Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 510.6

СЛОИ И УРОВНИ РАСШИРЕНИЙ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Аннотация. Рассматриваются две классификации расширений минимальной логики J Йохансона. Логики, а вслед за ними и исчисления разбиваются на уровни и на слои с номерами от 0 до ω. Доказано, что первая классификация сильно разрешима над J, т. е. по любому конечному списку Rul схем аксиом и правил вывода можно эффективно вычислить номер уровня исчисления $(J + Rul)$. Доказана сильная разрешимость каждого слоя с конечным номером: для каждого n и произвольного конечного Rul можно эффективно проверить, принадлежит ли исчисление $(J + Rul)$ n-му слою.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.613

Ключевые слова: минимальная логика, шкала Крипке, разрешимость, слои, уровни, узнаваемая логика.

Введение

Статья посвящена исследованию расширений минимальной логики J Йохансона [1]. В [2] мы ввели классификацию расширений минимальной логики, продолжающую широко известную классификацию суперинтуиционистских логик, предложенную Хосои [3].

В [2] доказано, что номер слоя любой конечно аксиоматизируемой логики над J эффективно вычислим. Однако слои над J имеют существенно более сложную структуру, чем слои Хосои, где каждый слой содержит наименьшую и наибольшую логики. Доказано, что бесконечный слой имеет две максимальные логики, а именно линейные логики LC и NC. Поэтому сравнительно несложно отличить бесконечнослойные логики от конечнослойных. Сложнее обстоит дело с определением номеров конечных слоев, и в [2] была доказана возможность вычисления номера слоя логики по ее аксиомам, алгоритм представлен в [4]. Кроме того, слои разрешимы, а их минимальные и максимальные логики узнаваемы над J.

В данной статье рассмотрим проблему сильной разрешимости классификации над логикой J. В [5] была доказана сильная разрешимость классификации Хосои над интуиционистской логикой. Это означает, что существует алгоритм для вычисления номера слоя суперинтуиционистской логики, заданной исчислением $(Int + Rul)$, по любому конечному списку Rul дополнительных схем аксиом и правил вывода. Подобная проблема над минимальной логикой представляется существенно более сложной.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–6848.2016.1).

В этой статье докажем, что каждый слой с конечным номером сильно разрешим над J. Это означает, что для любого такого слоя существует алгоритм, который для любого конечного списка Rul проверяет принадлежность исчисления $J + Rul$ выбранному слою.

Также мы рассмотрим другую классификацию J-логик, продолжающую классификацию Хосои. Семейство J-логик разбивается на уровни с номерами от 0 до ω. Подобно слоям Хосои каждый уровень представляет собой интервал, причем минимальная логика любого интервала узнаваема, а максимальная логика сильно узнаваема над J. Покажем, что по любому исчислению $(J + Rul)$ можно эффективно вычислить номер уровня, а сами уровни сильно разрешимы над J.

Для доказательств используется полнота исчислений относительно алгебраической семантики. Вводится понятие тонкой алгебры и доказывается, что номер слоя исчисления определяется тонкими алгебрами. Доказано, что любая конечно порожденная тонкая алгебра конечного уровня конечна. Это позволяет свести исследование слоев к исследованию подходящих классов шкал.

Основные определения и известные факты приведены в разд. 1, 2. Основные сведения об алгебраической семантике и ее связи с реляционной семантикой даны в разд. 3, 4. Алгебраическая интерпретация слоев и уровней представлена в разд. 5. Тонкие алгебры и их свойства исследуются в разд. 6.

В разд. 7 установлена сильная разрешимость классификации посредством уровней. Более точно, доказано, что номер уровня любого исчисления вычислим, а сами уровни сильно разрешимы над J. Кроме того, наименьшие логики всех уровней узнаваемы и сильно различимы над J, а наибольшие — сильно узнаваемы над J.

В разд. 8 доказано, что каждый слой с конечным номером сильно разрешим, а наименьшие логики конечных слоев сильно различимы над J. Кроме того, проблема сильной разрешимости бесконечного слоя сводится к исследованию классов конечных шкал.

1. Предварительные сведения

Обозначаем через J минимальное исчисление. Язык исчисления содержит пропозициональные связки $\&, \vee, \to$ и пропозициональную константу $\bot$; используем следующие сокращения:

$$\top = \bot \to \bot, \quad \neg A = (A \to \bot), \quad (A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A).$$

Исчисление J задается теми же схемами аксиом, что и интуиционистское позитивное исчисление, и правилом modus ponens: $A, A \to B/B$.

Для любого исчисления L_0 и множества Ax схем аксиом обозначаем через $L_0 + Ax$ исчисление, полученное из L_0 добавлением Ax в качестве новых схем аксиом; такое исчисление называем *аксиоматическим расширением* L_0. Если Rul — некоторое множество схем аксиом и правил вывода, то обозначаем через $L_0 + Rul$ исчисление, полученное из L_0 добавлением схем аксиом и правил из Rul. При этом предполагается, что все правила вывода инвариантны относительно подстановки, так что множество теорем исчисления замкнуто относительно подстановки. Обозначаем

$$Int = J + (\bot \to A), \quad Neg = J + \bot, \quad For = J + A,$$

$$Gl = J + (A \vee \neg A), \quad Cl = Int + Gl,$$

$$LC = Int + ((A \to B) \vee (B \to A)), \quad NC = Neg + ((A \to B) \vee (B \to A)).$$

Для указанных исчислений обозначаем через J, Int, Neg, For, Gl, Cl, LC, NC множество теорем, т. е. доказуемых формул соответствующего исчисления.

Множество $T(L)$ теорем исчисления L является J-логикой. Множество формул называется J-*логикой*, если оно содержит J и замкнуто относительно правила modus ponens и подстановки. Множество теорем исчисления L часто обозначаем через L. Для данной логики L часто пишем $\mathrm{L} \vdash A$ вместо $A \in \mathrm{L}$.

Логика называется *нетривиальной*, если не совпадает с For, *суперинтуиционистской*, если содержит Int, и *негативной*, если содержит Neg.

Для исчислений L_1, L_2 пишем $L_1 \leq L_2$, если все формулы, доказуемые в L_1, доказуемы в L_2. Исчисления L_1, L_2 называем *эквивалентными* и пишем $L_1 \equiv L_2$, если $L_1 \leq L_2$ и $L_2 \leq L_1$. Используем аналогичные обозначения и в случаях, когда L_1 или L_2 является логикой. Например, если L_1 — исчисление, а L_2 — логика, то запись $L_1 \leq L_2$ означает, что множество теорем исчисления L_1 содержится в L_2.

Конечно аксиоматизируемая J-логика L называется *узнаваемой над* J [6], если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом устанавливает, верно ли соотношение $T(J + Ax) \equiv \mathrm{L}$. Конечно аксиоматизируемая J-логика L называется *сильно узнаваемой над* J [7], если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода проверяет, верно ли $T(J + Rul) \equiv \mathrm{L}$.

Например, логики Neg, For, Gl, Cl, LC, NC сильно узнаваемы над J [7], а логика Int узнаваема [6].

Будем говорить, что формула A *сильно различима* (или *сильно разрешима*) *над* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода устанавливает, является ли A теоремой исчисления $L_0 + Rul$. Формулу A называем *различимой* (или *разрешимой*) *над* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом проверяет выводимость A в $L_0 + Ax$.

Очевидно, сильная различимость формулы A над J равносильна разрешимости проблемы включения $J + Rul \geq J + A$. Ясно, что любая конъюнкция сильно различимых формул сильно различима. Также заметим, что для любых формул A и B, если $L_0 + A \equiv L_0 + B$ и формула A сильно различима над L_0, то B также сильно различима над L_0.

Логику будем называть *различимой* (*сильно различимой*) *над* L_0, если она аксиоматизируема над L_0 с помощью конечного множества различимых (соответственно сильно различимых) аксиом.

Узнаваемость логики равносильна ее одновременной различимости и разрешимости [6]. Из сильной различимости не следует сильная узнаваемость [7]. Неизвестно, верна ли обратная импликация.

Известно, что логики Neg, For, Gl, Cl, LC, NC сильно различимы над J [7], а логика Int различима [6].

Семейство J-логик S называется *разрешимым* (*сильно разрешимым*), если существует алгоритм, который для любого исчисления $\mathrm{J} + Ax$ (соответственно $J + Rul$) проверяет, входит ли его логика в множество S.

Ясно, что J-логика различима или сильно различима над J, если и только если семейство ее расширений разрешимо (соответственно сильно разрешимо) над J.

2. Слои и уровни

Разбиение J-логик на слои введено в [2]. Пусть

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n).$$

Будем говорить, что L есть *логика* $(n+1)$*-го слоя*, $n \geq 0$, если $L \vdash \pi_{n+1}$ и $L \nvdash \pi_n$; For — это единственная логика нулевого слоя. L — логика *конечного слоя*, если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного слоя* в противном случае.

Множество логик n-го слоя обозначаем через Π_n, $0 \leq n \leq \omega$.

Очевидно, что $\mathrm{J} \vdash \pi_n \to \pi_{n+1}$. Напротив, формула π_n невыводима в $\mathrm{J}\pi_{n+1} = (\mathrm{J} + \pi_{n+1})$. Поэтому все слои непусты и попарно не пересекаются.

Ясно, что $\mathrm{J}\pi_n = (\mathrm{J} + \pi_n)$ — наименьшая логика n-го слоя, J — наименьшая логика бесконечного слоя.

Определим еще одно разбиение семейства J-логик. Пусть

$$\lambda_0 = \bot, \quad \lambda_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \lambda_n).$$

Будем говорить, что L есть логика *нулевого уровня*, если $L \vdash \lambda_0$; L есть логика $(n+1)$*-го уровня*, $n \geq 0$, если $L \vdash \lambda_{n+1}$ и $L \nvdash \lambda_n$. L — логика *конечного уровня*, если $L \vdash \lambda_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного уровня* в противном случае.

Множество логик n-го уровня обозначаем через Λ_n, $0 \leq n \leq \omega$.

Будем говорить, что исчисление *принадлежит n-му слою* или *уровню*, если его логика принадлежит этому слою (соответственно уровню).

На множестве суперинтуиционистских логик слои и уровни не различаются, так как $Int + \pi_n \equiv Int + \lambda_n$. Определение слоев над Int было введено Хосои [3].

В [5] доказана сильная разрешимость классификации Хосои над интуиционистской логикой. Это означает, что существует алгоритм для вычисления номера слоя суперинтуиционистской логики, заданной исчислением $(Int{+}Rul)$, по любому конечному списку *Rul* дополнительных схем аксиом и правил вывода. Кроме того, наименьшие и наибольшие логики слоев над Int сильно узнаваемы над Int.

Отметим известные соотношения: $\mathrm{J} \vdash \pi_n \to \pi_{n+1}$, $\mathrm{J} \vdash \lambda_n \to \lambda_{n+1}$, $(\mathrm{J} + \pi_n) \vdash \lambda_n$, $(\mathrm{J} + \pi_{n+1}) \nvdash \pi_n$, $(\mathrm{J} + \lambda_{n+1}) \nvdash \lambda_n$.

Все слои и уровни непусты. Для каждого натурального n логика $\mathrm{J}\pi_n = \mathrm{J} + \pi_n$ является наименьшей логикой слоя Π_n, а логика $\mathrm{J}\lambda_n = \mathrm{J} + \lambda_n$ — наименьшей логикой уровня Λ_n. Логика J наименьшая в Π_ω и в Λ_ω. Очевидно, $\Pi_n \subseteq \bigcup\limits_{m \leq n} \Lambda_m$ для любого натурального n; $\Lambda_\omega \subseteq \Pi_\omega$.

Используя результаты из [7], покажем, что по любому конечному списку *Rul* схем аксиом и правил вывода можно эффективно вычислить номер уровня исчисления $J + Rul$. Таким образом, эта классификация сильно разрешима. Кроме того, каждый уровень содержит наибольшую логику. При этом наибольшие логики всех уровней сильно узнаваемы, а наименьшие узнаваемы и сильно различимы над J.

В [2] доказана разрешимость классификации с помощью слоев: номер слоя эффективно вычислим для любого аксиоматического расширения логики J. Алгоритм вычисления, основанный на реляционной семантике, описан в [4]. Кроме того, в [2] установлено, что каждый слой имеет конечное число максимальных логик, причем наименьшие и максимальные логики всех слоев узнаваемы над J.

Далее покажем, что каждый слой Π_n с конечным индексом n сильно разрешим над J. Также установим, что наименьшие логики всех слоев сильно различимы над J.

3. Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика минимальной логики строится с помощью алгебр Йохансона, т. е. J-алгебр [8, 9]. Алгебру $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$ называем J-*алгеброй*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$\langle A; \&, \vee, \to, \top \rangle$ — импликативная решетка, т. е. решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \leq x \to y \iff z\&x \leq y$,

$\bot$ — произвольный элемент в A.

J-алгебра называется *гейтинговой*, или *псевдобулевой алгеброй*, если $\bot$ — наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A.

Если A — формула, $\mathbf{A}$ — J-алгебра, то говорят, что в $\mathbf{A}$ *общезначима формула* A, и пишут $\mathbf{A} \models A$, если тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$.

Хорошо известно (см., например, [9]), что семейство J-алгебр образует многообразие и существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику J, и многообразиями J-алгебр. Для любой J-логики L класс $V(\mathrm{L}) = \{\mathbf{A} \mid (\forall A \in \mathrm{L})(\mathbf{A} \models A)\}$ является многообразием.

С каждым правилом вывода $A_1, \ldots, A_k/B$ можно связать квазитождество

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n((A_1 = \top \wedge \cdots \wedge A_k = \top) \Rightarrow B = \top),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — все переменные правила $A_1, \ldots, A_k/B$.

Будем говорить, что правило *верно* (или *общезначимо*) в J-алгебре $\mathbf{A}$, если связанное с ним квазитождество выполняется в $\mathbf{A}$, и *опровержимо* в противном случае. Множество *Rul общезначимо* (пишем $\mathbf{A} \models Rul$), если все правила и аксиомы из Rul общезначимы.

Напомним, что Rul может содержать не только правила, но и схемы аксиом, которые отождествляем с правилами, имеющими $\top$ в качестве посылки. Очевидно, что формула A общезначима в $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда правило $\top/A$ общезначимо в $\mathbf{A}$.

Для данного исчисления $L = J + Rul$ обозначим через $Q(L)$ семейство всех J-алгебр, в которых верны все аксиомы и правила из Rul.

Может случиться, что исчисления L_1 и L_2 эквивалентны, но $Q(L_1) \neq Q(L_2)$.

Следующая теорема о полноте обобщает известную теорему, доказанную для суперинтуиционистских исчислений с использованием алгебры Линденбаума — Тарского [10].

Теорема 3.1 [7]. *Пусть $L = J + Rul$ и A — произвольная формула. Тогда A является теоремой L тогда и только тогда, когда A общезначима во всех* J-*алгебрах из* $Q(L)$.

Отсюда сразу вытекает

Теорема 3.2 [7]. *Формула A является теоремой исчисления $(J + Rul)$ тогда и только тогда, когда Rul опровержимо в каждой* J-*алгебре, опровергающей A.*

4. Теоремы представления

В [11] доказана теорема о полноте логики J и некоторых ее расширений относительно семантики типа Крипке. Мы используем модифицированную семантику из [12].

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию

$$x \in X, \quad x \leq y \Rightarrow y \in X.$$

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W — непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞, Q — конус множества W, содержащий ∞.

Шкалу $(W_1, \leq_1, Q_1)$ будем называть *конусом шкалы* $(W, \leq, Q)$, если W_1 — конус множества W, $\leq_1 = \leq \cap W_1^2$ и $Q_1 = Q \cap W_1$.

Моделью называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ — шкала, $\models$ — отношение между элементами множества W и формулами, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $x \models p$, $x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p;

(2) $\infty \models p$ для любой переменной p;

(3) $x \models \bot \iff x \in Q$;

(4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;

(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;

(6) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Лемма 4.1. *Для любой модели M верно:*

(1) $\infty \models A$ для любой формулы A;

(2) $x \models A$, $x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы A.

Доказательство проводится индукцией по длине формулы.

Формула A называется *истинной*, или *общезначимой, в модели* M, если $x \models A$ для любого $x \in M$. В этом случае пишем $M \models A$.

Говорят, что формула A *общезначима в шкале* $\mathbf{W}$ (и пишут $\mathbf{W} \models A$), если $M \models A$ для любой модели M, основанной на $\mathbf{W}$. Шкала $\mathbf{W}$ *удовлетворяет логике* L, если $\mathbf{W} \models L$ (т. е. $\mathbf{W} \models A$ для всех $A \in L$).

Для данной шкалы $\mathbf{W}$ обозначим через $W^{\#}$ множество непустых конусов с операциями

$$X \to Y = \{x \mid (\forall y \geq x)(y \in X \Rightarrow y \in Y)\},$$

$$X \& Y = X \cap Y, \quad X \vee Y = X \cup Y, \quad \bot = Q.$$

Тогда $W^{\#}$ является J-алгеброй. Легко видеть, что общезначимость формулы в шкале $\mathbf{W}$ равносильна ее общезначимости в алгебре $W^{\#}$.

Пусть $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$ — J-алгебра. Множество $\nabla \subseteq A$ называется *фильтром* на $\mathbf{A}$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

a) $\top \in \nabla$;

b) $x, y \in \nabla \Rightarrow (x \& y) \in \nabla$;

c) $x \in \nabla$, $x \leq y \Rightarrow y \in \nabla$.

Фильтр, удовлетворяющий условию

d) $(x \vee y) \in \nabla \Rightarrow x \in \nabla$ или $y \in \nabla$,

называется *простым*.

Для J-алгебры $\mathbf{A}$ обозначим через $W(\mathbf{A})$ множество простых фильтров, упорядоченное включением, через ∞ — множество всех элементов, $Q(\mathbf{A}) = \{\nabla \in W(\mathbf{A}) \mid \bot \in \nabla\}$. Имеет место теорема представления J-алгебр, которая сразу следует из теоремы Стоуна о представлении импликативных решеток [13].

Теорема 4.2. *Для любой* J*-алгебры* $\mathbf{A}$ *отображение* $\varphi(x) = \{\nabla \in W(\mathbf{A}) \mid x \in \nabla\}$ *есть изоморфное вложение* $\mathbf{A}$ *в* $(W(\mathbf{A}))^{\#}$. *Если* $\mathbf{A}$ *конечна, то* φ *есть изоморфизм между* $\mathbf{A}$ *и* $(W(\mathbf{A}))^{\#}$.

Будем говорить, что правило *верно*, или *общезначимо*, в шкале $\mathbf{W}$, если оно верно в алгебре $\mathbf{W}^{\#}$. Для любого множества Rul аксиом и правил вывода будем говорить, что $\mathbf{W}$ *удовлетворяет* Rul, и писать $\mathbf{W} \models Rul$, если все аксиомы и правила из Rul общезначимы в $\mathbf{W}$.

5. Высота и уровень

Высотой $h(\mathbf{W})$ шкалы $\mathbf{W}$ называем супремум длин конечных цепей в множестве $W - \{\infty\}$. Для данной J-алгебры $\mathbf{A}$ положим $h(\mathbf{A}) = h(W(\mathbf{A}))$.

Предложение 5.1 [2]. *Для любой* J*-алгебры* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \models \pi_n \iff h(\mathbf{A}) \leq n.$$

Таким образом, для любого натурального числа n логика n-го слоя характеризуется алгебрами высоты не более n.

Логика L называется *табличной*, если многообразие $V(L)$ порождается конечной алгеброй, и *локально табличной*, если $V(L)$ локально конечно, т. е. все конечно порожденные алгебры в многообразии $V(L)$ конечны.

Важную роль играет

Теорема 5.2 [2]. *Все* J*-логики конечных слоев локально табличны.*

Из теоремы о представлении и теоремы 5.2 сразу вытекает

Следствие 5.3. *Все логики конечных слоев полны относительно подходящих классов конечных шкал.*

Предложение 5.4 [2]. *Для любого натурального* n *число максимальных логик* n*-го слоя конечно и все они табличны.*

В [14] каждой J-алгебре ставятся в соответствие два ее интервала:

$$\mathbf{A}^l = \{x \in \mathbf{A} \mid x \leq \bot\}, \quad \mathbf{A}^u = \{x \in \mathbf{A} \mid x \geq \bot\}.$$

Тогда $\mathbf{A}^u$ является гейтинговой алгеброй, а $\mathbf{A}^l$ — негативной алгеброй, где $x \to_{\mathbf{A}^l} y = (x \to_{\mathbf{A}} y) \& \bot$ для $x, y \in \mathbf{A}^l$.

Лемма 5.5 [14]. 1. *Алгебра* $\mathbf{A}^l$ *является гомоморфным образом алгебры* $\mathbf{A}$ *относительно гомоморфизма* $g(x) = x \& \bot$.

2. $\mathbf{A}^u$ — *подалгебра алгебры* $\mathbf{A}$.

Для $n \geq 0$ обозначим через L_{n+1} линейно упорядоченную гейтингову алгебру с $n+1$ элементами, а через L^-_{n+1} — линейно упорядоченную негативную алгебру с $n+1$ элементами. Очевидно, что $h(L_{n+1}) = h(L^-_{n+1}) = n$.

Лемма 5.6 [2]. 1. *Для любой* J*-алгебры* $\mathbf{A}$

$$\max(h(\mathbf{A}^l), h(\mathbf{A}^u)) \leq h(\mathbf{A}) \leq h(\mathbf{A}^l) + h(\mathbf{A}^u).$$

2. *Любая гейтингова алгебра высоты* $\geq n+1$ *содержит подалгебру, изоморфную* L_{n+2}, *а любая негативная алгебра высоты* $\geq n+1$ *содержит подалгебру, изоморфную* L^-_{n+2}.

Соотношения между высотой и уровнем представлены в следующих утверждениях.

Лемма 5.7. *Для любой* J*-алгебры* $\mathbf{A}$ *и любого* n
(1) $\mathbf{A} \not\models \lambda_n$, *если и только если* L_{n+2} *вложима в* $\mathbf{A}$;
(2) $\mathbf{A} \models \lambda_n \iff \mathbf{A}^u \models \lambda_n \iff h(\mathbf{A}^u) \leq n$;
(3) $L_m \models \lambda_n \iff m \leq n+1$.

Доказательство. (1) Доказано в [7].

(2) Так как $\mathbf{A}^u$ является подалгеброй $\mathbf{A}$, из $\mathbf{A} \models \lambda_n$ следует $\mathbf{A}^u \models \lambda_n$.

Далее, если $h(\mathbf{A}^u) > n$, то по предложению 5.6(2) алгебра L_{n+2} вложима в $\mathbf{A}^u$. Тогда $\mathbf{A}^u \not\models \lambda_n$ по (1). Таким образом, из $\mathbf{A}^u \models \lambda_n$ вытекает $h(\mathbf{A}^u) \leq n$.

Наконец, пусть $\mathbf{A} \not\models \lambda_n$. По (1) L_{n+2} вложима в $\mathbf{A}$, поэтому $h(\mathbf{A}) \geq h(L_{n+2}) = n+1$. Итак, из $h(\mathbf{A}^u) \leq n$ получаем $\mathbf{A} \models \lambda_n$.

(3) Следует из (1). □

Алгебру $\mathbf{A}$ назовем *алгеброй конечного уровня*, если $\mathbf{A} \models \lambda_n$ для некоторого n. Из леммы 5.7 сразу вытекает

Лемма 5.8. *Алгебра* $\mathbf{A}$ *имеет конечный уровень тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}^u$ *имеет конечную высоту.*

Отметим, что из предложения 5.1 и леммы 5.7 также следует, что J-логика L принадлежит n-му уровню тогда и только тогда, когда ее интуиционистский напарник $L_{int} = L + (\bot \to p)$ принадлежит n-му слою.

6. Тонкие алгебры

Алгебру $\mathbf{A}$ называем *тонкой*, если $\mathbf{A}^l$ линейно упорядочена.

Нетрудно проверить, что справедлива

Лемма 6.1. *Любая тонкая* J*-алгебра удовлетворяет для всех* x, y *условиям*

$$\bot \leq (x \to y) \vee (y \to x), \quad \bot \to x \vee y = (\bot \to x) \vee (\bot \to y).$$

Предложение 6.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ — J*-алгебра высоты больше, чем* n, *где* $0 < n < \omega$. *Тогда она содержит тонкую подалгебру* $\mathbf{B}$ *высоты больше, чем* n, *где* $\mathbf{B}^l$ *конечна и содержит не более* $n+2$ *элементов.*

Доказательство. По предложению 5.1 имеем $\mathbf{A} \not\models \pi_n$, т. е. $v(\pi_n) < \top$ для некоторого означивании $v(p_i) = a_i$, $0 \leq i \leq n$, в $\mathbf{A}$. Положим $b_0 = a_0$, $b_{i+1} = a_{i+1} \vee (a_{i+1} \to b_i)$. Тогда $b_0 < \dots < b_n < \top$, $b_i \to b_j = \top$ при $i \leq j$, $b_i \to b_j = b_j$ при $i > j$.

Пусть $\mathbf{B}$ — подалгебра алгебры $\mathbf{A}$, порожденная множеством $C = \{b_0, \dots, b_n\}$. Тогда по предложению 5.1 $h(\mathbf{B}) > n$, так как π_n опровержима в $\mathbf{B}$ при означивании $v_1(p_i) = b_i$.

Рассмотрим множество $X = \{x \& \bot \mid x \in C \cup \{\top\}\}$. Покажем, что множество элементов алгебры $\mathbf{B}^l$ совпадает с X. Ясно, что все элементы из X входят в $\mathbf{B}^l$. Докажем обратное включение.

По лемме 5.5 $g(x) = x \& \bot$ является гомоморфизмом алгебры $\mathbf{B}$ на $\mathbf{B}^l$. Поэтому $\mathbf{B}^l$ порождается множеством $g(C) \subseteq X$. Также $\bot = g(\top) \in X$. Так как множество $C_1 = C \cup \{\top\}$ замкнуто относительно операций $\&, \vee, \to$, получаем, что множество $X = g(C_1)$ образует подалгебру алгебры $\mathbf{A}^l$. Поскольку X содержит все порождающие алгебры $\mathbf{B}^l$, имеем $\mathbf{B}^l \subseteq X$.

Итак, $\mathbf{B}^l$ совпадает с X. Множество $X = g(C_1)$ линейно упорядочено, так как C_1 линейно упорядочено. Ясно, что X содержит не более, чем $n+2$ элементов. □

Теорема 5.2 равносильна следующему утверждению.

Предложение 6.3. *Любая конечно порожденная* J*-алгебра конечной высоты конечна.*

Предложение не переносится на алгебры конечного уровня. Существует бесконечная алгебра нулевого уровня с двумя порождающими.

Теорема 6.4. *Любая тонкая конечно порожденная алгебра* $\mathbf{B}$ *конечного уровня конечна. Если* $\mathbf{B}$ *имеет* k *порождающих, то* $h(\mathbf{B}^l) \leq k$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ — тонкая алгебра конечного уровня, т. е. $\mathbf{B}^l$ линейно упорядочена, $\mathbf{B}^u$ имеет конечную высоту по лемме 5.8.

Пусть $\mathbf{B}$ порождается элементами $a_1, \dots, a_k$. Покажем, что тогда $\mathbf{B}^l$ состоит из элементов $\perp, a_1\&\perp, \dots, a_k\&\perp$.

В самом деле, по лемме 5.5 отображение $g(x) = x\&\perp$ является гомоморфизмом алгебры $\mathbf{B}$ на $\mathbf{B}^l$. Ясно, что множество $X = \{\perp, a_1\&\perp, \dots, a_k\&\perp\}$ содержит $\perp$ и $g(a_i)$ для всех порождающих a_i алгебры $\mathbf{B}$. Так как $\mathbf{B}^l$ линейно упорядочена, множество X замкнуто относительно всех операций алгебры $\mathbf{B}^l$, поэтому X совпадает с $\mathbf{B}^l$. Поскольку X содержит не более $k+1$ элементов, получаем $h(\mathbf{B}^l) \leq k$.

Таким образом, ввиду леммы 5.6

$$h(\mathbf{B}) \leq h(\mathbf{B}^l) + h(\mathbf{B}^u) \leq k + h(\mathbf{B}^u).$$

Поэтому $\mathbf{B}$ имеет конечную высоту и конечна по предложению 6.3. $\square$

Теорема 6.4 дает возможность заменить нужные нам алгебры шкалами.

Шкалу $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$ назовем *тонкой*, если Q линейно упорядочено.

Легко видеть, что J-алгебра тонкая тогда и только тогда, когда ее представляющая шкала тонкая. Из теорем 4.2 и 6.4 вытекает, что любая тонкая конечно порожденная алгебра конечного уровня изоморфна алгебре $W^{\#}$ для подходящей тонкой шкалы W.

7. Вычисление уровня исчисления

Рассмотрим уровни более подробно.

Покажем, что номер уровня исчисления эффективно вычислим.

Лемма 7.1 [7]. *Для любого множества* Rul *и любого* n

$$(J + Rul) \vdash \lambda_n \iff L_{n+2} \not\models Rul.$$

Предложение 7.2. *Пусть* $L = J + Rul$, $n < \omega$. *Тогда*

(1) $L \in \Lambda_0 \iff L_2 \not\models Rul$;

(2) $L \in \Lambda_{n+1} \iff (L_{n+2} \models Rul$ *и* $L_{n+3} \not\models Rul)$;

(3) $L \in \Lambda_\omega \iff L \leq LC$.

Доказательство. Пп. (1), (2) следуют из определения уровней и леммы 7.1.

(3) Напомним, что логика LC полна относительно класса алгебр L_n, $n \geq 2$ [15]. Поэтому утверждение легко следует из леммы 7.1. $\square$

Сильная разрешимость над J включения в LC установлена в [7].

Теорема 7.3 [7]. *Проблема включения в* LC *сильно разрешима над* J.

Для доказательства использовано следующее утверждение.

Предложение 7.4 [7]. 1. *$J + Rul \leq LC$, если и только если все правила из Rul верны во всех алгебрах L_n, $n \geq 2$.*

2. *Правило $A_1, \ldots, A_m/B$ верно во всех алгебрах L_n, $n \geq 2$, если и только если оно верно в L_{k+2}, где k — число переменных этого правила.*

Отсюда выводим сильную разрешимость классификации.

Теорема 7.5. (1) *Каждый уровень сильно разрешим над* J.

(2) *Номер уровня исчисления эффективно вычислим.*

Доказательство. (1) Следует из предложения 7.2 и теоремы 7.3.

(2) Пусть Rul конечно и $L = J + Rul$, k — максимальное число переменных в правилах из Rul. Используем предложение 7.4 для проверки включения $J + Rul \leq LC$. Если $L_{k+2} \models Rul$, то $L_m \models Rul$ для всех $m \leq k+2$, а значит, все правила из Rul верны во всех L_n, $n \geq 2$, и $J + Rul \in \Lambda_\omega$.

Если $L_{k+2} \not\models Rul$, находим наименьшее n такое, что $L_{n+2} \not\models Rul$. Тогда $L \in \Lambda_n$ по предложению 7.2. □

Покажем, что каждый уровень представляет собой интервал в решетке J-логик. Через $L(\mathbf{A})$ обозначается логика алгебры $\mathbf{A}$, т. е. множество формул, общезначимых в $\mathbf{A}$.

Лемма 7.6. (1) *Для любого n логика $\mathrm{J}\lambda_n = \mathrm{J} + \lambda_n$ является наименьшей, а логика $L(L_{n+1})$ — наибольшей логикой уровня Λ_n;*

(2) *Логика* J *является наименьшей, а* LC *— наибольшей логикой бесконечного уровня.*

Доказательство. (1) Уровень Λ_0 совпадает с множеством негативных логик и имеет наименьшую логику $\mathrm{Neg} = \mathrm{J}\lambda_0$ и наибольшую логику For. Нетрудно понять, что $\mathrm{For} = \mathrm{LC}\,\lambda_0$.

Далее, по лемме 5.7 $L_{n+1} \models \lambda_n$ и $L_{n+1} \not\models \lambda_{n-1}$ для любого $n > 0$. Поэтому $\mathrm{J}\lambda_n \not\vdash \lambda_{n-1}$. Таким образом, $\mathrm{J}\lambda_n$ — логика n-го уровня; очевидно, она наименьшая в Λ_n.

Кроме того, логика $L(L_{n+1})$ также логика n-го уровня. По определению $L \not\vdash \lambda_{n-1}$ для любого исчисления L n-го уровня. По лемме 7.1 все аксиомы и правила исчисления L общезначимы в L_{n+1}, а значит, логика исчисления L содержится в $L(L_{n+1})$.

(2) Доказано в предложении 7.2. □

Свойства наименьших и наибольших логик в уровнях представлены в следующей теореме.

Теорема 7.7. (1) *Наименьшие логики всех уровней узнаваемы и сильно различимы над* J.

(2) *Наибольшие логики всех уровней сильно различимы и сильно узнаваемы над* J.

Доказательство. (1) Сильная различимость следует из лемм 7.6 и 7.1. Далее, все логики $\mathrm{J}\lambda_n$ аксиоматизируемы формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции, поэтому финитно аппроксимируемы и разрешимы [16]. Поскольку все они различимы, то и узнаваемы над J.

(2) Используем лемму 7.6. Сильная различимость и сильная узнаваемость логики LC доказаны в [7]. В [17] доказано, что логики $L(L_{n+1})$ исчерпывают все собственные расширения логики LC, отсюда получаем $L(L_{n+1}) = \mathrm{LC} + \lambda_n$ для любого n. Все формулы λ_n сильно различимы над J по лемме 7.1. Поэтому

логики $L(L_{n+1})$ сильно различимы над J. Их сильная узнаваемость доказана в [7]. □

8. Сильная разрешимость конечных слоев

В [2] установлено, что все слои разрешимы над J, а максимальные и минимальные логики всех слоев узнаваемы над J. Рассмотрим проблему сильной разрешимости. Докажем, что наименьшие логики слоев сильно различимы, а все конечные слои сильно разрешимы над J.

Напомним, что бесконечный слой Π_ω имеет точно две максимальные логики LC и NC. Справедлива

Теорема 8.1 [2]. *Для любой* J*-логики* L

$$\mathrm{L} \in \Pi_\omega \iff (\mathrm{L} \subseteq \mathrm{LC} \textit{ или } \mathrm{L} \subseteq \mathrm{NC}).$$

Обе логики LC и NC сильно узнаваемы над J [7].

Теорема 6.4 дает возможность заменить нужные алгебры шкалами.

Предложение 8.2. *Пусть* $L = (J + Rul)$ *— исчисление конечного уровня. Тогда для любого* n *следующие условия эквивалентны:*

(1) $L \nvdash \pi_n$;

(2) *существует конечная тонкая алгебра высоты больше, чем* n*, удовлетворяющая* Rul;

(3) *существует конечная тонкая шкала высоты больше, чем* n*, удовлетворяющая* Rul.

Доказательство. Пусть $(J + Rul) \vdash \lambda_m$.

(1) $\iff$ (2). Пусть $(J + Rul) \nvdash \pi_n$. По теореме 3.2 существует J-алгебра $\mathbf{A}$ такая, что $\mathbf{A} \models Rul$ и $\mathbf{A} \not\models \pi_n$. По предложению 5.1 получаем $h(\mathbf{A}) > n$. Ясно, что $\mathbf{A} \models \lambda_m$. По предложению 6.2 существует тонкая подалгебра $\mathbf{B}$ алгебры $\mathbf{A}$ такая, что $h(\mathbf{B}) > n$. Поскольку $\mathbf{B} \not\models \pi_n$ и π_n зависит от $n+1$ переменных, существует $(n+1)$-порожденная подалгебра $\mathbf{C}$ алгебры $\mathbf{B}$, опровергающая π_n. Так как $\mathbf{C}$ — тонкая алгебра и удовлетворяет λ_m, она конечна по теореме 6.4.

Обратное сразу следует из теоремы 3.2.

(2) $\iff$ (3). По теореме 4.2. □

Теорема 8.3. *Для любого натурального* n

(1) *формула* π_n *сильно различима над* J*;*

(2) *семейство логик* n*-го слоя сильно разрешимо над* J.

Доказательство. Пусть $L = J + Rul$ для конечного множества Rul.

(1) Сначала ввиду сильной различимости формулы λ_n над J можно проверить, выводима ли эта формула в L. Если $L \nvdash \lambda_n$, то $L \nvdash \pi_n$.

Пусть $J + Rul \vdash \lambda_n$. Если $L \nvdash \pi_n$, то по предложению 8.2 найдется конечная тонкая алгебра $\mathbf{A}$ высоты больше, чем n, удовлетворяющая Rul. Ясно, что $\mathbf{A} \not\models \pi_n$. Если $L \vdash \pi_n$, то найдется вывод π_n в L.

Перебирая всевозможные выводы и конечные алгебры, узнаем, выводима ли π_n в L. Таким образом, существует алгоритм проверки выводимости π_n в L.

(2) Сразу следует из (1) и определения слоя. □

Заметим, что из доказанной теоремы еще не вытекает, что можно эффективно вычислить номер слоя для каждого исчисления. Может случиться, что

$(J + Rul)$ — исчисление конечного уровня, но бесконечного слоя. Из определения ясно, что семейство конечнослойных исчислений перечислимо. Вопрос о сильной разрешимости бесконечного слоя остается открытым.

Заметим, что номер уровня исчисления эффективно вычислим, а семейство логик бесконечного уровня сильно разрешимо по теореме 7.5.

Если исчисление имеет бесконечный уровень, то оно принадлежит бесконечному слою. Если уровень оказался конечным, то требуется дальнейшее исследование. При этом вопрос о логиках конечного уровня сводится к рассмотрению конечных шкал.

Теорема 8.4. *Пусть $L = J + Rul$ — исчисление конечного уровня. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *L — исчисление бесконечного слоя;*

(2) *$L \leq \mathrm{NC}$;*

(3) *для любого n существует конечная тонкая шкала высоты больше, чем n, удовлетворяющая Rul.*

Доказательство. Пусть $(J + Rul) \vdash \lambda_m$.

(1) $\Longleftrightarrow$ (2). Пусть L — исчисление бесконечного слоя. Поскольку $L \not\leq \mathrm{LC}$, по теореме 8.1 получаем $L \leq \mathrm{NC}$. Обратное очевидно.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3). Следует сразу по предложению 8.2.

В [7] установлена сильная разрешимость классификации с помощью слоев над Neg, т. е. в логиках нулевого уровня. В отдельной статье мы покажем, что классификация с помощью слоев сильно разрешима над логикой $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + \lambda_1$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compos. Math. 1937. V. 4. P. 119–136.
2. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Слои над минимальной логикой // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 449–464.
3. *Hosoi T.* On intermediate logics. I // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. Ia. 1967. V. 14. P. 293–312.
4. *Максимова Л. Л.* Строение слоев над минимальной логикой // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1078–1087.
5. *Maksimova L.* Strongly decidable properties of modal and intuitionistic calculi // Log. J. IGPL. 2000. V. 8, N 6. P. 797–819.
6. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Узнаваемые логики // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 252–274.
7. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Сильная разрешимость и сильная узнаваемость // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 5.
8. *Rautenberg W.* Klassische und nichtklassiche Aussagenlogik. Wiesbaden: Vieweg-Verl., 1979.
9. *Odintsov S.* Constructive negations and paraconsistency. Dordrecht: Springer-Verl., 2008. (Trends in Logic; V. 26).
10. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
11. *Segerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. 1968. V. 34. P. 26–61.
12. *Максимова Л. Л.* Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 627–648.
13. *Stone M. H.* Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logic // Časopis pro Pestov n Matematiky a Fysiki. 1937. V. 67. P. 1–25.
14. *Odintsov S. P.* Logic of classical refutability and class of extensions of minimal logic // Log. Log. Philos. 2001. V. 9. P. 91–107.
15. *Dummett M.* A propositional calculus with denumerable matrix // J. Symb. Log. 1959. V. 24. P. 97–106.
16. *Максимова Л. Л.* Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1048–1064.

17. *Dunn J. M., Meyer R. K.* Algebraic completeness results for Dummett's LC and its extensions // Z. Math. Log. Grundlagen Math. 1971. V. 17. P. 225–230.

Статья поступила 10 августа 2016 г.

Максимова Лариса Львовна, Юн Вета Федоровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru