коса $\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}$ действует на порождающие $y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}$ следующим образом:

$$\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} : \begin{cases} y_{n-1} \xrightarrow{\sigma_n} y_{n-1} \xrightarrow{\rho_{n-1}} y_n^{v_{n-1}^{-1}} \xrightarrow{\sigma_n^{-1}} y_{n+1}^{v_{n-1}^{-1}}, \\ y_n \xrightarrow{\sigma_n} y_n y_{n+1} y_n^{-1} \xrightarrow{\rho_{n-1}} y_{n-1}^{v_n} y_{n+1} y_n^{-v_n} \xrightarrow{\sigma_n^{-1}} y_{n-1}^{v_{n+1}} y_{n+1}^{-1} y_n y_{n+1} y_n^{-v_{n+1}}, \\ y_{n+1} \xrightarrow{\sigma_n} y_n \xrightarrow{\rho_{n-1}} y_{n-1}^{v_n} \xrightarrow{\sigma_n^{-1}} y_{n-1}^{v_{n+1}}. \end{cases}$$

Аналогично

$$\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} : \begin{cases} v_{n-1} \xrightarrow{\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}} v_{n+1}, \\ v_n \xrightarrow{\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}} v_n, \\ v_{n+1} \xrightarrow{\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}} v_{n-1}. \end{cases}$$

Таким образом, для представления $\tilde{\varphi}_M$ соотношения (10) эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{v_{n-1}^{-1}} &= y_{n-1} \beta, & y_{n-1}^{v_{n+1}} y_{n+1}^{-1} y_n y_{n+1} y_n^{-v_{n+1}} &= y_n \beta, & y_{n-1}^{v_{n+1}} &= y_{n+1} \beta, \\ v_{n+1} &= v_{n-1} \beta, & v_n &= v_n \beta, & v_{n-1} &= v_{n+1} \beta. \end{aligned}$$

Так как $\beta \in VB_n$, на порождающие y_{n+1}, v_{n+1} β действует тривиально, т. е. $y_{n+1} \beta = y_{n+1}$, $v_{n+1} \beta = v_{n+1}$. Следовательно, третье и шестое соотношения эквивалентны соответственно

$$y_{n-1}^{v_{n+1}} = y_{n+1}, \quad v_{n-1} = v_{n+1}.$$

Подставляя третье соотношение в первое, с учетом шестого соотношения имеем $y_{n-1} = y_{n-1} \beta$, что является соотношением в G_1 . Используя третье соотношение, получаем, что второе эквивалентно $y_n = y_n \beta$, что является соотношением в G_1 . Также можно исключить y_{n+1} и v_{n+1} из множества порождающих G_2 . Таким образом, доказали, что множество соотношений из G_2 эквивалентно множеству соотношений из G_1 .

4. Рассмотрим левое прошивание сверху, т. е. преобразование косы $\beta \in VB_n$ в косу $\beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n \in VB_{n+1}$. В этом случае

$$\begin{aligned} G_2 &= G(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \mid \\ & y_i = y_i (\beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n), \quad v_i = v_i (\beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n), \\ & \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \rangle. \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что $G_1 \cong G_2$, перепишем соотношения G_2 в виде

$$y_i \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n = y_i \beta, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Если $i = 1, 2, \dots, n-2$, то $y_i = y_i \beta$, что является соотношением в G_1 . Следовательно, нужно рассмотреть только шесть соотношений:

$$\begin{aligned} y_{n-1} (\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= y_{n-1} \beta, \\ y_n (\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= y_n \beta, \\ y_{n+1} (\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= y_{n+1} \beta, \\ v_{n-1} (\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= v_{n-1} \beta, \\ v_n (\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= v_n \beta, \\ v_{n+1} (\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= v_{n+1} \beta. \end{aligned} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что коса $b = \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n$ действует на порождающие $y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}$ следующим образом:

$$b : \begin{cases} y_{n-1} \rightarrow (y_n^{-1} y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_{n-1}^{v_{n+1}^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_n)^{v_n^{-1}}, \\ y_n \rightarrow y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}}, \\ y_{n+1} \rightarrow y_n^{v_{n+1} v_{n-1}}, \end{cases} \quad b : \begin{cases} v_{n-1} \rightarrow v_{n-1}, \\ v_n \rightarrow v_{n+1}, \\ v_{n+1} \rightarrow v_n. \end{cases}$$

Тем самым (11) эквивалентны соотношениям

$$(y_n^{-1} y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_{n-1}^{v_{n+1}^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_n)^{v_n^{-1}} = y_{n-1} \beta, \quad y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} = y_n \beta, \quad y_n^{v_{n+1} v_{n-1}} = y_{n+1} \beta, \\ v_{n-1} = v_{n-1} \beta, \quad v_{n+1} = v_n \beta, \quad v_n = v_{n+1} \beta.$$

Так как $\beta \in VB_n$, на порождающие y_{n+1}, v_{n+1} β действует тривиально, следовательно, третье соотношение эквивалентно $y_n^{v_{n+1} v_{n-1}} = y_{n+1}$, а шестое — $v_n = v_{n+1}$. Получившиеся равенства подставляем в первое и второе соотношения и после сокращений получаем равенства $y_{n-1} = y_{n-1} \beta$, $y_n = y_n \beta$, которые являются соотношениями в G_1 . Так же можно исключить y_{n+1}, v_{n+1} из множества порождающих G_2 . Таким образом, доказали, что множество соотношений из G_2 эквивалентно множеству соотношений из G_1 .

Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Мы доказали, что представление φ_M равносильно представлению $\tilde{\varphi}_M$. Покажем, что группа $G_M(\beta)$ изоморфна группе $G_{\tilde{M}}(\beta)$. Так как по доказанной теореме группа $G_M(\beta)$ является инвариантом зацепления $\hat{\beta}$, отсюда следует доказательство теоремы 1.

Пусть группа G имеет копредставление $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — порождающее множество и \mathcal{R} — множество определяющих соотношений. Если в группе G выбрать другое порождающее множество $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, то группа G будет иметь генетический код $G = \langle Y \mid \mathcal{R}' \rangle$, который связан с исходным генетическим кодом последовательностью преобразований Тице. Далее считаем, что фиксированы порождающие множества X, Y и соответствующие им копредставления.

Если φ — некоторый автоморфизм группы G , то по порождающему множеству X можно определить группу

$$G(X, \varphi) = \langle X \mid \mathcal{R}, \varphi(x_i) = x_i, i = 1, \dots, n \rangle.$$

Аналогично по порождающему множеству Y и автоморфизму φ можно определить группу

$$G(Y, \varphi) = \langle Y \mid \mathcal{R}', \varphi(y_j) = y_j, j = 1, \dots, m \rangle.$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Группы $G(X, \varphi)$ и $G(Y, \varphi)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть автоморфизм φ действует на порождающих множествах X и Y следующим образом:

$$\varphi(x_i) = w_i(X), \quad \varphi(y_j) = u_j(Y),$$

где $w_i(X)$ и $u_j(Y)$ — слова в порождающих X и Y , а также обратных к ним соответственно, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Фиксируем

$$x_i = b_i(Y), \quad y_j = a_j(X)$$

для выражения порождающих X через Y и Y через X . Для упрощения обозначений индексы i, j будем опускать, так что получим системы равенств

$$\varphi(X) = W(X), \quad \varphi(Y) = U(Y), \quad X = B(Y), \quad Y = A(X).$$

В силу того, что автоморфизм φ группы G , действующий на порождающих X и Y , один и тот же, системы равенств

$$A(W(B(Y))) = U(Y) \Leftrightarrow A(W(X)) = U(A(X)) \Leftrightarrow W(B(Y)) = B(U(Y))$$

равносильны в группе G .

Доказательство утверждения теоремы состоит в последовательном применении преобразований Титце к копредставлению группы $G(X, \varphi)$. Итак, рассмотрим группу $G(X, \varphi)$. По определению $G(X, \varphi) = \langle X \mid \mathcal{R}, X = W(X) \rangle$. Добавим в порождающее множество элементы Y , а в множество соотношений — равенства $Y = A(X)$:

$$G(X, \varphi) = \langle X, Y \mid \mathcal{R}, X = W(X), Y = A(X) \rangle.$$

Соотношения $Y = A(X)$ эквивалентны равенствам $X = B(Y)$ по модулю соотношений \mathcal{R} . Поэтому

$$\langle X, Y \mid \mathcal{R}, X = W(X), Y = A(X) \rangle \simeq \langle X, Y \mid \mathcal{R}, X = W(X), X = B(Y) \rangle.$$

Исключая порождающие X и соотношения $X = B(Y)$, получим

$$\langle X, Y \mid \mathcal{R}, X = W(X), X = B(Y) \rangle \simeq \langle Y \mid \mathcal{R}', B(Y) = W(B(Y)) \rangle.$$

Так как $W(B(Y)) = B(U(Y))$, то

$$\langle Y \mid \mathcal{R}', B(Y) = W(B(Y)) \rangle \simeq \langle Y \mid \mathcal{R}', B(Y) = B(U(Y)) \rangle.$$

Учитывая, что в группе G справедливы равенства $A(B(Y)) = Y$ и $B(A(X)) = X$, видим, что системы соотношений $B(Y) = B(Z)$ и $Y = Z$ равносильны в группе G (т. е. эквивалентны по модулю соотношений \mathcal{R}'). Следовательно,

$$\langle Y \mid \mathcal{R}', B(Y) = B(U(Y)) \rangle \simeq \langle Y \mid \mathcal{R}', Y = U(Y) \rangle = G(Y, \varphi).$$

Итак, $G(X, \varphi) \simeq G(Y, \varphi)$.

Теорема доказана.

В качестве следствия получаем, что группы $G_M(L)$ и $G_{\tilde{M}}(L)$ изоморфны. Следовательно, теорема 1 доказана.

§ 5. Свойства групп зацеплений

Непосредственно из определения группы $G_{\tilde{M}}$ можно извлечь

Предложение 2. Если L — классическое d -компонентное зацепление, являющееся замыканием n -нитиевой косы, то в группе $G_{\tilde{M}}(L)$ среди порождающих v_1, v_2, \dots, v_n будет d различных. В частности, если L — узел, то $v_1 = v_2 = \dots = v_n$.

Как показано ранее, представление $\tilde{\varphi}_M$ является продолжением представления Артина, что дает

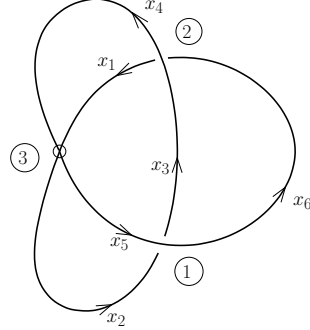


Рис. 5. Виртуальный трилистник

Предложение 3. Пусть L — классическое d -компонентное зацепление. Тогда имеет место следующий изоморфизм групп: $G_{\tilde{M}}(L) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) * \mathbb{Z}^d$.

Пусть T_v — виртуальный трилистник, изображенный на рис. 5. Найдем соответствующие ему группы.

1. Используя диаграммный подход, найдем группу $G_M = G_M(T_v)$. Она порождается элементами $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u, v_0, v$ и имеет в первом перекрестке соотношения $x_2x_5^u = x_6x_3^u$, $x_5 = x_6^{v_0}$, во втором — соотношения $x_6x_3^u = x_4x_1^u$, $x_3 = x_4^{v_0}$ и в третьем — соотношения $x_4 = x_5^{v^{-1}}$, $x_1 = x_2^v$. Таким образом,

$$G_M = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, \\ x_2x_5^u = x_6x_3^u, x_5 = x_6^{v_0}, x_6x_3^u = x_4x_1^u, x_3 = x_4^{v_0}, x_4 = x_5^{v^{-1}}, x_1 = x_2^v \rangle.$$

Исключая порождающие x_5 и x_3 , используя 5- и 7-е соотношения соответственно, приходим к представлению

$$G_M = \langle x_1, x_2, x_4, x_6, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, \\ x_2x_6^{v_0u} = x_6x_4^{v_0u}, x_6x_4^{v_0u} = x_4x_1^u, x_4 = x_6^{v_0v^{-1}}, x_1 = x_2^v \rangle.$$

Исключая порождающие x_4 и x_1 , используя 6- и 7-е соотношения соответственно, получим

$$G_M = \langle x_2, x_6, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, \\ x_2x_6^{v_0u} = x_6x_6^{v_0v^{-1}v_0u}, x_6x_6^{v_0v^{-1}v_0u} = x_6^{v_0v^{-1}}x_2^{vu} \rangle.$$

Из 4-го соотношения исключаем

$$x_2 = x_6x_6^{v_0^2v^{-1}u}x_6^{-v_0u}.$$

Приходим к представлению

$$G_M = \langle x, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, xx^{v_0^2v^{-1}u} = x^{v_0v^{-1}}xx^{v_0^2v^{-1}u}x^{-v_0u} \rangle,$$

где символом x обозначен x_6 .

Заметим, что последнее соотношение равносильно такому:

$$xx^{v_0^2v^{-1}u}x^{v_0u} = x^{v_0v^{-1}}xx^{v_0^2v^{-1}u}.$$

Сопрягая его элементом v , приходим к представлению

$$G_M = \langle x, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, x^{v_0}(x^vx^{v_0^2u}) = (x^vx^{v_0^2u})x^{v_0vu} \rangle.$$

2. Найдем группу $G_{\tilde{M}} = G_{\tilde{M}}(T_v)$ виртуального трилистника. Для этого используем представление $\tilde{\varphi}_M : VB_2 \rightarrow \text{Aut}(F_{2,2})$, где $F_{2,2} = F_2 * \mathbb{Z}^2$ и $F_2 = \langle y_1, y_2 \rangle$, $\mathbb{Z}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$. Виртуальный трилистник T_v является замыканием косы $\sigma_1^2 \rho_1 \in VB_2$. Этой косе отвечает автоморфизм $\tilde{\varphi}(\sigma_1^2 \rho_1)$, который действует следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 \mapsto y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{v_1^{-1}} y_1^{-v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, \\ y_2 \mapsto y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, \\ v_1 \mapsto v_2, \\ v_2 \mapsto v_1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$G_{\tilde{M}} = \langle y_1, y_2, v_1, v_2 \mid [v_1, v_2] = 1, y_1 = y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{v_1^{-1}} y_1^{-v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, \\ y_2 = y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, v_1 = v_2, v_2 = v_1 \rangle.$$

Полагая $v = v_1 = v_2$, получим

$$G_{\tilde{M}} = \langle y_1, y_2, v \mid y_1 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{v^{-1}} y_1^{-v} y_2^{-v^{-1}}, y_2 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{-v^{-1}} \rangle.$$

Используя второе соотношение, можем упростить первое. Получим

$$G_{\tilde{M}} = \langle y_1, y_2, v \mid y_1 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{-1}, y_2 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{-v^{-1}} \rangle.$$

Из второго соотношения выражаем

$$y_1 = y_2^{-v^{-2}} y_2^{v^{-1}} y_2^{-v^{-2}}.$$

Исключая y_1 , приходим к представлению

$$G_{\tilde{M}} = \langle y, v \mid y(y^{v^{-1}} y^v) = (y^{v^{-1}} y^v)y \rangle,$$

где символом y обозначили y_2 .

Известно, что виртуальный трилистник можно представить как классический узел в утолщенном торе. Фундаментальная группа дополнения этого узла в утолщенном торе найдена в [5] и имеет следующее представление:

$$G = \langle z, a, b \mid [a, b] = 1, z(z^a z^b) = (z^a z^b)z^{ab} \rangle.$$

Возникает естественный вопрос о связи групп G_M , $G_{\tilde{M}}$ и G . Ответ на этот вопрос дает

Предложение 4. Группы G_M , $G_{\tilde{M}}$ и G не изоморфны, и существует последовательность эпиморфизмов

$$G_M \rightarrow G \rightarrow G_{\tilde{M}}.$$

Доказательство. То, что группы не изоморфны, следует из того, что их абелизации не изоморфны. Гомоморфизм $G_M \rightarrow G$ задается таким образом:

$$x \mapsto z, \quad v_0 \mapsto 1, \quad v \mapsto a, \quad u \mapsto b,$$

а гомоморфизм $G \rightarrow G_{\tilde{M}}$ — следующим образом:

$$z \mapsto y, \quad a \mapsto v^{-1}, \quad b \mapsto v.$$

Предложение доказано.

В заключение сформулируем такую гипотезу.

Гипотеза. Пусть K — виртуальный узел рода 1 (т. е. K эквивалентен классическому узлу, вложенному в утолщенный тор). Тогда существует эпиморфизм $G_M(K) \rightarrow G(K)$, где $G(K)$ — группа, определенная в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bardakov V. G., Mikhalchishina Yu. A., Neshchadim M. V. Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // J. Knot Theory Ramifications. 2017. V. 26. P. 1750003, 17.
2. Бардаков В. Г., Нецадим М. В. Об одном представлении виртуальных кос автоморфизмами // Алгебра и логика. 2017. (В печати).
3. Kamada S. Invariants of virtual braids and a remark on left stabilizations and virtual exchange moves // Kobe J. Math. 2004. V. 21. P. 33–49.
4. Kauffman L. H., Lambropoulou S. The L -move and virtual braids // J. Knot Theory Ramifications. 2006. V. 15, N 6. P. 773–811.
5. Carter J. S., Silver D., Williams S. Invariants of links in thickened surfaces // Algebr. Geom. Topol. 2014. V. 14, N 3. P. 1377–1394.
6. Марков А. А. Основы алгебраической теории кос // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1945. Т. 16. С. 1–54.
7. Birman J. S. Braids, links, and mapping class groups. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1974. (Ann. Math. Stud.; V. 82).
8. Kauffman L. H. Virtual knot theory // Eur. J. Comb. 1999. V. 20, N 7. P. 663–690.
9. Vershinin V. V. On homology of virtual braids and Burau representation // J. Knot Theory Ramifications. 2001. V. 10, N 5. P. 795–812.
10. Bardakov V. G. The virtual and universal braids // Fund. Math. 2004. V. 181. P. 1–18.
11. Bardakov V. G. Virtual and welded links and their invariants // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2005. N 2. P. 196–199.
12. Bardakov V. G., Bellingeri P. Groups of virtual and welded links // J. Knot Theory Ramifications. 2014. V. 23, N 3. P. 1450014, 23.

Статья поступила 24 января 2017 г.

Бардаков Валерий Георгиевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. аграрный университет,
ул. Добролюбова, 160, Новосибирск 630039
bardakov@math.nsc.ru

Михальчишина Юлия Андреевна
Новосибирский гос. аграрный университет,
ул. Добролюбова, 160, Новосибирск 630039
jam92888@gmail.com

Нецадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
neshch@math.nsc.ru