Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 512.815.1

МАТРИЦЫ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА

В. М. Гордиенко

Аннотация. Рассматриваются матрицы из коэффициентов Клебша — Гордана. С их помощью оказывается удобно формулировать, доказывать и использовать многие факты теории представлений групп $SO(3)$ и $SU(2)$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.608

Ключевые слова: представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$, коэффициенты Клебша — Гордана, гармонические полиномы.

Введение

Коэффициенты Клебша — Гордана возникают при описании разложения представлений групп $SO(3)$ и $SU(2)$ на неприводимые, они играют очень важную роль в теории и приложениях [1–3]. В [4] предложено из этих коэффициентов определенным образом составлять матрицы и замечено, что эти матрицы составляют канонический базис неприводимых представлений в пространстве матриц. В [5] такие матрицы использовались при записи инвариантных систем. В [6] определены операторы в пространстве спинорных полиномов, матрицами которых являются матрицы Клебша — Гордана. В данной статье будет продолжено изучение матриц Клебша — Гордана как самостоятельного объекта. Будут рассмотрены матрицы Клебша — Гордана, преобразующиеся по представлениям весов 0 и 1. Матрицей, преобразующейся по представлению веса 0 (инвариантной матрицей), оказывается матрица перехода от канонического базиса к сопряженному (§ 3). Эта матрица, как известно, участвует в конструкции инвариантов. Матриц, преобразующихся по представлению веса 1, имеется три группы. Для первой группы будет установлена связь с матрицами инфинитезимальных операторов (§ 4), для второй — с дифференцированием гармонических полиномов (§ 6), для третьей — с умножением гармонических полиномов на независимую переменную (§ 7).

§ 1. Необходимые сведения, обозначения

1. Связь групп $SO(3)$ и $SU(2)$. Известна тесная связь групп $SO(3)$ и $SU(2)$. Каждой ортогональной матрице $Q \in SO(3)$ ($Q^\top Q = I_3$, $\det Q = 1$) можно сопоставить унитарную унимодулярную матрицу $g \in SU(2)$ ($g^* g = I_2$, $\det g = 1$):

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1),$$

так, что преобразование $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ описывается формулой

$$\begin{bmatrix} z' & x' + iy' \\ x' - iy' & -z' \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{bmatrix} g^*.$$

Очевидно, что элементам $\pm g \in SU(2)$ соответствует одно и то же $Q \in SO(3)$. Верно и обратное: каждому $Q \in SO(3)$ отвечает одна и только одна пара $\pm g \in SU(2)$.

Укажем явную формулу, задающую отображение $SU(2) \to SO(3)$:

$$Q_g = \begin{bmatrix} \Re(\alpha^2 - \beta^2) & -\Im(\alpha^2 + \beta^2) & -2\Re\alpha\beta \\ \Im(\alpha^2 - \beta^2) & \Re(\alpha^2 + \beta^2) & -2\Im\alpha\beta \\ 2\Re\alpha\overline{\beta} & -2\Im\alpha\overline{\beta} & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{bmatrix}.$$

В группе $SO(3)$ выделяют три однопараметрические подгруппы, соответствующие вращениям вокруг координатных осей:

$$Q_{[x]}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}, \quad Q_{[y]}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & 0 & \sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega & 0 & \cos\omega \end{bmatrix},$$

$$Q_{[z]}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Этим подгруппам по описанному соответствию в группе $SU(2)$ отвечают однопараметрические подгруппы

$$g_{[x]}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\omega}{2} & i\sin\frac{\omega}{2} \\ i\sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} \end{bmatrix}, \quad g_{[y]}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\omega}{2} & -\sin\frac{\omega}{2} \\ \sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} \end{bmatrix},$$

$$g_{[z]}(\omega) = \begin{bmatrix} e^{\frac{i\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega}{2}} \end{bmatrix}.$$

2. Канонический базис. Хорошо известно $[1, 4, 7, 8]$, что в пространстве любой размерности K существует единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление группы $SU(2)$. Размерность K пространства неприводимого представления записывают в виде $K = 2N + 1$, и число N называют *весом* представления. При этом в случае пространства нечетной размерности вес целый, а в случае пространства четной размерности — полуцелый. Известно, что в случае *целого веса* неприводимые представления группы $SU(2)$ обладают свойством четности: $T_{-g} = T_g$. Поэтому каждому неприводимому представлению группы $SU(2)$ целого веса N соответствует неприводимое представление группы $SO(3)$ в пространстве нечетной размерности $2N + 1$. Других неприводимых представлений группы $SO(3)$ нет.

В случае *полуцелого веса* неприводимые представления группы $SU(2)$ обладают свойством нечетности: $T_{-g} = -T_g$, и такие представления приводят к двузначным представлениям группы $SO(3)$.

Для однопараметрических подгрупп представления вводят инфинитезимальные операторы

$$A = \frac{d}{d\omega} T_{g_{[x]}(\omega)} \Big|_{\omega=0}, \quad B = \frac{d}{d\omega} T_{g_{[y]}(\omega)} \Big|_{\omega=0}, \quad C = \frac{d}{d\omega} T_{g_{[z]}(\omega)} \Big|_{\omega=0}.$$

Наряду с инфинитезимальными операторами A, B, C рассматривают их линейные комбинации

$$F = iC, \quad F^+ = iA - B, \quad F^- = iA + B. \tag{1}$$

Пусть E_N — векторное пространство размерности $2N+1$, в котором действует неприводимое представление T_g группы $SU(2)$ (или $SO(3)$) веса N. Канонический базис $e_N^{-N}, e_N^{-N+1}, \dots, e_N^{N-1}, e_N^N$ в E_N определяется соотношениями

$$e_N^N \neq 0,\ F^+ e_N^N = 0,\ F e_N^N = N e_N^N,\ F^- e_N^n = -\rho_{n-\frac{1}{2}} e_N^{n-1},\ n = N, N-1, \dots, -N+1, \tag{2}$$

где $\rho_k = \sqrt{\left(N+k+\frac{1}{2}\right)\left(N-k+\frac{1}{2}\right)}$. При этом автоматически выполняется

$$F e_N^n = n e_N^n,\ F^- e_N^{-N} = 0,\ F^+ e_N^n = -\rho_{n+\frac{1}{2}} e_N^{n+1}, \quad n = -N, -N+1, \dots, N-1.$$

Канонический базис определяется соотношениями (2) однозначно с точностью до одного общего множителя, который выбирается из соображений нормировки.

Матрицы операторов F, $F^{\pm}$ в каноническом базисе имеют простой вид:

$$F_N = \begin{bmatrix} -N & & & & \\ & -N+1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N-1 & \\ & & & & N \end{bmatrix},$$

$$F_N^- = -\begin{bmatrix} 0 & \rho_{-N+\frac{1}{2}} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \rho_{N-\frac{1}{2}} \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_N^+ = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \rho_{-N+\frac{1}{2}} & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & \rho_{N-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим свойства

$$F_N = (F_N)^\top, \quad F_N^+ = (F_N^-)^\top. \tag{3}$$

Для инфинитезимальных операторов A, B, C выполняются коммутационные соотношения

$$[A, B] = C, \quad [B, C] = A, \quad [C, A] = B.$$

Отсюда следуют коммутационные соотношения для их линейных комбинаций:

$$[F_N^-, F_N] = F_N^-, \quad [F_N, F_N^+] = F_N^+, \quad [F_N^+, F_N^-] = 2F_N. \tag{4}$$

Обозначим через $H_N(g)$ матрицу преобразования T_g в E_N в каноническом базисе:

$$T_g e_N^n = \sum_{n'} H_N^{n'n}(g) e_N^{n'}, \quad \left[\dots T_g e_N^n \dots\right] = \left[\dots e_N^n \dots\right] H_N(g), \tag{5}$$

столбцы матрицы $H_N(g)$ состоят из координат образов векторов. При этом, если p_n — координаты вектора $e \in E_N$:

$$e = \sum_n p_n e_N^n = \begin{bmatrix} \dots e_N^n \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{bmatrix},$$

то координаты q_n вектора $T_g e$ вычисляются по формуле

$$q_n = \sum_{n'} H_N^{nn'}(g) p_{n'}; \qquad \begin{bmatrix} \vdots \\ q_n \\ \vdots \end{bmatrix} = H_N(g) \begin{bmatrix} \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Ясно, что

$$A_N = \frac{d}{d\omega} H_N(g_{[x]}(\omega))\Big|_{\omega=0}, \ B_N = \frac{d}{d\omega} H_N(g_{[y]}(\omega))\Big|_{\omega=0}, \ C_N = \frac{d}{d\omega} H_N(g_{[z]}(\omega))\Big|_{\omega=0}$$

являются матрицами инфинитезимальных операторов представления T_g в каноническом базисе. Матрицы операторов связаны так же, как и операторы, поэтому из (1) следует, что

$$F_N = iC_N, \quad F_N^+ = iA_N - B_N, \quad F_N^- = iA_N + B_N. \tag{6}$$

Выпишем обратные соотношения

$$C_N = -iF_N, \quad A_N = -\frac{i}{2}(F_N^- + F_N^+), \quad B_N = \frac{1}{2}(F_N^- - F_N^+).$$

Из (3) получаем, что матрицы инфинитезимальных операторов A_N, B_N, C_N косоэрмитовы:

$$A_N^* = -A_N, \quad B_N^* = -B_N, \quad C_N^* = -C_N.$$

Отсюда вытекает, что матрицы представлений групп $SO(3)$ и $SU(2)$ в каноническом базисе унитарны:

$$H_N^*(g) = H_N(g).$$

3. Неприводимые представления группы $SO(3)$. Неприводимые представления группы $SO(3)$ целого веса N можно реализовать в пространстве однородных гармонических полиномов степени N:

$$\mathbf{T}_Q P(\mathbf{x}) = P(Q^\top \mathbf{x}).$$

Обозначено $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$.

Однопараметрическими подгруппами представления $\mathbf{T}_Q$ являются представления однопараметрических подгрупп $\mathbf{T}_{Q_{[x]}(\omega)}$, $\mathbf{T}_{Q_{[y]}(\omega)}$, $\mathbf{T}_{Q_{[z]}(\omega)}$. Инфинитезимальные операторы

$$\mathbf{A} = \frac{d}{d\omega}\mathbf{T}_{Q_{[x]}(\omega)}\Big|_{\omega=0}, \quad \mathbf{B} = \frac{d}{d\omega}\mathbf{T}_{Q_{[y]}(\omega)}\Big|_{\omega=0}, \quad \mathbf{C} = \frac{d}{d\omega}\mathbf{T}_{Q_{[z]}(\omega)}\Big|_{\omega=0}$$

выглядят так:

$$\mathbf{A} = z\partial_y - y\partial_z, \quad \mathbf{B} = x\partial_z - z\partial_x, \quad \mathbf{C} = y\partial_x - x\partial_y.$$

Линейные комбинации инфинитезимальных операторов имеют вид

$$\mathbf{F} = i\mathbf{C} = i(y\partial_x - x\partial_y),$$

$$\mathbf{F}^- = i\mathbf{A} + \mathbf{B} = z(i\partial_y - \partial_x) - (iy - x)\partial_z,$$
$$\mathbf{F}^+ = i\mathbf{A} - \mathbf{B} = z(i\partial_y + \partial_x) - (iy + x)\partial_z.$$

Полиномы канонического базиса $\Pi_N^n(\mathbf{x})$ ($n = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N$) определяются рекуррентно:

$$\Pi_N^{-N}(\mathbf{x}) = \nu_N(iy - x)^N,\ \Pi_N^N(\mathbf{x}) = \nu_N(iy + x)^N,\ \nu_N = \frac{\sqrt{(2N+3)(2N+1)!}}{\sqrt{3}\cdot 2^N \cdot N!}, \tag{7}$$

и далее используется $F_- e_N^n = -\rho_{n-\frac{1}{2}} e_N^{n-1}$ из (2) или аналогичное $F_+ e_N^n = -\rho_{n+\frac{1}{2}} e_N^{n+1}$. Выбор нормировки (выбор множителя ν_N) сделан исходя из условия

$$\frac{3}{4\pi}\iiint\limits_{|\mathbf{x}|\le 1} |\Pi_N^n(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = 1.$$

Формула (5) в нашей реализации представления выглядит так:

$$[\cdots \quad \Pi_N^n(Q^\top \mathbf{x}) \quad \cdots] = [\cdots \quad \Pi_N^n(\mathbf{x}) \quad \cdots]\, H_N(Q). \tag{8}$$

Нам понадобятся коммутационные соотношения операторов дифференцирования и инфинитезимальных операторов:

$$\begin{gathered}
\mathbf{F}\partial_z = \partial_z\mathbf{F}; \quad \mathbf{F}(i\partial_y - \partial_x) = (i\partial_y - \partial_x)\mathbf{F} - (i\partial_y - \partial_x);\\
\mathbf{F}(i\partial_y + \partial_x) = (i\partial_y + \partial_x)\mathbf{F} + (i\partial_y + \partial_x);\\
\mathbf{F}^+\partial_z = \partial_z\mathbf{F}^+ - (i\partial_y + \partial_x); \quad \mathbf{F}^+(i\partial_y - \partial_x) = (i\partial_y - \partial_x)\mathbf{F}^+ - 2\partial_z;\\
\mathbf{F}^+(i\partial_y + \partial_x) = (i\partial_y + \partial_x)\mathbf{F}^+;\\
\mathbf{F}^-\partial_z = \partial_z\mathbf{F}^- - (i\partial_y - \partial_x); \quad \mathbf{F}^-(i\partial_y - \partial_x) = (i\partial_y - \partial_x)\mathbf{F}^-;\\
\mathbf{F}^-(i\partial_y + \partial_x) = (i\partial_y + \partial_x)\mathbf{F}^- - 2\partial_z.
\end{gathered} \tag{9}$$

Также выпишем коммутационные соотношения операции умножения на независимую переменную и инфинитезимальных операторов:

$$\begin{gathered}
\mathbf{F}zP(\mathbf{x}) = z\mathbf{F}P(\mathbf{x}); \quad \mathbf{F}(iy - x)P(\mathbf{x}) = (iy - x)\mathbf{F}P(\mathbf{x}) - (iy - x)P(\mathbf{x});\\
\mathbf{F}(iy + x)P(\mathbf{x}) = (iy + x)\mathbf{F}P(\mathbf{x}) + (iy + x)P(\mathbf{x});\\
\mathbf{F}^+zP(\mathbf{x}) = z\mathbf{F}^+P(\mathbf{x}) - (iy + x)P(\mathbf{x});\\
\mathbf{F}^+(iy - x)P(\mathbf{x}) = (iy - x)\mathbf{F}^+P(\mathbf{x}) - 2zP(\mathbf{x});\\
\mathbf{F}^+(iy + x)P(\mathbf{x}) = (iy + x)\mathbf{F}^+P(\mathbf{x});\\
\mathbf{F}^-zP(\mathbf{x}) = z\mathbf{F}^-P(\mathbf{x}) - (iy - x)P(\mathbf{x});\\
\mathbf{F}^-(iy - x)P(\mathbf{x}) = (iy - x)\mathbf{F}^-P(\mathbf{x});\\
\mathbf{F}^-(iy + x)P(\mathbf{x}) = (iy + x)\mathbf{F}^-P(\mathbf{x}) - 2zP(\mathbf{x}).
\end{gathered} \tag{10}$$

4. Неприводимые представления группы $SU(2)$. Неприводимые представления T_g группы $SU(2)$ веса N очень просто реализуются в пространстве однородных полиномов $h(\xi, \eta)$ степени $2N$ формулами

$$T_g h(\xi, \eta) = h^{(N)}(\xi', \eta') = h(\bar{\alpha}\xi - \beta\eta, \bar{\beta}\xi + \alpha\eta);$$

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = g^* \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Однородные полиномы $h(\xi, \eta)$ от двух комплексных переменных ξ и η называются *спинорными*.

Инфинитезимальные операторы представления T_g имеют вид

$$A = -\frac{i}{2}(\eta\partial_\xi + \xi\partial_\eta), \quad B = \frac{1}{2}(\eta\partial_\xi - \xi\partial_\eta), \quad C = -\frac{i}{2}(\xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta).$$

Линейные комбинации инфинитезимальных операторов имеют вид

$$F = iC = \frac{1}{2}(\xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta), \quad F^- = iA + B = \eta\partial_\xi, \quad F^+ = iA - B = \xi\partial_\eta.$$

Канонический базис образуют нормированные мономы

$$e_N^n(\xi, \eta) = (-1)^{N+n}\sqrt{\frac{(2N+1)!}{(N+n)!(N-n)!}}\xi^{N+n}\eta^{N-n}, \ n = -N, -N+1, \dots, N-1, N.$$

Наряду с каноническим базисом $e_N^n(\xi, \eta)$ рассмотрим базис

$$\hat{e}_N^n(\xi, \eta) = (-1)^{N+n} e_N^{-n}(\xi, \eta).$$

Обозначим через J_N матрицу перехода от базиса $e_N^n(\xi, \eta)$ к базису $\hat{e}_N^n(\xi, \eta)$:

$$[\dots \hat{e}_N^n(\xi, \eta) \dots] = [\dots e_N^n(\xi, \eta) \dots] \, J_N.$$

Легко видеть, что

$$J_N = \begin{bmatrix} & & & & (-1)^{2N} \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & 1 & & & \\ -1 & & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}, \quad J_N^\top = J_N^{-1} = (-1)^{2N} J_N.$$

Матрицу представления T_g в каноническом базисе $e_N^n(\xi, \eta)$ обозначили через $H_N(g)$. Несложно проверить, что в базисе $\hat{e}_N^n(\xi, \eta)$ матрицей представления будет $\overline{H}_N(g)$ (матрица с сопряженными элементами) и, значит,

$$\overline{H}_N(g) = J_N^{-1} H_N(g) J_N. \tag{11}$$

Поэтому базис $\hat{e}_N^n(\xi, \eta)$ называется *сопряженным*.

Заметим, что $g_{[y]}(\pi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = J_{\frac{1}{2}}$. Рассмотрим преобразование $T_{g_{[y]}(\pi)}$, являющееся представлением поворота вокруг y оси на угол π:

$$T_{g_{[y]}(\pi)} e_N^n(\xi, \eta) = e_N^n(\eta, -\xi) = (-1)^{N+n} e_N^{-n}(\xi, \eta) = \hat{e}_N^n(\xi, \eta),$$

т. е. преобразование $T_{g_{[y]}(\pi)}$ представляет собой то преобразование, которое переводит канонический базис в сопряженный, а значит, $J_N = H_N(g_{[y]}(\pi))$.

Непосредственно проверяются следующие формулы коммутации:

$$F_N J_N = -J_N F_N, \quad F_N^+ J_N = -J_N F_N^-, \quad F_N^- J_N = -J_N F_N^+. \tag{12}$$

5. Представление в пространстве прямоугольных матриц. Пусть $C_{[L,M]}$ — матрица размера $(2L+1)\times(2M+1)$. В пространстве таких матриц определим представление $\mathscr{T}_g$ группы $SU(2)$ $(SO(3))$ следующим образом:

$$\mathscr{T}_g C_{[L,M]} = H_L(g) C_{[L,M]} H_M^\top(g). \tag{13}$$

Инфинитезимальные операторы представления $\mathscr{T}_g$ имеют вид

$$\mathscr{A} = \frac{d}{d\omega}\mathscr{T}_{g_{[x]}(\omega)}\bigg|_{\omega=0}, \quad \mathscr{B} = \frac{d}{d\omega}\mathscr{T}_{g_{[y]}(\omega)}\bigg|_{\omega=0}, \quad \mathscr{C} = \frac{d}{d\omega}\mathscr{T}_{g_{[z]}(\omega)}\bigg|_{\omega=0}.$$

Вычислим оператор $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} C_{[L,M]} = \frac{d}{d\omega}\mathscr{T}_{g_{[x]}(\omega)} C_{[L,M]}\bigg|_{\omega=0} = \frac{d}{d\omega} H^L(g_{[x]}(\omega)) C_{[L,M]} [H^M(g_{[x]}(\omega))]^\top\bigg|_{\omega=0}$$
$$= A_L C_{[L,M]} + C_{[L,M]} A_M^\top.$$

Аналогично вычисляем

$$\mathscr{B} C_{[L,M]} = B_L C_{[L,M]} + C_{[L,M]} B_M^\top,$$

$$\mathscr{C} C_{[L,M]} = C_L C_{[L,M]} + C_{[L,M]} C_M^\top.$$

Для операторов $\mathscr{F} = i\mathscr{C}, \mathscr{F}^- = i\mathscr{A} + \mathscr{B}, \mathscr{F}^+ = i\mathscr{A} - \mathscr{B}$ с учетом (6) имеем

$$\mathscr{F} C_{[L,M]} = F_L C_{[L,M]} + C_{[L,M]} (F_M)^\top,$$

$$\mathscr{F}^- C_{[L,M]} = F_L^- C_{[L,M]} + C_{[L,M]} (F_M^-)^\top,$$

$$\mathscr{F}^+ C_{[L,M]} = F_L^+ C_{[L,M]} + C_{[L,M]} (F_M^+)^\top.$$

Используя (3), получаем

$$\begin{aligned} \mathscr{F} C_{[L,M]} &= F_L C_{[L,M]} + C_{[L,M]} F_M, \\ \mathscr{F}^- C_{[L,M]} &= F_L^- C_{[L,M]} + C_{[L,M]} F_M^+, \\ \mathscr{F}^+ C_{[L,M]} &= F_L^+ C_{[L,M]} + C_{[L,M]} F_M^-. \end{aligned} \tag{14}$$

Представление $\mathscr{T}_g$ приводимо. В следующем параграфе опишем разложение этого представления на неприводимые и в каждом подпространстве, где действует неприводимое представление, построим канонический базис.

§ 2. Определение матриц Клебша — Гордана

Пусть $\left[\dots e_L^l \dots\right]$ — канонический базис неприводимого представления веса L в векторном пространстве E_L, а $\left[\dots e_M^m \dots\right]$ — канонический базис неприводимого представления веса M в векторном пространстве E_M.

Определим пространство $E_L \otimes E_M$ как линейную комбинацию символов $e_L^l e_M^m$. Символы $e_L^l e_M^m$ образуют базис в $E_L \otimes E_M$, $\dim(E_L \otimes E_M) = \dim E_L \cdot \dim E_M$.

Любой вектор $f \in E_L \otimes E_M$ можно разложить по базису

$$f = \sum_{l,m} C_{[L,M]}^{[l,m]} e_L^l e_M^m.$$

Коэффициенты $C_{[L,M]}^{[l,m]}$ являются координатами вектора f.

Составим матрицу из векторов $e^l_L e^m_M$: $E_{[L,M]} = \begin{bmatrix} \vdots \\ e^l_L \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots e^m_M \dots \end{bmatrix}$, и матрицу из координат: $C_{[L,M]} = \bigl(C^{[l,m]}_{[L,M]}\bigr)_{lm}$, тогда

$$f = \sum_{l,m} C^{[l,m]}_{[L,M]} e^l_L e^m_M = \begin{bmatrix} \dots e^l_L \dots \end{bmatrix} C_{[L,M]} \begin{bmatrix} \vdots \\ e^m_M \\ \vdots \end{bmatrix}$$
$$= \operatorname{tr}\bigl(C^\top_{[L,M]} E_{[L,M]}\bigr) = \operatorname{tr}\bigl(E_{[L,M]} C^\top_{[L,M]}\bigr).$$

Пусть в пространстве E_L действует неприводимое представление веса L с матрицей $H_L(g)$, а в пространстве E_M — неприводимое представление веса M с матрицей $H_M(g)$. Тогда в пространстве $E_L \otimes E_M$ возникает индуцированное представление, которое определяется следующим образом:

$$T_g e^l_L e^m_M = \sum_{l'm'} H^{l'l}_L(g) e^{l'}_L H^{m'm}_M(g) e^{m'}_M$$

или, в матричной форме,

$$T_g E_{[L,M]} = H^\top_L(g) E_{[L,M]} H_M(g).$$

Преобразование координат при этом задается формулой

$$T_g C_{[L,M]} = H_L(g) C_{[L,M]} H^\top_M(g),$$

которая совпадает с определением представления $\mathscr{T}_g$ в пространстве матриц (13).

Построенное в пространстве $E_L \otimes E_M$ представление приводимо [4, 7] и раскладывается на неприводимые представления весов

$$N = \mid L - M \mid, \mid L - M \mid +1, \dots, L + M - 1, L + M.$$

Пусть векторы $f^n_N \in E_L \otimes E_M$ $(n = -N, -N+1, \dots, N-1, N)$ образуют канонический базис инвариантного подпространства, преобразующегося по неприводимому представлению веса N, т. е. (см. (5))

$$T_g f^n_N = \sum_{n'} H^{n'n}_N(g) f^{n'}_N. \tag{15}$$

Разложим векторы f^n_N по базису:

$$f^n_N = \sum_{l,m} C^{n[l,m]}_{N[L,M]} e^l_L e^m_M,$$

коэффициенты разложения $C^{n[l,m]}_{N[L,M]}$ (координаты вектора f^n_N) называются *коэффициентами Клебша — Гордана.* Матрицу $C^n_{N[L,M]}$, составленную из этих коэффициентов

$$C^n_{N[L,M]} = \bigl(C^{n[l,m]}_{N[L,M]}\bigr)_{lm},$$

естественно назвать *матрицей Клебша — Гордана.*

Под действием преобразования $\mathscr{T}_g$ матрицы Клебша — Гордана преобразуются по формуле

$$\mathscr{T}_g C^n_{N[L,M]} = H_L(g) C^n_{N[L,M]} H^\top_M(g).$$

Из формулы (15) для векторов следует формула для координат этих векторов:

$$\mathscr{T}_g C^n_{N[L,M]} = \sum_{n'} H_N^{n'n}(g) C^{n'}_{N[L,M]}$$

или

$$H_L(g) C^n_{N[L,M]} H^\top_M(g) = \sum_{n'} H_N^{n'n}(g) C^{n'}_{N[L,M]}.$$

Тем самым матрицы Клебша — Гордана $C^n_{N[L,M]}$ образуют канонический базис неприводимого представления веса N. Они осуществляют разложение представления $\mathscr{T}_g$ на неприводимые.

Соотношения (2) в данном случае выглядят так:

$$C^N_{N[L,M]} \neq 0, \quad \mathscr{F}_+ C^N_{N[L,M]} = 0, \quad \mathscr{F} C^N_{N[L,M]} = N C^N_{N[L,M]},$$

$$\mathscr{F}_- C^n_{N[L,M]} = -\rho_{n-\frac12} C^{n-1}_{N[L,M]}, \quad n = N, N-1, \dots, -N+1,$$

или, более подробно (см. (14)),

$$\begin{gathered} C^N_{N[L,M]} \neq 0, \quad F_L^+ C^N_{N[L,M]} + C^N_{N[L,M]} F_M^- = 0, \\ F_L C^N_{N[L,M]} + C^N_{N[L,M]} F_M = N C^N_{N[L,M]} \\ F_L^- C^n_{N[L,M]} + C^n_{N[L,M]} F_M^+ = -\rho_N^{n-\frac12} C^{n-1}_{N[L,M]}, \quad n = N, N-1, \dots, -N+1. \end{gathered} \tag{16}$$

Этими соотношениями матрицы Клебша — Гордана, как и любой канонический базис, определяются однозначно с точностью до одного общего для всех N, L, M множителя. Этот множитель выбирается так, что (см. [2, гл. I])

$$\sum_{l+m=n} \big(C^{n[l,m]}_{N[L,M]}\big)^2 = 1, \quad C^{N[L,N-L]}_{N[L,M]} > 0. \tag{17}$$

Последнее условие означает, что у самой правой матрицы Клебша — Гордана в ряду матриц $C^{-N}_{N[L,M]}, C^{-N+1}_{N[L,M]}, \dots, C^{N-1}_{N[L,M]}, C^N_{N[L,M]}$, составляющих базис неприводимого представления веса N, в самой нижней строке (единственный) ненулевой элемент положительный.

Коэффициенты Клебша — Гордана обладают многочисленными и разнообразными свойствами, отметим те, которые здесь будут использованы [4, § 14]:

$$C^{n[l,m]}_{N[L,M]} = 0, \quad \text{если} \quad l+m \neq n,$$

т. е. матрицы $C^n_{N[L,M]}$ имеют только одну, а именно n-ю, ненулевую поперечную диагональ,

$$\begin{gathered} C^{n[l,m]}_{N[L,M]} = (-1)^{N+L+M} C^{n[m,l]}_{N[M,L]} \iff C^n_{N[L,M]} = (-1)^{N+L+M} \big(C^n_{N[M,L]}\big)^\top, \\ C^{n[l,m]}_{N[L,M]} = (-1)^{N+L+M} C^{-n[-l,-m]}_{N[L,M]} \iff J_L C^n_{N[L,M]} J_M^\top = (-1)^{N+n} C^{-n}_{N[L,M]}, \end{gathered} \tag{18}$$

$$C^{m[l,n]}_{M[L,N]} = (-1)^{L-l} \sqrt{\frac{2M+1}{2N+1}} C^{-n[l,-m]}_{N[L,M]}, \tag{19}$$

$$C^{m[l,n]}_{M[L,N]} = (-1)^{N-n} \sqrt{\frac{2M+1}{2L+1}} C^{-l[-m,n]}_{L[M,N]}. \tag{20}$$

§ 3. Инвариантная матрица

В этом параграфе установим связь матрицы Клебша — Гордана $C^0_{0[N,N]}$ с матрицей J_N, а именно покажем, что

$$C^0_{0[N,N]} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} J_N. \tag{21}$$

Матрица Клебша — Гордана $C^0_{0[N,N]}$ по своему определению инвариантна относительно представления $\mathscr{T}_g$ в пространстве матриц

$$H_N(g) C^0_{0[N,N]} H^\top_N(g) = C^0_{0[N,N]}.$$

Эта инвариантность характеризует ее с точностью до множителя. Матрица J_N тоже инвариантна относительно представления $\mathscr{T}_g$:

$$H_N(g) J_N H^\top_N(g) = J_N. \tag{22}$$

В самом деле, в силу унитарности $H_N(g)$ равенство (22) эквивалентно (11). Значит,

$$C^0_{0[N,N]} = \chi J_N.$$

Множитель χ вычисляется, исходя из условий нормировки (17). Равенство (21) доказано.

Из инвариантности J_N относительно представления $\mathscr{T}_g$ (22) следует, что инфинитезимальные операторы этого представления и их линейные комбинации $\mathscr{F}, \mathscr{F}^-, \mathscr{F}^+$ обращают в нуль J_N, поэтому (см. (14))

$$F_N J_N + J_N F_N = 0, \quad F^+_N J_N + J_N F^-_N = 0, \quad F^-_N J_N + J_N F^+_N = 0. \tag{23}$$

§ 4. Матрицы инфинитезимальных операторов и матрицы Клебша — Гордана

Обозначим через d_N сумму квадратов собственных чисел инфинитезимального оператора F_N:

$$d_N = (-N)^2 + (-N+1)^2 + \dots + (N-1)^2 + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{3}.$$

Заметим, что формула справедлива для N целого и для N полуцелого.

Докажем, что матрицы Клебша — Гордана $C^{-1}_{1[N,N]}$, $C^0_{1[N,N]}$, $C^1_{1[N,N]}$ связаны с матрицами F^+_N, F_N, F^-_N:

$$C^{-1}_{1[N,N]} = \frac{1}{\sqrt{2d_N}} J_N F^+_N, \quad C^0_{1[N,N]} = -\frac{1}{\sqrt{d_N}} J_N F_N, \quad C^1_{1[N,N]} = -\frac{1}{\sqrt{2d_N}} J_N F^-_N. \tag{24}$$

Матрицы Клебша — Гордана $C^{-1}_{1[N,N]}$, $C^0_{1[N,N]}$, $C^1_{1[N,N]}$, стоящие в левой части равенств, образуют канонический базис в пространстве матриц размера $(2N+1)\times(2N+1)$, преобразующихся по представлению веса 1. Поэтому они удовлетворяют соотношениям (16), которые в нашем случае принимают вид

$$C^1_{1[N,N]} \neq 0, \quad F^+_N C^1_{1[N,N]} + C^1_{1[N,N]} F^-_N = 0, \quad F_N C^1_{1[N,N]} + C^1_{1[N,N]} F_N = C^1_{1[N,N]},$$
$$F^-_N C^n_{1[N,N]} + C^n_{1[N,N]} F^+_N = -\sqrt{2} C^{n-1}_{1[N,N]}, \quad n = 1, 0.$$

Нужно показать, что матрицы, стоящие в правой части равенств, тоже удовлетворяют этим равенствам. Для этого требуется лишь использовать (23) и (4). Этим справедливость равенств будет установлена с точностью до одного общего множителя, т. е. доказаны равенства

$$C^{-1}_{1[N,N]} = \frac{\kappa}{\sqrt{2d_N}} J_N F_N^{+}, \quad C^{0}_{1[N,N]} = -\frac{\kappa}{\sqrt{d_N}} J_N F_N, \quad C^{1}_{1[N,N]} = -\frac{\kappa}{\sqrt{2d_N}} J_N F_N^{-}.$$

Используя первое из условий (17) для равенства

$$C^{0}_{1[N,N]} = -\frac{\kappa}{\sqrt{d_N}} J_N F_N,$$

получаем, что $|\kappa| = 1$. Применяя второе из условий (17) для равенства

$$C^{1}_{1[N,N]} = -\frac{\kappa}{\sqrt{2d_N}} J_N F_N^{-},$$

выводим, что $\kappa > 1$, значит, $\kappa = 1$, и равенства (24) доказаны.

§ 5. Представление в пространстве вектор-функций

Пусть L — некоторое целое или полуцелое число, а $U_L(\mathbf{x})$ — вектор-функция размерности $2L+1$, каждая компонента которой является однородным гармоническим полиномом степени M. В пространстве таких вектор-функций определим представление $\mathbb{T}_g$:

$$\mathbb{T}_g U_L(\mathbf{x}) = H_L(g) U_L\big(Q_g^{\top}\mathbf{x}\big).$$

Запишем компоненты вектор-функции $U_L(\mathbf{x})$ как линейные комбинации базисных полиномов $\Pi_M^m(\mathbf{x})$:

$$U_L(\mathbf{x}) = C_{[L,M]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_M^m(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

где $C_{[L,M]}$ — прямоугольная матрица размера $(2L+1)\times(2M+1)$. Имеем

$$\mathbb{T}_g U_L(\mathbf{x}) = H_L(g) U_L\big(Q_g^{\top}\mathbf{x}\big) = H_L(g) C_{[L,M]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_M^m\big(Q_g^{\top}\mathbf{x}\big) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Используя (8), получаем

$$\mathbb{T}_g U_L(\mathbf{x}) = H_L(g) C_{[L,M]} H_M^{\top}(g) \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_M^m(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Видим, что представление $\mathbb{T}_g$ вектор-функций сводится к представлению $\mathscr{T}_g$ матриц. Поэтому вектор-функции

$$C^{n}_{N[L,M]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_M^m(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = Y_{M[L,N]}^{[\bullet,\,n]}(\mathbf{x}), \quad n = -N, \dots, N,$$

преобразуются по неприводимому представлению веса N и составляют канонический базис.

Составим матрицу $Y_{M[L,N]}(\mathbf{x})$ из этих базисных столбцов:

$$Y_{M[L,N]}^{[\cdot\,,\,n]}(\mathbf{x}) = C_{N[L,M]}^{n} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_M^m(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad n = -N, \dots, N.$$

Получим удобную формулу для матрицы $Y_{M[L,N]}(\mathbf{x})$. Используя (19), имеем

$$Y_{M[L,N]}^{[l,n]}(\mathbf{x}) = \sum_m C_{N[L,M]}^{n[l,m]} \Pi_M^m(\mathbf{x}) = (-1)^{L-l} \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}} \sum_m C_{M[L,N]}^{-m[l,-n]} \Pi_M^m(\mathbf{x}).$$

Применяя теперь (18), получаем

$$Y_{M[L,N]}^{[l,n]}(\mathbf{x}) = (-1)^{L-l}(-1)^{N+L+M} \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}} \sum_m \Pi_M^m(\mathbf{x}) C_{M[L,N]}^{m[-l,n]}$$

и окончательно

$$Y_{M[L,N]}(\mathbf{x}) = (-1)^{N+L+M} \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}} J_L \sum_m \Pi_M^m(\mathbf{x}) C_{M[L,N]}^{m}.$$

Инфинитезимальные операторы представления $\mathbb{T}_g$ имеют вид

$$\mathbb{F}_L = F_L + I_L \mathbf{F}, \quad \mathbb{F}_L^- = F_L^- + I_L \mathbf{F}^-, \quad \mathbb{F}_L^+ = F_L^+ + I_L \mathbf{F}^+.$$

§ 6. Дифференцирование гармонических полиномов и матрицы Клебша — Гордана

Докажем следующие формулы дифференцирования гармонических полиномов:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2}}(i\partial_y - \partial_x) J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{N(2N+1)(2N+3)}{3}} C_{1[N,N-1]}^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N-1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
\partial_z J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{N(2N+1)(2N+3)}{3}} C_{1[N,N-1]}^{0} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N-1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(i\partial_y + \partial_x) J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{N(2N+1)(2N+3)}{3}} C_{1[N,N-1]}^{1} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N-1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Обозначим вектор-функции, стоящие в левой части равенств (25), через

$$\begin{gathered}
U_N^{-1}(\mathbf{x}) = J_N \frac{i\partial_y - \partial_x}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad U_N^0(\mathbf{x}) = J_N \partial_z \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
U_N^1(\mathbf{x}) = J_N \frac{i\partial_y + \partial_x}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{26}$$

Вектор-функции, стоящие в правой части равенств (25), образуют канонический базис неприводимого представления веса 1. Соотношения (2) в нашем случае принимают вид

$$\begin{gathered} U_N^1(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \mathbb{F}_N^+ U_N^1(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbb{F}_N U_N^1(\mathbf{x}) = U_N^1(\mathbf{x}), \\ \mathbb{F}_N^- U_N^n(\mathbf{x}) = -\sqrt{2} U_N^{n-1}(\mathbf{x}), \quad n = 1, 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Используя (4), (9) и (23), проверяем выполнение этих соотношений. Так как соотношения (27) определяют канонический базис однозначно с точностью до одного общего множителя, доказано, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(i\partial_y - \partial_x) J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \varrho C^{-1}_{1[N,N-1]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N-1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\partial_z J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \varrho C^{0}_{1[N,N-1]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N-1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(i\partial_y + \partial_x) J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \varrho C^{1}_{1[N,N-1]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N-1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Переходим к вычислению множителя ϱ. Выпишем в первом векторном равенстве первую компоненту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(i\partial_y - \partial_x)\Pi_N^N(\mathbf{x}) = \varrho C^{-1[-N,N-1]}_{1[N,N-1]} \Pi_{N-1}^{N-1}(\mathbf{x}).$$

Используя (7), получаем

$$\frac{\nu_N}{\sqrt{2}}(i\partial_y - \partial_x)(iy + x)^N = \varrho C^{-1[-N,N-1]}_{1[N,N-1]} \nu_{N-1}(iy + x)^{N-1}(\mathbf{x}).$$

Так как

$$(i\partial_y - \partial_x)(iy + x)^N = -2N(iy + x)^{N-1}(\mathbf{x}),$$

имеем

$$\varrho = -\frac{\sqrt{2}N}{C^{-1[-N,N-1]}_{1[N,N-1]}} \cdot \frac{\nu_N}{\nu_{N-1}}.$$

Из (7) следует, что

$$\frac{\nu_N}{\nu_{N-1}} = \sqrt{\frac{2N+3}{2N}}.$$

Для вычисления коэффициента Клебша — Гордана $C^{-1[-N,N-1]}_{1[N,N-1]}$, воспользовавшись (20), получим

$$C^{-1[-N,N-1]}_{1[N,N-1]} = \sqrt{\frac{3}{2N+1}} C^{N[1,N-1]}_{N[1,N-1]}.$$

Коэффициент Клебша — Гордана $C^{N[1,N-1]}_{N[1,N-1]}$ расположен в правом нижнем углу матрицы Клебша — Гордана $C^N_{N[1,N-1]}$, и это единственный ненулевой элемент этой матрицы, а значит, в силу (17) $C^{N[1,N-1]}_{N[1,N-1]} = 1$. Окончательно для множителя ϱ получаем

$$\varrho = -\sqrt{\frac{N(2N+1)(2N+3)}{3}}.$$

Равенства (25) доказаны.

§ 7. Умножение гармонических полиномов на независимую переменную и матрицы Клебша — Гордана

Докажем, что

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(iy - x) - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1}(i\partial_y - \partial_x)\right] J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} \\
= \sqrt{\frac{(N+1)(2N+3)}{3(2N+5)}} C^{-1}_{1[N,N+1]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N+1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
\left[z - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1}\partial_z\right] J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{(N+1)(2N+3)}{3(2N+5)}} C^{0}_{1[N,N+1]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N+1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(iy + x) - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1}(i\partial_y + \partial_x)\right] J_N \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} \\
= \sqrt{\frac{(N+1)(2N+3)}{3(2N+5)}} C^{1}_{1[N,N+1]} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_{N+1}^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{28}$$

где $|\mathbf{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Важно отметить, что каждая компонента вектор-функции, стоящей в левой части (28), является гармоническим полиномом. Это вытекает из тождества Максвела [4, § 2]. Введем обозначения вектор-функций, аналогичные (26):

$$\begin{gathered}
V_N^{-1}(\mathbf{x}) = J_N \frac{iy - x}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad V_N^{0}(\mathbf{x}) = J_N z \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
V_N^{1}(\mathbf{x}) = J_N \frac{iy + x}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Pi_N^n(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{29}$$

В этих обозначениях вектор-функции, стоящие в левой части (28), равны

$$V_N^{-1}(\mathbf{x}) - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1} U_N^{-1}(\mathbf{x}),\ V_N^{0}(\mathbf{x}) - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1} U_N^{0}(\mathbf{x}),\ V_N^{1}(\mathbf{x}) - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1} U_N^{1}(\mathbf{x}). \tag{30}$$

Нужно установить, что вектор-функции (30) составляют канонический базис неприводимого представления веса 1. Для этого достаточно проверить, что они удовлетворяют соотношениям (27). В § 6 соотношения (27) были установлены для вектор-функций (26), а значит, они верны и для вектор-функций

$$|\mathbf{x}|^2 U_N^{-1}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}|^2 U_N^{0}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}|^2 U_N^{1}(\mathbf{x}).$$

Поэтому осталось обосновать выполнение соотношений (27) для вектор-функций (29). Это делается с использованием (4), (10) и (23). После этого можно считать доказанными равенства (28) с точностью до множителя κ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(iy-x)-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1}(i\partial_y-\partial_x)\right]J_N\begin{bmatrix}\vdots\\ \Pi_N^n(\mathbf{x})\\ \vdots\end{bmatrix}=\kappa C_{1[N,N+1]}^{-1}\begin{bmatrix}\vdots\\ \Pi_{N+1}^n(\mathbf{x})\\ \vdots\end{bmatrix},$$

$$\left[z-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1}\partial_z\right]J_N\begin{bmatrix}\vdots\\ \Pi_N^n(\mathbf{x})\\ \vdots\end{bmatrix}=\kappa C_{1[N,N+1]}^{0}\begin{bmatrix}\vdots\\ \Pi_{N+1}^n(\mathbf{x})\\ \vdots\end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(iy+x)-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2N+1}(i\partial_y+\partial_x)\right]J_N\begin{bmatrix}\vdots\\ \Pi_N^n(\mathbf{x})\\ \vdots\end{bmatrix}=\kappa C_{1[N,N+1]}^{1}\begin{bmatrix}\vdots\\ \Pi_{N+1}^n(\mathbf{x})\\ \vdots\end{bmatrix}.$$

Переходим к вычислению множителя κ. Выпишем в первом векторном равенстве последнюю компоненту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(iy-x)\Pi_N^{-N}(\mathbf{x})=\kappa C_{1[N,N+1]}^{-1[N,-N-1]}\Pi_{N+1}^{-N-1}(\mathbf{x}).$$

Используя (7), получаем

$$\frac{\nu_N}{\sqrt{2}}(iy-x)(iy-x)^N=\kappa C_{1[N,N+1]}^{-1[N,-N-1]}\nu_{N+1}(iy-x)^{N+1}(\mathbf{x}),$$

отсюда

$$\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}C_{1[N,N+1]}^{-1[N,-N-1]}}\frac{\nu_N}{\nu_{N+1}}.$$

Из (7) следует, что

$$\frac{\nu_N}{\nu_{N+1}}=\sqrt{\frac{2(N+1)}{2N+5}}.$$

Для вычисления коэффициента Клебша — Гордана $C_{1[N,N+1]}^{-1[N,-N-1]}$, воспользовавшись (19), получим

$$C_{1[N,N+1]}^{-1[N,-N-1]}=\sqrt{\frac{3}{2N+3}}C_{N+1[N,1]}^{N+1[N,1]}.$$

Коэффициент Клебша — Гордана $C_{N+1[N,1]}^{N+1[N,1]}$ расположен в правом нижнем углу матрицы Клебша — Гордана $C_{N+1[N,1]}^{N+1}$, и это единственный ненулевой элемент этой матрицы, а значит, в силу (17) $C_{N+1[N,1]}^{N+1[N,1]}=1$. Окончательно для множителя κ получаем

$$\kappa=\sqrt{\frac{(N+1)(2N+3)}{3(2N+5)}}.$$

Равенства (28) доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.

2. *Смородинский Я. А., Шелепин Л. А.* Коэффициенты Клебша — Гордана с разных сторон // Успехи физ. наук. 1972. Т. 106, № 1. С. 3–45.

3. *Шелепин Л. А.* Исчисление коэффициентов Клебша — Гордана и его физические приложения // Тр. ФИАН. 1973. Т. 70. С. 3–119.

4. *Годунов С. К., Михайлова Т. Ю.* Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Науч. книга, 1998.

5. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Усложненные структуры галилеево-инвариантных законов сохранения // Прикл. математика и теор. физика. 2002. Т. 43, № 2. С. 3–21.

6. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Коэффициенты Клебша — Гордана при различных выборах базисов унитарных и ортогональных представлений групп SU(2), SO(3) // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 540–557.

7. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.

8. Михайлова Т. Ю. Четыре лекции по теории представлений группы вращений. Новосибирск: НГУ, 2010.

Статья поступила 2 августа 2017 г.

Гордиенко Валерий Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
gordienk@math.nsc.ru