Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 512.57

О 2–ЗАМКНУТОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А. И. Будкин

Аннотация. *Доминион подгруппы H группы G относительно класса M* — это множество всех элементов $a \in G$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из G в каждую группу из M. Группа H *n-замкнута в классе M*, если для любой группы $G = \mathrm{gr}(H, a_1, \dots, a_n)$ из M, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, доминион H в G (в M) совпадает с H. Доказано, что если M — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех, всякая 2-порожденная группа в котором является относительно свободной, то аддитивная группа рациональных чисел 2-замкнута в M.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.606

Ключевые слова: квазимногообразие, нильпотентная группа, аддитивная группа рациональных чисел, доминион, 2-замкнутая группа.

Введение

Работа посвящена исследованию доминионов, интерес к изучению которых во многом обусловлен их тесной связью со свободными конструкциями в квазимногообразиях универсальных алгебр и амальгамами (см. [1] и библиографию в [2]).

Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы G из $\mathscr{M}$ и ее подгруппы H *доминион* $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H)$ *подгруппы* H в G (в $\mathscr{M}$) определяется так:

$$\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = \{a \in G \mid \forall M \in \mathscr{M}\ \forall f, g : G \to M\ (f\mid_H = g\mid_H) \Rightarrow (f(a) = g(a))\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : G \to M$ обозначены гомоморфизмы группы G в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Доминионы подробно изучены в квазимногообразиях абелевых групп [3–6]. Исследованию доминионов в классе нильпотентных групп также посвящен цикл статей. Выделим из них [7–9]. В последнее время целенаправленно ведется изучение доминионов метабелевых групп [10–15].

Группа H называется *n-замкнутой в классе $\mathscr{M}$*, если для любой группы $G = \mathrm{gr}(H, a_1, \dots, a_n)$ из $\mathscr{M}$, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, справедливо равенство $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$.

В [7] показано, что исследование доминионов сводится к изучению n-замкнутых групп. Более подробно эта связь рассматривалась в [15]. Этим объясняется наш интерес к n-замкнутым группам. n-Замкнутые группы в квазимногообразиях нильпотентных групп рассматривались в [7, 9, 15].

Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех, $G = \mathrm{gr}(x_1, x_2, Q) \in \mathscr{M}$, Q — аддитивная группа рациональных чисел. В данной работе доказано, что если $\mathrm{gr}(x_1, x_2)$ — относительно свободная группа, то доминион Q в G (в $\mathscr{M}$) равен Q. В частности, если $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех, всякая 2-порожденная группа в котором является относительно свободной, то аддитивная группа рациональных чисел 2-замкнута в $\mathscr{M}$.

Используемые в работе обозначения и сведения из теории групп можно найти в [16, 17], а из теории квазимногообразий групп — в [18, 19].

§ 1. Предварительные замечания

Напомним некоторые понятия и определения.

Через $\mathscr{N}_c$ обозначаем многообразие всех нильпотентных групп ступени не выше c, $\mathscr{N}_{c,\infty}$ — класс групп без кручения из $\mathscr{N}_c$, $F_r(\mathscr{N})$ — свободная группа в квазимногообразии $\mathscr{N}$ ранга r. Всюду в работе $F_2 = F_2(\mathscr{N}_3)$ — свободная в $\mathscr{N}_3$ группа ранга 2, порожденная элементами x, y.

Через $\mathrm{gr}(S)$ обозначаем группу, порожденную множеством S, через (a) — циклическую группу, порожденную элементом a, через G' — коммутант группы G, а через $Z(G)$ — ее центр. Как обычно, $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_{c+1}(G) = [\gamma_c(G), G]$. Если x, y — элементы группы, то $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, e — единица группы. Запись $H \leq G$ означает, что H — подгруппа группы G. Элемент gN фактор-группы G/N иногда будем обозначать через $\bar{g}$.

Через Q обозначается аддитивная группа рациональных чисел. Будем использовать мультипликативную запись операций в Q. В частности, $2 \cdot 3 = 5$, $\sqrt[3]{2} = \frac{2}{3}$.

Коммутаторы вида $[x_i, x_j, x_k]$, где $i > j \leq k$, называются *базисными коммутаторами веса* 3.

Как обычно, через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ обозначены множества натуральных и целых чисел соответственно.

Понадобятся следующие хорошо известные коммутаторные тождества, истинные в любой нильпотентной группе ступени не выше 3:

$$[a, bc] = [a, c][a, b][a, b, c], \quad [b^{-1}, a] = b[a, b]b^{-1},$$

$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c], \quad [b, a^{-1}] = a[a, b]a^{-1}, \quad [a, b, c][b, c, a][c, a, b] = e,$$

из которых следует линейность коммутатора $[x, y, z]$ по каждому аргументу в классе нильпотентных групп ступени 3. Используя их, несложно получить следующие тождества, истинные во всех группах из $\mathscr{N}_3$:

$$[b^n, a^k] = [b, a]^{nk}[b, a, a]^{n\frac{k^2-k}{2}}[b, a, b]^{k\frac{n^2-n}{2}}, \tag{1}$$

$$[xy, ab] = [x, b][x, a][y, a][y, b][x, a, b][x, a, y][x, b, y][y, a, b]. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения:

$$z_1 = [x_4, x_1, x_1], \quad z_2 = [x_4, x_1, x_2], \quad z_3 = [x_4, x_1, x_3], \quad z_4 = [x_4, x_1, x_4],$$

$$z_5 = [x_4, x_3, x_3], \quad z_6 = [x_3, x_2, x_2], \quad z_7 = [x_3, x_2, x_3], \quad z_8 = [x_3, x_2, x_4].$$

$$z_9 = [x_4, x_3, x_4], \quad z_{10} = [x_2, x_1, x_2], \quad z_{11} = [x_2, x_1, x_3].$$

Группа называется *относительно свободной*, если она свободна в некотором многообразии.

Вложением группы A в группу B будем называть любой гомоморфизм $\varphi : A \to B$, являющийся изоморфизмом A на $\varphi(A)$. Если существует вложение A в B, то говорим, что A *вложима* в B. Через qG обозначим квазимногообразие, порожденное группой G.

Воспользуемся следующей теоремой Дика [17, следствие 1.1.2; 18, с. 55]).

Лемма 1. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathscr{N}$ представление*

$$G = \mathrm{gr}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{l(j)}}) = e \mid j \in J\}).$$

Пусть $H \in \mathscr{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{l(j)}}) = e$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i$ $(i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

Нам понадобятся следующие результаты из [9].

Лемма 2 [9, теорема 3]. *Аддитивная группа Q рациональных чисел 3-замкнута в произвольном квазимногообразии нильпотентных ступени ≤ 2 групп без кручения.*

Лемма 3 [9, лемма 2]. *Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие групп, $G \in \mathscr{M}$, $H \leq G$, H — полная группа и $H \cap G' = (1)$. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$.*

§ 2. $Z(G)$ не содержит Q

Лемма 4. *Пусть R — группа, заданная в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ порождающими x_1, x_2, x_3, x_4 и определяющими соотношениями*

$$[x_2, x_1]^\delta [x_2, x_1, x_1]^s [x_2, x_1, x_2]^t = [x_4, x_3]^\delta [x_4, x_3, x_3]^s [x_4, x_3, x_4]^t,$$

$$[x_4, x_2, x_2] = [x_4, x_2, x_3] = [x_4, x_2, x_4] = e,$$

$$[x_3, x_1, x_1] = [x_3, x_1, x_2] = [x_3, x_1, x_3] = [x_3, x_1, x_4] = e,$$

$$[x_4, x_1, x_2] = [x_4, x_3, x_4],$$

где δ, s, t — фиксированные целые числа, $\delta > 0$, НОД$(\delta, s, t) = 1$. Тогда $R \in qF_2$.

Доказательство. Поскольку фактор-группа нильпотентной группы без кручения по ее центру также является группой без кручения [16, 16.2.10], то

$$[x_2, x_1][x_4, x_3]^{-1} \in Z(R).$$

Ясно, что $R/\,\mathrm{gr}([x_2, x_1][x_4, x_3]^{-1}, \gamma_3(R))$ имеет относительно многообразия $\mathscr{N}_2$ представление

$$R/(\mathrm{gr}([x_2, x_1][x_4, x_3]^{-1}, \gamma_3(R)) = \mathrm{gr}(x_1, x_2, x_3, x_4 \parallel [x_2, x_1] = [x_4, x_3]).$$

2-Ступенно нильпотентные группы с одним определяющим соотношением (в $\mathscr{N}_2$) изучались в [18, 20]. В частности, известно [20, лемма 3; 18, следствие 4.2.19]), что эта группа содержится в $qF_2(\mathscr{N}_2)$ и всякий элемент из этой группы может быть однозначно представлен в следующем виде:

$$x_1^k x_2^m x_3^n x_4^p [x_2, x_1]^{r_1} [x_3, x_1]^{r_2} [x_4, x_1]^{r_3} [x_3, x_2]^{r_4} [x_4, x_2]^{r_5}, \tag{3}$$

$k, m, n, p, u_i \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что группа R аппроксимируется группами из qF_2. Для этого возьмем произвольный неединичный элемент $g \in R$ и покажем существование гомоморфизма из R в подходящую группу из qF_2, при котором образ g отличен от единицы. В силу изложенного считаем, что $g \in \mathrm{gr}([x_2, x_1][x_4, x_3]^{-1}, \gamma_3(R))$.

Используя коммутаторные тождества, получаем следующие соотношения в группе R:

$$[x_2, x_1, x_1]^\delta = [x_4, x_3, x_1]^\delta = [x_3, x_1, x_4]^{-\delta}[x_4, x_1, x_3]^\delta = [x_4, x_1, x_3]^\delta,$$
$$[x_2, x_1, x_2]^\delta = [x_4, x_3, x_2]^\delta = [x_3, x_2, x_4]^{-\delta}[x_4, x_2, x_3]^\delta = [x_3, x_2, x_4]^{-\delta},$$
$$[x_2, x_1, x_3]^\delta = [x_4, x_3, x_3]^\delta, \quad [x_2, x_1, x_4]^\delta = [x_4, x_3, x_4]^\delta.$$

Поскольку R — группа без кручения, то

$$[x_2, x_1, x_1] = [x_4, x_1, x_3] = z_3, \tag{4}$$
$$[x_2, x_1, x_2] = [x_3, x_2, x_4]^{-1} = z_8^{-1}, \tag{5}$$
$$[x_2, x_1, x_3] = [x_4, x_3, x_3] = z_5, \tag{6}$$
$$[x_2, x_1, x_4] = [x_4, x_3, x_4] = [x_4, x_1, x_2] = z_2. \tag{7}$$

Отсюда следует, что g^δ представим в виде произведения базисных коммутаторов:

$$g^\delta = \prod_{i=1}^{8} z_i^{k_i}. \tag{8}$$

Рассмотрим отображение $\tau : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to F_2$, определенное так:

$$\tau : x_2 \to y^n[x, y]^{f_1}, \quad x_1 \to x^k[x, y]^{f_2}, \quad x_4 \to y^m[x, y]^{g_1}, \quad x_3 \to x^p[x, y]^{g_2},$$

где $n, k, m, p, f_1, f_2, g_1, g_2$ — любые целые числа, удовлетворяющие условиям

$$nk = mp, \quad f_1 = n\frac{k-1}{2} + \frac{nks}{\delta} - \frac{ns}{\delta}, \quad f_2 = k\frac{1-n}{2} - \frac{nkt}{\delta} + \frac{kt}{\delta},$$
$$g_1 = m\frac{p-1}{2} + \frac{mps}{\delta} - \frac{ms}{\delta}, \quad g_2 = p\frac{1-m}{2} - \frac{mpt}{\delta} + \frac{pt}{\delta}.$$

Используя (1), (2), вычисляем

$$\begin{aligned}
&[\tau(x_2), \tau(x_1)]^\delta[\tau(x_2), \tau(x_1), \tau(x_1)]^s[\tau(x_2), \tau(x_1), \tau(x_2)]^t \\
&\qquad = [y^n[x, y]^{f_1}, x^k[x, y]^{f_2}]^\delta[y^n, x^k, x^k]^s[y^n, x^k, y^n]^t \\
&\qquad = [y, x]^{nk\delta}[y, x, x]^{\frac{k^2-k}{2}n\delta - kf_1\delta + nk^2s}[y, x, y]^{\frac{n^2-n}{2}k\delta + nf_2\delta + n^2kt} \\
&\qquad = ([y, x]^\delta[y, x, x]^s[y, x, y]^t)^{nk}.
\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$[\tau(x_4), \tau(x_3)]^\delta[\tau(x_4), \tau(x_3), \tau(x_3)]^s[\tau(x_4), \tau(x_3), \tau(x_4)]^t = ([y, x]^\delta[y, x, y]^t[y, x, x]^s)^{mp}.$$

Кроме того, для всякого $a \in F_2$ имеем

$$[\tau(x_4), \tau(x_2), a] = [y^m, y^n, a] = e, \quad [\tau(x_3), \tau(x_1), a] = [x^p, x^k, a)] = e,$$

а также

$$[\tau(x_4), \tau(x_1), \tau(x_2)] = [y^m, x^k, y^n] = [y, x, y]^{mkn},$$

$$[\tau(x_4), \tau(x_3), \tau(x_4)] = [y^m, x^p, y^m] = [y, x, y]^{m^2 p} = [y, x, y]^{mkn},$$

откуда получаем

$$[\tau(x_4), \tau(x_1), \tau(x_2)] = [\tau(x_4), \tau(x_3), \tau(x_4)].$$

Далее рассматриваем случаи $n = z$, $k = z^{10}$, $m = z^3$, $p = z^8$ для каждого z, делящегося на 2δ. По лемме 1 τ продолжается до гомоморфизма $\varphi_z : R \to F_2$. Видим, что

$$\begin{aligned}\varphi_z(g^\delta) = [y^m, x^k, x^k]^{k_1}[y^m, x^k, y^n]^{k_2}[y^m, x^k, x^p]^{k_3}[y^m, x^k, y^m]^{k_4}[y^m, x^p, x^p]^{k_5} \\ [x^p, y^n, y^n]^{k_6}[x^p, y^n, x^p]^{k_7}[x^p, y^n, y^m]^{k_8} \\ = [y, x, x]^{mk^2k_1 + mkpk_3 + mp^2k_5 - np^2k_7}[y, x, y]^{mknk_2 + m^2kk_4 - n^2pk_6 - pnmk_8}.\end{aligned}$$

Если $\varphi_z(g^\delta) = e$ при каждом рассматриваемом z, то $k_1z^{23} + k_3z^{21} + k_5z^{19} - k_7z^{17} = 0$, $k_2z^{14} + k_4z^{16} - k_6z^{10} - k_8z^{12} = 0$. Поскольку ненулевой многочлен имеет конечное множество корней, все k_i равны 0, т. е. $g^\delta = e$, откуда $g = e$. Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 4 следует однозначное представление любого элемента из $\gamma_3(R)$ в виде (8).

Имеет место более общее утверждение.

Следствие 1. *Всякий элемент из R однозначно представим в виде*

$$x_1^k x_2^m x_3^n x_4^p [x_4, x_1]^{r_{41}}[x_4, x_2]^{r_{42}}[x_2, x_1]^{r_{43}}[x_3, x_1]^{r_{31}}[x_3, x_2]^{r_{32}}[x_4, x_3]^r \prod_{i=1}^{8} z_i^{k_i},$$

где $k, m, n, p, r_{li}, r, k_j \in \mathbb{Z}$, $0 \le r < \delta$.

Доказательство. Несложно заметить, что всякий элемент $g \in R$ может быть представлен в указанном виде. Как было отмечено, любой элемент группы $R/\operatorname{gr}([x_2, x_1][x_4, x_3]^{-1}, \gamma_3(R))$ однозначно представим в виде (3). Поэтому можно предполагать, что

$$g = [x_2, x_1]^{r_{43}}[x_4, x_3]^r \prod_{i=1}^{8} z_i^{k_i}, \quad 0 \le r < \delta.$$

Достаточно доказать однозначность представимости единицы, поэтому считаем, что $g = e$. Рассматривая гомоморфизм $\psi : R \to F_2$, при котором $\psi(x_1) = x_1$, $\psi(x_2) = x_2$, $\psi(x_3) = x_1$, $\psi(x_4) = x_2$, замечаем, что $r_{43} = -r$. Далее, используя равенства (4)–(7) и $\left([x_2, x_1]^{-1}[x_4, x_3]\right)^\delta = z_3^s z_8^{-t} z_5^{-s} z_2^{-t}$, получаем $e^\delta = \left(z_3^s z_8^{-t} z_5^{-s} z_2^{-t}\right)^r \prod_{i=1}^{8} z_i^{\delta k_i}$. В силу замечания $sr + \delta k_3 = 0$, $-tr + \delta k_8 = 0$, $-sr + \delta k_5 = 0$, $-tr + \delta k_2 = 0$, $k_1 = k_4 = k_6 = k_7 = 0$. Отсюда $k_3 = -k_5$, $k_2 = k_8$. Пусть $d =$НОД(δ, r). Из равенств $sr + \delta k_3 = 0$, $-tr + \delta k_8 = 0$ при $r \ne 0$ вытекает, что s, t делятся на $\frac{\delta}{d}$; противоречие с тем, что НОД$(\delta, s, t) = 1$ и $0 \le d \le r < \delta$. Значит, $r = 0$. Следствие доказано.

Следствие 2. *В группе R справедливо соотношение*

$$\mathrm{gr}(x_1,x_2)\cap\mathrm{gr}(x_3,x_4)=([x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t).$$

Доказательство. Возьмем произвольный $g\in\mathrm{gr}(x_1,x_2)\cap\mathrm{gr}(x_3,x_4)$. Тогда $g=x_1^kx_2^mc_1$, $g=x_3^nx_4^pc_2$ для некоторых $c_1,c_2\in R'$. По следствию 1 $k=m=n=p=0$. В силу (4)–(7) g можно представить в следующих видах:

$$g=[x_2,x_1]^{r_1}z_3^{l_1}z_8^{m_1},\quad g=[x_4,x_3]^{r_2}z_5^{l_2}z_2^{m_2},$$

$r_1,l_1,m_1,r_2,l_2,m_2\in\mathbb{Z}$, т. е. $e=[x_2,x_1]^{r_1}z_3^{l_1}z_8^{m_1}[x_4,x_3]^{-r_2}z_5^{-l_2}z_2^{-m_2}$. Из следствия 1 получаем, что r_2 делится на δ. Пусть $r_2=\delta q$. Тогда ввиду (4)–(7)

$$\begin{aligned}g&=[x_4,x_3]^{\delta q}z_5^{l_2}z_2^{m_2}\\&=([x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t[x_4,x_3,x_3]^{-s}[x_4,x_1,x_2]^{-t})^qz_5^{l_2}z_2^{m_2}\\&=[x_2,x_1]^{r_2}z_3^{qs}z_5^{-sq+l_2}z_2^{-tq+m_2}z_8^{-tq}.\end{aligned}$$

Воспользуемся однозначностью записи элемента в группе R (следствие 1). Из равенства $g=[x_2,x_1]^{r_1}z_3^{l_1}z_8^{m_1}$ получаем $r_2=r_1$, $qs=l_1$, $-sq+l_2=0$, $-tq+m_2=0$, $-tq=m_1$. Значит, $g=[x_2,x_1]^{\delta q}[x_2,x_1,x_1]^{qs}[x_2,x_1,x_2]^{tq}$, т. е. $g\in([x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t)$. Следствие доказано.

Лемма 5. *Пусть группа R_d задается в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ порождающими x_1,x_2,x_3,x_4, a, определяющими соотношениями группы R и определяющим соотношением $a^d=[x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t$, d делится на $4\delta^2$ и НОД$(\delta,s,t)=1$. Тогда отображение*

$$\tau: a\to[x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t,\quad x_2\to x_2^n[x_1,x_2]^{f_1},\quad x_1\to x_1^k[x_1,x_2]^{f_2},$$

$$x_4\to x_4^m[x_3,x_4]^{g_1},\quad x_3\to x_3^p[x_3,x_4]^{g_2},$$

где n,k,m,p,f_1,f_2,g_1,g_2 — целые числа, удовлетворяющие условиям $d=nk=mp$, $f_1=n\frac{k-1}{2}+\frac{nks}{\delta}-\frac{ns}{\delta}$, $f_2=k\frac{1-n}{2}-\frac{nkt}{\delta}+\frac{kt}{\delta}$, $g_1=m\frac{p-1}{2}+\frac{mps}{\delta}-\frac{ms}{\delta}$, $g_2=p\frac{1-m}{2}-\frac{mpt}{\delta}+\frac{pt}{\delta}$, продолжаемо до вложения R_d в R. В частности, $R_d\in qF_2$.

Доказательство. Так же, как при доказательстве леммы 4, по лемме 1 проверяется, что это отображение продолжается до гомоморфизма $\varphi: R_d\to R$. Докажем, что $\ker\varphi=(e)$. Для этого сначала установим ряд свойств группы R_d.

Соотношение $a^d=[x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t$ влечет, что $[a^d,u,v]=[a,u,v]^d=e$ для любых $u,v\in R_d$. Но R_d не имеет кручения, значит, $[a,u,v]=e$, в частности, $[a,x_1],[a,x_2],[a,x_3],[a,x_4]\in Z(R_d)$.

Пусть $g\in\ker\varphi$. Если $g=a^wx_1^lx_2^rx_3^qx_4^fc$, $c\in R_d'$, то $\varphi(g)=x_1^{kl}x_2^{nr}x_3^{qp}x_4^{mf}c'=e$, $c'\in R'$, откуда $l=r=q=f=0$ (так как $d=nk=mp\neq0$). Итак, g можно записать в следующем виде:

$$g=a^l[a,u][x_2,x_1]^{r_1}[x_3,x_1]^{r_2}[x_4,x_1]^{r_3}[x_3,x_2]^{r_4}[x_4,x_2]^{r_5}[x_4,x_3]^{r_6}c,$$

$$c\in\gamma_3(H_d),\quad 0\le l<d,\quad 0\le r_6<\delta.$$

Пусть σ_{ij} — сумма показателей степеней, в которой коммутатор $[x_i,x_j]$ входит в запись элемента $\varphi(g)$. Тогда $\sigma_{31}=pkr_2$, $\sigma_{41}=mkr_3$, $\sigma_{32}=pnr_4$, $\sigma_{42}=mnr_5$. Поскольку $\varphi(g)=e$, по следствию 1 все эти показатели равны 0. Отсюда $r_i=0$, $2\le i\le5$.

Учитывая, что $[a, x_i]^w = [a^w, x_i]$ при каждом целом w, $a^d \in \mathrm{gr}(x_1, x_2)'$ и d делится на δ, заметим, что элемент g^d имеет вид $g^d = [x_2, x_1]^v c$, $c \in \gamma_3(R_d)$. Так как $e = \varphi(g^d) = [x_2, x_1]^{nkv} c_1$ для подходящего $c_1 \in \gamma_3(R)$, то $v = 0$. Итак, g^d представим в виде $g^d = \prod\limits_{i=1}^{8} z_i^{k_i}$. Тогда в силу однозначности записи элемента $\varphi\left(\prod\limits_{i=1}^{8} z_i^{k_i}\right)$ в группе R выводим, что все k_i равны 0, откуда $g^d = e$, т. е. $g = e$. Тем самым $\ker\varphi = (e)$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 5 следует, что φ изоморфно отображает подгруппу $\mathrm{gr}(x_1, x_2, x_3, x_4)$. По аналогии с доказательством следствия 1 несложно найти канонический вид элемента из R_d. Понадобится лишь следующее утверждение.

Следствие 3. *Всякий элемент из* $\mathrm{gr}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ($\mathrm{gr}(x_1, x_2, x_3, x_4) \le R_d$, *$d$ делится на* $4\delta^2$) *однозначно представим в каноническом виде из следствия* 1.

Следствие 4. *В группе R_d (d делится на $4\delta^2$) верно соотношение*

$$\mathrm{gr}(x_1, x_2, a) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4, a) = (a).$$

Доказательство. Возьмем произвольный $g \in \mathrm{gr}(x_1, x_2, a) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4, a)$. Вложение φ из леммы 5 отображает g в $\varphi(g) \in \mathrm{gr}(x_1, x_2) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4)$. По следствию 2 $\mathrm{gr}(x_1, x_2) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4) = ([x_2, x_1]^\delta [x_2, x_1, x_1]^s [x_2, x_1, x_2]^t) = (\varphi(a))$. Получаем, что $\varphi(g) = \varphi(a)^l$ для некоторого l. Отсюда, поскольку φ — вложение, вытекает, что $g = a^l$. Следствие доказано.

Лемма 6. *Отображение $\tau : x_i \to x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $a \to a^c$ продолжаемо до вложения $\varphi : R_d \to R_{dc}$, где d делится на 2δ.*

Доказательство. Существование гомоморфизма φ следует из леммы 1. Если $g \in \ker\varphi$, то $g^d \in \mathrm{gr}(x_1, x_2, x_3, x_4)$. По следствию 3 канонические записи элементов g^d и $\varphi(g^d)$ совпадают. Значит, $g^d = e$, т. е. $\ker\varphi = (e)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — 3-ступенно нильпотентная группа без кручения, $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие групп, $G = \mathrm{gr}(F_2, Q) \in \mathscr{M}$, $F_2 \cap Q = ([x_2, x_1]^\delta [x_2, x_1, x_1]^s [x_2, x_1, x_2]^t)$. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(Q) = Q$.*

Доказательство. Поскольку G — группа с однозначным извлечения корня, НОД(δ, s, t)=1. Возьмем в качестве множества S порождающих группы G элементы x_1, x_2 и все элементы из Q. Пусть Σ — это множество определяющих соотношений

$$q = [x_2, x_1]^\delta [x_2, x_1, x_1]^s [x_2, x_1, x_2]^t$$

и все определяющие соотношения группы Q, где q — подходящий элемент из Q. Сначала покажем, что $\mathrm{gr}(S \mid \Sigma)$ — представление G в классе $\mathscr{N}_{3,\infty}$.

Так как G — группа без кручения, из соотношения $q = [x_2, x_1]^\delta [x_2, x_1, x_1]^s [x_2, x_1, x_2]^t$ следует, что $[q, u, v] = e$ для каждых u, v. Возьмем любой неединичный элемент $a \in Q$. Поскольку $a^n = q^m$ для некоторых ненулевых целых чисел n, m, несложно заметить, что из полученных соотношений выводятся в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ соотношения $[a, x_1, x_1] = e$, $[a, x_1, x_2] = e$, $[a, x_2, x_1] = e$, $[a, x_2, x_2] = e$. Кроме того, применяя коммутаторные тождества, получаем следующие равенства: $[a^n, x_i] = [a, x_i]^n$ при каждых $a \in Q$, $n \in \mathbb{N}$.

При каждом $p \in \mathbb{Z}$ из Σ вытекают в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ следующие соотношения:

$$([x_2, x_1, x_1]^p [(\sqrt[\delta]{q})^{-p}, x_1])^\delta = [x_2, x_1, x_1]^{p\delta} [[x_2, x_1]^\delta [x_2, x_1, x_1]^s [x_2, x_1, x_2]^t, x_1]^{-p} = e,$$

$([x_2,x_1,x_2]^p[(\sqrt[\delta]{q})^{-p},x_2])^\delta = [x_2,x_1,x_2]^{p\delta}[[x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t,x_2]^{-p} = e,$

т. е. соотношения

$$[x_2,x_1,x_1]^p[q^{-\frac{p}{\delta}},x_1]=e, \quad [x_2,x_1,x_2]^p[q^{-\frac{p}{\delta}},x_2]=e$$

выводятся в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ из Σ, $p\in\mathbb{Z}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$[F_2Z(G)/Z(G), QZ(G)/Z(G)] = (Z(G)).$$

Рассмотрим произвольное определяющее соотношение группы G. В силу вышеизложенного можно предполагать, что оно имеет такой вид:

$$t_1x_1^kx_2^n[x_2,x_1]^l[x_2,x_1,x_1]^p[x_2,x_1,x_2]^u[t_2,x_1][t_3,x_2]=e,$$

где $k,n,l,p,u\in\mathbb{N}$, $t_i\in Q$, $|t_1|,|t_2|,|t_3|<|q|$. Ясно, что $Z(G)\cap F_2=([x_2,x_1,x_1],$ $[x_2,x_1,x_2])$ и $q\notin Z(G)$. Поскольку $G/Z(G)$ не имеет кручения, $Q\cap Z(G)=(e)$. Значит, $G/Z(G)$ является прямым произведением с объединенной подгруппой своих подгрупп, т. е. $G/Z(G)\cong F_2/([x_2,x_1,x_1],[x_2,x_1,x_2])\times Q([x_1,x_2]=\sqrt[\delta]{q})$. В $G/Z(G)$ рассматриваемое соотношение превратится в следующее:

$$\bar t_1\bar x_1^k\bar x_2^n[\bar x_2,\bar x_1]^l=e \quad (|t_1|<|q|).$$

Из строения возникшего прямого произведения с объединенной подгруппой следует, что $t_1=e$, $k=0$, $n=0$, $l=0$, т. е. рассматриваемое соотношение имеет вид

$$[x_2,x_1,x_1]^p[x_2,x_1,x_2]^u[t_2,x_1][t_3,x_2]=e \quad (|t_2|,|t_3|<|q|).$$

Возьмем целые числа r,m,k ($r>0$) такие, что $t_2^r=q^m$, $t_3^r=q^k$. Имеем

$$\begin{aligned} e &= [x_2,x_1,x_1]^{pr}[x_2,x_1,x_2]^{ur}[t_2^r,x_1][t_3^r,x_2] \\ &= [x_2,x_1,x_1]^{pr}[x_2,x_1,x_2]^{ur}[q^m,x_1][q^k,x_2] - [x_2,x_1,x_1]^{pr}[x_2,x_1,x_2]^{ur}[q,x_1]^m[q,x_2]^k \\ &= [x_2,x_1,x_1]^{pr+m\delta}[x_2,x_1,x_2]^{ur+k\delta}. \end{aligned}$$

Отсюда $pr+m\delta=0$, $ur+k\delta=0$. Значит, $t_2=q^{-\frac{p}{\delta}}$, $t_3=q^{-\frac{u}{\delta}}$. Получаем, что рассматриваемое соотношение имеет вид

$$[x_2,x_1,x_1]^p[q^{-\frac{p}{\delta}},x_1][x_2,x_1,x_2]^u[q^{-\frac{u}{\delta}},x_2]=e.$$

Тем самым, как ранее замечено, выводится в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ из Σ. Таким образом, всякое соотношение группы G тривиально, т. е. следует из Σ в классе $\mathscr{N}_{3,\infty}$.

Ввиду леммы 6 можно считать, что

$$R_{k!}\subseteq R_{(k+1)!}\subseteq\dots,$$

где $k=4\delta^2$. При этом множество порождающих $S_{n!}$ и множество определяющих соотношений $\Sigma_{n!}$ группы $R_{n!}$ можно выбрать так, что

$$S_{k!}\subseteq S_{(k+1)!}\subseteq\dots, \quad \Sigma_{k!}\subseteq\Sigma_{(k+1)!}\subseteq\dots.$$

Отметим, что $\Sigma_{n!}$ состоит из определяющих соотношений группы R и соотношений $t_1=[x_2,x_1]^\delta[x_2,x_1,x_1]^s[x_2,x_1,x_2]^t$, $t_{i+1}^{i+1}=t_i$ ($i=1,2,\dots,n-1$). В этой ситуации, как известно [17, задача 16 к разд. 3], группа $K=\bigcup\limits_{n\ge k}R_{n!}$ имеет представление $K=\mathrm{gr}\big(\bigcup\limits_{n\ge k}S_{n!}\,\|\,\bigcup\limits_{n\ge k}\Sigma_{n!}\big)$. Из лемм 4 и 5 следует, что $R_{n!}\in$

qF_2 при каждом $n \geq k$. Отсюда $K \in qF_2$. Из следствия 4 получаем, что $\mathrm{gr}(x_1, x_2, t_1, t_2, \dots) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4, t_1, t_2, \dots) = \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$.

Будем рассматривать элементы $q_1, \dots, q_k, \dots$ группы $Q \leq G$ такие, что $q_1 = q, \dots, q_{r+1}^r = q_r, \dots$. Применим лемму 1, по которой отображения $x_1 \to x_1$, $x_2 \to x_2$, $q_i \to t_i$ $(i \geq 1)$ и $x_1 \to x_3$, $x_2 \to x_4$, $q_i \to t_i$ $(i \geq 1)$ продолжаемы соответственно до гомоморфизмов λ и ρ группы G в группу K.

Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Пусть $\lambda(g) \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$. Элемент g можно представить в следующем виде:

$$g = q_i^l [q_i, x_1]^r [q_i, x_2]^f [q_i, x_3]^n [q_i, x_4]^l [x_2, x_1]^{r_1}$$

для некоторого i. Тогда

$$\lambda(g) = t_i^l [t_i, x_1]^r [t_i, x_2]^f [t_i, x_3]^n [t_i, x_4]^l [x_2, x_1]^{r_1} \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots),$$

т. е. $t_i^l [t_i, x_1]^r [t_i, x_2]^f [t_i, x_3]^n [t_i, x_4]^l [x_2, x_1]^{r_1} = q_j^m$ для подходящих j, m. Можно считать, что все элементы, входящие в это равенство, содержатся в некоторой подгруппе R_d. Применим к ней следствие 3. Получим $r = f = n = l = r_1 = 0$, т. е. $g \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$. Аналогично показывается, что если $\rho(g) \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$, то $g \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$.

Итак, $K \in qF_2$ и λ, ρ совпадают в точности на Q. Из определения доминиона следует, что $\mathrm{dom}_G^{qF_2}(Q) = Q = \mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(Q)$. Лемма доказана.

§ 3. $Z(G)$ содержит Q

Лемма 8. *Пусть L — группа, заданная в $\mathscr{N}_3$ порождающими x_1, x_2, x_3, x_4 и определяющими соотношениями*

$$[x_2, x_1, x_1] = [x_4, x_3, x_3], \quad [x_4, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_4],$$

$$[x_4, x_2, x_2] = [x_4, x_2, x_3] = [x_4, x_2, x_4] = e,$$

$$[x_3, x_1, x_1] = [x_3, x_1, x_2] = [x_3, x_1, x_3] = [x_3, x_1, x_4] = e.$$

Тогда $L \in qF_2$.

Доказательство. Ясно, что $L/\gamma_3(L)$ — $\mathscr{N}_2$-свободная группа, которая содержится в $qF_2(\mathscr{N}_2)$.

Покажем, что L аппроксимируется группами из qF_2. Для этого возьмем произвольный неединичный элемент $g \in L$ и докажем существование гомоморфизма из L в подходящую группу из qF_2, при котором образ g будет отличен от единицы. В силу вышеизложенного можно считать, что $g \in \gamma_3(L)$.

Представим g так: $g = \prod_{i=1}^{11} z_i^{k_i}$. Рассмотрим отображение

$$\tau : x_2 \to y^l, \quad x_1 \to x^m, \quad x_4 \to y^p, \quad x_3 \to x^q,$$

где $lm^2 = pq^2$. Вычисляем

$$[\tau(x_2), \tau(x_1), \tau(x_1)] = [y, x, x]^{lm^2}, \quad [\tau(x_4), \tau(x_3), \tau(x_3)] = [y, x, x]^{pq^2},$$

$$[\tau(x_4), \tau(x_1), \tau(x_2)] = [y, x, y]^{pml}, \quad [\tau(x_2), \tau(x_1), \tau(x_4)] = [y, x, y]^{pml},$$

$$[\tau(x_4), \tau(x_2), \tau(x_i)] = [\tau(x_3), \tau(x_1), \tau(x_i)] = e.$$

Далее рассматриваем случаи $l = z$, $m = z^{10}$, $p = z^3$, $q = z^9$ для каждого целого числа z. По лемме 1 τ продолжается до гомоморфизма $\varphi_z : L \to F_2$. Видим, что

$$\varphi_z(g) = [y, x, x]^{pq^2k_5+pm^2k_1+pmqk_3-lq^2k_7+lmqk_{11}} \\ [y, x, y]^{p^2qk_9+pmlk_2+mp^2k_4-ql^2k_6-qlpk_8+l^2mk_{10}}.$$

Если $\varphi_z(g) = e$ при каждом рассматриваемом z, то $k_5z^{21} + k_1z^{23} + k_3z^{22} - k_7z^{19} + k_{11}z^{20} = 0$, $k_9z^{15} + k_2z^{14} + k_4z^{16} - k_6z^{11} - k_8z^{13} + k_{10}z^{12} = 0$. Поскольку ненулевой многочлен имеет конечное множество корней, все k_i равны 0, т. е. $g = e$. Лемма доказана.

Учитывая, что $L/\gamma_3(L)$ — свободная нильпотентная группа ступени 2, из доказательства леммы 8 имеем

Следствие 5. *Всякий элемент из L однозначно представим в виде*

$$x_1^k x_2^m x_3^n x_4^p \prod_{1\le i<j\le 4} [x_j, x_i]^{r_{ji}} \prod_{i=1}^{11} z_i^{k_i},$$

где $k, m, n, p, r_{li}, k_j \in \mathbb{Z}$.

Следствие 6. *В группе L справедливо соотношение*

$$\mathrm{gr}(x_1, x_2) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4) = ([x_2, x_1, x_1]).$$

Доказательство. Возьмем произвольный $g \in \mathrm{gr}(x_1, x_2) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4)$. Тогда

$$g = x_1^k x_2^m [x_2, x_1]^{r_{21}} [x_2, x_1, x_1]^{l_1} [x_2, x_1, x_2]^{l_2} = x_3^n x_4^p [x_4, x_3]^{r_{43}} [x_4, x_3, x_3]^{k_1} [x_4, x_3, x_4]^{k_2}.$$

Используя равенство $[x_2, x_1, x_1] = [x_4, x_3, x_3]$ и следствие 5, получаем $0 = k = m = n = p = l_2 = k_2$, $l_1 = k_1$. Отсюда $g \in ([x_2, x_1, x_1])$. Следствие доказано.

Лемма 9. *Пусть группа L_d задается в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ порождающими x_1, x_2, x_3, x_4, a, определяющими соотношениями группы L и определяющим соотношением $a^d = [x_2, x_1, x_1] = [x_4, x_3, x_3]$. Тогда отображение*

$$\tau : a \to [x_2, x_1, x_1], \quad x_2 \to x_2^l, \quad x_1 \to x_1^m, \quad x_4 \to x_4^p, \quad x_3 \to x_3^q,$$

где $d = lm^2 = pq^2 > 0$, продолжаемо до вложения L_d в L. В частности, $L_d \in qF_2$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 8, по лемме 1 проверяется, что это отображение продолжается до гомоморфизма $\varphi : L_d \to L$. Вычислим $\ker\varphi$. Сначала заметим, что так как фактор-группа нильпотентной группы по центру не имеет кручения, то $a \in Z(L_d)$.

Пусть $g \in \ker\varphi$. Если $g = a^w x_1^k x_2^r x_3^n x_4^f c$, $c \in L'_d$, то $\varphi(g) = x_1^{mk} x_2^{lr} x_3^{qn} x_4^{pf} c' = e$, $c' \in L'$, откуда $k = r = n = f = 0$. Итак, g можно записать в следующем виде:

$$g = a^k [x_2, x_1]^{r_1} [x_3, x_1]^{r_2} [x_4, x_1]^{r_3} [x_3, x_2]^{r_4} [x_4, x_2]^{r_5} [x_4, x_3]^{r_6} c,$$

$c \in \gamma_3(L_d)$, $0 \le k < d$.

Пусть σ_{ij} — сумма показателей степеней, в которой коммутатор $[x_i, x_j]$ входит в запись элемента $\varphi(g)$. Тогда

$$\sigma_{21} = lmr_1, \quad \sigma_{31} = qmr_2, \quad \sigma_{41} = pmr_3, \quad \sigma_{32} = qlr_4, \quad \sigma_{42} = plr_5, \quad \sigma_{43} = pqr_6.$$

Поскольку $\varphi(g) = e$, по следствию 5 все эти показатели равны 0. Отсюда $r_i = 0$, $i \leq 6$.

Следовательно, g можно представить так: $g = a^k \prod_{i=1}^{11} z_i^{k_i}$, $0 \leq k < d$.

Пусть σ_{iju} — сумма показателей степеней, в которой коммутатор $[x_i, x_j, x_u]$ входит в запись элемента $\varphi(g)$. Учитывая, что $[x_2, x_1, x_1] = [x_4, x_3, x_3]$, получаем

$$\sigma_{433} = pq^2 k_5 + k, \quad \sigma_{434} = p^2 q k_9, \quad \sigma_{411} = pm^2 k_1, \quad \sigma_{412} = pmlk_2,$$

$$\sigma_{413} = pmqk_3, \quad \sigma_{414} = p^2 mk_4, \quad \sigma_{322} = ql^2 k_6, \quad \sigma_{323} = q^2 lk_7,$$

$$\sigma_{324} = qlpk_8, \quad \sigma_{212} = l^2 mk_{10}, \quad \sigma_{213} = lmqk_{11}.$$

Ввиду однозначности записи элементов в группе L выводим, что $k_i = 0$ при всех $i \geq 2$ и k делится на pq^2. Но $pq^2 = d$, $0 \leq k < d$, следовательно, $k = 0$, откуда $k_1 = 0$. Итак, $g = e$, т. е. $\ker \varphi = (e)$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 9 вытекает

Следствие 7. *Всякий элемент из L_d однозначно представим в виде*

$$x_1^u x_2^w x_3^z x_4^t a^k [x_2, x_1]^{r_1} [x_3, x_1]^{r_2} [x_4, x_1]^{r_3} [x_3, x_2]^{r_4} [x_4, x_2]^{r_5} [x_4, x_3]^{r_6} \prod_{i=1}^{11} z_i^{k_i},$$

$0 \leq k < d$, $u, w, z, t, k, r_i, k_j \in \mathbb{Z}$.

Следствие 8. *В группе L_d верно соотношение*

$$\mathrm{gr}(x_1, x_2, a) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4, a) = (a).$$

Доказательство. Возьмем произвольный $g \in \mathrm{gr}(x_1, x_2, a) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4, a)$. Вложение φ из леммы 9 отображает g в $\varphi(g) \in \mathrm{gr}(x_1, x_2) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4)$. По следствию 6 $\mathrm{gr}(x_1, x_2) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4) = ([x_2, x_1, x_1]) = (\varphi(a))$. Получаем, что $\varphi(g) = \varphi(a)^k$ для некоторого k. Отсюда $g = a^k$, поскольку φ — вложение. Следствие доказано.

Лемма 10. *Отображение $\tau : x_i \to x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $a \to a^c$ продолжаемо до вложения $\varphi : L_d \to L_{dc}$.*

Доказательство. Существование гомоморфизма φ следует из леммы 1. Если неединичный элемент $g \in L_d$ имеет вид из следствия 7, то $\varphi(g) \neq e$, т. е. $\ker \varphi = (e)$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть G — 3-ступенно нильпотентная группа без кручения, $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие групп, $G = \mathrm{gr}(F_2, Q) \in \mathscr{M}$ и $F_2 \cap Q = ([x_2, x_1, x_1])$. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(Q) = Q$.*

Доказательство. Возьмем в качестве множества S порождающих группы G элементы x_1, x_2 и все элементы из Q. Пусть Σ — множество определяющих соотношений $q = [x_2, x_1, x_1]$ и все определяющие соотношения группы Q, где q — подходящий элемент из Q. Сначала покажем, что $\mathrm{gr}(S \mid \Sigma)$ — представление G в классе $\mathscr{N}_{3,\infty}$.

Из соотношения $q = [x_2, x_1, x_1]$ следует, что $q \in Z(G)$. Возьмем любой неединичный элемент $a \in Q$. Поскольку $a^n = q^m$ для некоторых ненулевых целых чисел n, m и $G/Z(G)$ не имеет кручения, то $a \in Z(G)$.

Рассмотрим произвольное определяющее соотношение группы G. В силу вышеизложенного можно предполагать, что оно имеет вид

$$t_1 x_1^k x_2^n [x_2, x_1]^l [x_2, x_1, x_1]^p [x_2, x_1, x_2]^m = e,$$

где $k, n, l, p, m \in \mathbb{N}$, $t_i \in Q$, $|t_1| < |q|$.

Пусть $t_1 \neq e$. Тогда $t_1 \in F_2 \cap Q = ([x_2, x_1, x_1])$, т. е. $t_1 = q^s$ для подходящего целого числа s; противоречие тому, что $|t_1| < |q|$. Итак, $t_1 = e$. Видим, что рассматриваемое соотношение является соотношением в группе F_2, значит, оно тривиальное. Таким образом, всякое соотношение группы G тривиально, т. е. следует из Σ в классе $\mathscr{N}_{3,\infty}$.

Ввиду леммы 10 можно считать, что

$$L_{1!} \subseteq L_{2!} \subseteq L_{3!} \subseteq \dots,$$

при этом множество порождающих $S_{n!}$ и множество определяющих соотношений $\Sigma_{n!}$ группы $L_{n!}$ можно выбрать так, что

$$S_{1!} \subseteq S_{2!} \subseteq S_{3!} \subseteq S_{4!} \subseteq \dots, \quad \Sigma_{1!} \subseteq \Sigma_{2!} \subseteq \Sigma_{3!} \subseteq \Sigma_{4!} \subseteq \dots.$$

Отметим, что $\Sigma_{n!}$ состоит из определяющих соотношений группы L и соотношений $t_1 = [x_2, x_1, x_1]$, $t_{i+1}^{i+1} = t_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. В этой ситуации, как было ранее замечено [17], группа $L = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} L_{n!}$ имеет следующее представление: $L = \mathrm{gr}\big(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_{n!} \| \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_{n!}\big)$. Из лемм 8, 9 следует, что $L_n \in qF_2$ при каждом n. Отсюда $L \in qF_2$. Из следствия 8 получаем, что $\mathrm{gr}(x_1, x_2, t_1, t_2, \dots) \cap \mathrm{gr}(x_3, x_4, t_1, t_2, \dots) = \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$.

Будем рассматривать элементы $q_1, q_2, \dots$ группы $Q \leq G$ такие, что $q_1 = q, \dots, q_{k+1}^k = q_k, \dots$. Применим лемму 1, по которой отображения $x_1 \to x_1$, $x_2 \to x_2$, $q_i \to t_i$ $(i \in \mathbb{N})$ и $x_1 \to x_3$, $x_2 \to x_4$, $q_i \to t_i$ $(i \in \mathbb{N})$ продолжаемы соответственно до гомоморфизмов λ и ρ группы G в группу L.

Возьмем произвольный $g \in G$ и предположим, что $\lambda(g) \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$. Элемент g можно представить в следующем виде:

$$g = q_i^k [x_2, x_1]^{r_1} [x_2, x_1, x_1]^{r_2} [x_2, x_1, x_2]^{r_3}$$

для некоторого i. Тогда

$$\lambda(g) = t_i^k [x_2, x_1]^{r_1} [x_2, x_1, x_1]^{r_2} [x_2, x_1, x_2]^{r_3} \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots),$$

т. е. $t_i^k [x_2, x_1]^{r_1} [x_2, x_1, x_1]^{r_2} [x_2, x_1, x_2]^{r_3} = q_j^m$ для подходящих j, m. Можно считать, что все элементы, входящие в это равенство, содержатся в некоторой подгруппе L_d. Применим к ней следствие 8. Получим $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, т. е. $g \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$. Аналогично показывается, что если $\rho(g) \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$, то $g \in \mathrm{gr}(t_1, t_2, \dots)$.

Итак, $L \in qF_2$, λ, ρ совпадают в точности на Q. Из определения доминиона следует, что $\mathrm{dom}_G^{qF_2}(Q) = Q = \mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(Q)$. Лемма доказана.

§ 4. Основной результат

Теорема. *Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех и $G = \mathrm{gr}(x_1, x_2, Q) \in \mathscr{M}$, Q — аддитивная группа рациональных чисел. Если $\mathrm{gr}(x_1, x_2)$ — относительно свободная группа, то $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(Q) = Q$.*

Доказательство. Пусть $H = \mathrm{gr}(x_1, x_2)$.

Случай 1: H — нильпотентная группа ступени 3 и $Q \cap G' \neq (e)$. По лемме 1 из [21] $H \cong F_2$. Зафиксируем нееденичный элемент $q \in Q \cap G'$. Покажем, что $[Q, G'] = (e)$.

В самом деле, пусть $q_1 \in Q$, $q_1 \neq e$, $g \in G'$. Поскольку Q — локально циклическая группа, то $q_1^m = q^n$ для подходящих целых чисел m, n, но $\left[q_1^m, g\right] = [q^n, g] = e$. Известно [16, 16.2.9], что во всякой нильпотентной группе без кручения если нееденичные степени элементов перестановочны, то и сами элементы перестановочны. Отсюда $[q_1, g] = e$, т. е. $[Q, G'] = (e)$.

Покажем, что $[Q, G] \leq Z(G)$. Берем любые элементы $q_1 \in Q$ $(q_1 \neq e)$, $g, f \in G$ и ненулевые целые числа m, n такие, что $q_1^m = q^n$. Тогда поскольку $q \in G'$, то $[q^n, f] \in Z(G)$. Отсюда $[q_1, f, g]^m = \left[q_1^m, f, g\right] = [q^n, f, g] = e$. Следовательно, $[q_1, f, g] = e$, т. е. $[q_1, f] \in Z(G)$. Таким образом, $[Q, G] \leq Z(G)$. В частности, при $q_1 \in Q$

$$[x_1, q_1, x_2] = [q_1, x_2, x_1]^{-1}[x_2, x_1, q_1]^{-1} = e.$$

Ввиду вышеизложенного так как $q \in G'$ и q — произведение базисных коммутаторов, q представим в следующем виде:

$$q = [x_2, x_1]^k [x_2, x_1, x_1]^{l_1} [x_2, x_1, x_2]^{l_2} [x_1, q_1]^l [x_2, q_2]^s$$

для подходящих целых чисел k, l_1, l_2, l, s.

Возьмем целые числа r, p, t, $r \neq 0$, такие, что $q_1^r = q^p$, $q_2^r = q^t$. Учитывая, что $\left[x_1, q_1^r\right] = [x_1, q_1]^r$, $\left[x_2, q_2^r\right] = [x_2, q_2]^r$, получаем

$$\begin{aligned} q^r &= [x_2, x_1]^{kr} [x_2, x_1, x_1]^{l_1 r} [x_2, x_1, x_2]^{l_2 r} \left[x_1, q_1^r\right]^l \left[x_2, q_2^r\right]^s \\ &= [x_2, x_1]^{kr} [x_2, x_1, x_1]^{l_1 r} [x_2, x_1, x_2]^{l_2 r} [x_1, q^p]^l [x_2, q^t]^s \\ &= [x_2, x_1]^{kr} [x_2, x_1, x_1]^{l_1 r} [x_2, x_1, x_2]^{l_2 r} [x_1, [x_2, x_1]^{pk}]^l [x_2, [x_2, x_1]^{tk}]^s \\ &= [x_2, x_1]^{kr} [x_2, x_1, x_1]^{l_1 r} [x_2, x_1, x_2]^{l_2 r} [x_1, [x_2, x_1]]^{pkl} [x_2, [x_2, x_1]]^{tks}. \end{aligned}$$

Итак, показали, что $H' \cap Q \neq (e)$. Так как Q — локально циклическая группа, $H \cap Q = (w)$. Поскольку $w^m \in H'$ при подходящем ненулевом целом m, то $w \in H'$.

Если $w \notin \gamma_3(H)$, то w имеет вид $w = ([x_2, x_1]^\delta [x_2, x_1, x_1]^s [x_2, x_{1,2}]^t)^r$ $(\delta \neq 0)$. Поскольку нильпотентная группа без кручения является группой с однозначным извлечением корня, получаем, что $r = \pm 1$. Из леммы 7 следует, что $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(Q) = Q$.

Пусть $w \in \gamma_3(H)$. Элемент w можно записать в следующем виде: $w = [x_2, x_1, x_2]^k [x_2, x_1, x_1]^m$ для подходящих целых чисел k, m, НОД$(k, m) = 1$. Выбираем новые свободные порождающие группы F_2 таким образом. Возьмем целые числа u, v такие, что $mv + ku = 1$. Вычисляем

$$\begin{aligned} \left[x_2^v x_1^{-u}, x_2^k x_1^m, x_2^k x_1^m\right] &= [x_2, x_1, x_2]^{k(mv+uk)} [x_2, x_1, x_1]^{m(mv+uk)} \\ &= [x_2, x_1, x_2]^k [x_2, x_1, x_1]^m = w, \end{aligned}$$

$y_2 = x_2^v x_1^{-u}$, $y_1 = x_2^k x_1^m$ — искомые свободные порождающие группы F_2. В этих порождающих $w = [y_2, y_1, y_1]$. Из леммы 11 получаем $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(Q) = Q$.

Случай 2: $Q \cap G' = (e)$. Нужное непосредственно вытекает из леммы 3.

Случай 3: $Q \cap G' \neq (e)$ и H — нильпотентная группа ступени не выше двух, т. е. $H \cong F_2(\mathscr{N}_2)$, либо H — свободная абелева группа, либо $H = (e)$.

Как и в случае 1, показывается, что $[Q, G'] = (e)$ и $[Q, G] \leq Z(G)$. Покажем, что всевозможные коммутаторы вида $[u, v, w]$, $u, v, w \in Q \cup \{x_1, x_2\}$ равны единице.

При $q_1, q_2 \in Q$ имеем $[u, q_1, q_2] = [q_1, q_2, u]^{-1}[q_2, u, q_1]^{-1} = e$, так как $[q_2, u] \in Z(G)$. Следовательно, $[q_1, u, q_2] = [u, q_1, q_2]^{-1} = e$.

При $q_1 \in Q$, $u, v \in \{x_1, x_2\}$ имеем $[u, v, q_1] = e$, $[u, q_1, v] = e$, $[q_1, v, u] = e$, так как $[Q, G'] = (e)$ и $[q_1, u] \in Z(G)$.

Таким образом, G является нильпотентной группой ступени не выше двух. По лемме 2 Q замкнута в G в любом квазимногообразии нильпотентных групп без кручения ступени не выше двух (например, в qG). Из определения доминиона следует, что Q замкнута в любом квазимногообразии, содержащем qG, в частности, в $\mathscr{M}$.

Все возможные случаи рассмотрены. Теорема доказана.

Следствие 9. *Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех, всякая 2-порожденная группа в котором является относительно свободной. Тогда аддитивная группа Q рациональных чисел 2-замкнута в $\mathscr{M}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Будкин А. И.* Решетки доминионов универсальных алгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 26–45.
2. *Budkin A. I.* Dominions in quasivarieties of universal algebras // Stud. Log. 2004. V. 78, N 1/2. P. 107–127.
3. *Шахова С. А.* О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 2. С. 238–251.
4. *Шахова С. А.* Условия дистрибутивности решеток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 484–499.
5. *Шахова С. А.* Об одном свойстве операции пересечения в решетках доминионов квазимногообразий абелевых групп // Изв. АлтГУ. 2010. Т. 65, № 1. С. 41–43.
6. *Шахова С. А.* О существовании решетки доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Изв. АлтГУ. 2011. Т. 69, № 1. С. 31–33.
7. *Будкин А. И.* Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 541–557.
8. *Magidin A.* Dominions in varieties of nilpotent groups // Comm. Algebra. 2000. V. 28. P. 1241–1270.
9. *Шахова С. А.* Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 936–941.
10. *Будкин А. И.* О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 498–505.
11. *Будкин А. И.* О доминионе полной подгруппы метабелевой группы // Изв. АлтГУ. 2010. Т. 65, № 2. С. 15–19.
12. *Будкин А. И.* О доминионах абелевых подгрупп метабелевых групп // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 5. С. 608–622.
13. *Будкин А. И.* Об абсолютной замкнутости абелевых групп без кручения в классе метабелевых групп // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 1. С. 15–25.
14. *Будкин А. И.* О замкнутости локально циклической подгруппы в метабелевой группе // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1250–1278.

15. *Будкин А. И.* О доминионах разрешимых групп // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 5. С. 275–588.
16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
17. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
18. *Будкин А. И.* Квазимногообразия групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002.
19. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
20. *Федоров А. Н.* Квазитождества свободной 2-нильпотентной группы // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 590–597.
21. *Будкин А. И.* О квазимногообразиях нильпотентных групп без кручения аксиоматического ранга 3 // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 56–63.

Статья поступила 9 декабря 2016 г.

Будкин Александр Иванович
Алтайский гос. университет,
ул. Ленина, 61, Барнаул 656064
budkin@math.asu.ru