Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 510.57

О ПОЛУРЕШЕТКАХ РОДЖЕРСА ОБОБЩЕННО ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Исследуются мощностные и структурные свойства полурешеток Роджерса обобщенно вычислимых нумераций относительно произвольных невычислимых оракулов и оракулов, имеющих гипериммунные тьюринговы степени. Установлено, что полурешетка Роджерса обобщенно вычислимых относительно невычислимого оракула нумераций любого нетривиального семейства бесконечна. Для случая оракулов гипериммунной степени доказано, что полурешетка Роджерса любого бесконечного семейства содержит идеал без минимальных элементов, а также установлена предельность наибольшего элемента в случае его наличия при условии, что семейство содержит наименьшее по включению множество.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.619

Ключевые слова: вычислимая нумерация, обобщенно вычислимая нумерация, полурешетка Роджерса, гипериммунное множество, минимальная нумерация, универсальная нумерация.

1. Введение

Понятие обобщенно вычислимой нумерации введено и впервые изучено в работе С. С. Гончарова и А. Сорби [1]. Наибольшее продвижение в этом направлении было получено при исследовании обобщенно вычислимых нумераций семейств арифметических множеств [2–5]. В этих работах были исследованы и решены такие фундаментальные вопросы теории нумераций применительно к семействам арифметических множеств, как вопрос о возможных мощностях полурешеток Роджерса, количестве их минимальных элементов, существовании минимальных накрытий и др. В данной статье обобщенно вычислимые нумерации рассматриваются с позиции релятивизации классического понятия вычислимой нумерации относительно произвольного оракула. Такой подход был введен и систематизирован в работе С. А. Бадаева и С. С. Гончарова [6] (см. также [7–9]).

Необходимые сведения и общепринятые обозначения по теории алгоритмов и теории нумераций можно найти в [10–12]. Напомним некоторые известные понятия. Пусть A — произвольное множество, а α — нумерация некоторого семейства $\mathscr{F}$. Согласно [6] будем говорить, что α *A-вычислима*, если множество $\{\langle x, y\rangle : y \in \alpha x\}$ вычислимо перечислимо (в.п.) относительно A. Положив $A = \varnothing^{(n)}$, придем к понятию Σ^0_{n+1}-вычислимых нумераций, введенных в [1].

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.1515.2017/4.6), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15–01–08252).

© 2017 Файзрахманов М. Х.

Для нумерации β некоторого подсемейства $\mathscr{F}$ будем говорить, что β *сводится* к α (обозначаем через $\beta \leq \alpha$), если $\beta = \alpha f$ для некоторой вычислимой функции f. Нумерации α и β называются *эквивалентными* (обозначаем через $\alpha \equiv \beta$), если $\beta \leq \alpha$ и $\alpha \leq \beta$. *Прямая сумма* нумераций α и β определяется как

$$(\alpha \oplus \beta)x = \begin{cases} \alpha y, & \text{если } x = 2y, \\ \beta y, & \text{если } x = 2y + 1. \end{cases}$$

Множество всех A-вычислимых нумераций семейства $\mathscr{F}$, факторизованное по отношению $\equiv$, образует относительно порядка, индуцируемого отношением сводимости нумераций, и операции взятия наименьшей верхней грани, индуцируемой прямой суммой, верхнюю полурешетку, называемую *полурешеткой Роджерса* обобщенно вычислимых нумераций семейства $\mathscr{F}$. A-вычислимую нумерацию α семейства $\mathscr{F}$ назовем *универсальной*, если к ней сводится любая A-вычислимая нумерация того же семейства, и *минимальной*, если для любой нумерации β семейства $\mathscr{F}$ из $\beta \leq \alpha$ следует $\alpha \leq \beta$.

2. О мощностях полурешеток Роджерса

К фундаментальным проблемам касательно полурешеток Роджерса относятся следующие два вопроса, поставленные Ю. Л. Ершовым [13].

1. Каковы их возможные мощности?

2. Может ли полурешетка Роджерса быть решеткой?

Для случая вычислимых нумераций семейств в.п. множеств приведенные проблемы были решены в работах А. Б. Хуторецкого [14] и В. Л. Селиванова [15] соответственно, а для вычислимых нумераций семейств арифметических множеств — в работе С. С. Гончарова и А. Сорби [1]. Так, в каждом случае полурешетки Роджерса либо одноэлементны, либо имеют бесконечную мощность и не являются решетками. Перейдем к вопросу о мощностях полурешеток Роджерса обобщенно вычислимых нумераций.

Предложение 1. *Пусть A — произвольное невычислимое множество, $\mathscr{F}$ — конечное нетривиальное семейство A-в.п. множеств. Тогда $\mathscr{F}$ имеет бесконечно много попарно не сравнимых A-вычислимых нумераций.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F} = \{S_0, \dots, S_k\}$, $k > 0$, и $S_i \neq S_j$ при $i < j \leq k$. Согласно результату Штефана [16] в каждой ненулевой тьюринговой степени содержится бесконечная антицепь m-степеней. Выберем счетный набор попарно не сравнимых относительно m-сводимости множеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, принадлежащих тьюринговой степени A. Пусть $\overline{A}_n = \left\{y_0^n < y_1^n < \dots\right\}$. Определим последовательность A-вычислимых нумераций $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, полагая

$$\nu_n x = \begin{cases} S_0, & \text{если } x \in A_n, \\ S_{i+1}, & \text{если } x \notin A_n,\ x = y_j^n \text{ и } x = ks + i,\ i < k. \end{cases}$$

Фиксируем различные p и q. Имеем $\nu_p \not\leq \nu_q$, поскольку для каждой вычислимой функции f найдется такое x, что $A_p(x) \neq A_q(f(x))$ и, следовательно, $\nu_p x \neq \nu_q f(x)$. $\square$

Для бесконечных семейств справедлива теорема, являющаяся обобщением предложения 2.8 из [1] от оракулов вида $\varnothing^{(n+1)}$ до произвольных невычислимых оракулов.

Теорема 1. *Если A — невычислимое множество и $\mathscr{F}$ — бесконечное A-вычислимое семейство, то существует последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ A-вычислимых нумераций $\mathscr{F}$ такая, что для любых различных m, n нумерации α_m и α_n образуют минимальную пару.*

Доказательство. Пусть ν — произвольная A-вычислимая нумерация $\mathscr{F}$. Рассмотрим множество $C = \{A \restriction n : n \in \mathbb{N}\}$, где $A \restriction n$ является строкой $A(0)A(1)\dots A(n-1)$. Будем отождествлять натуральное число n с бинарной строкой σ, если 1σ является двоичной записью $n+1$. Отметим, что C ретрассируемо относительно функции

$$f(\varnothing) = \varnothing, \quad f(x_1 \dots x_n x_{n+1}) = x_1 \dots x_n.$$

Поскольку C невычислимо и ретрассируемо, оно иммунно (см., например, [10, II.6.5]). Пусть $C = \{c_0 < c_1 < \dots\}$, $\mathscr{F} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $S_i \neq S_j$ при $i \neq j$. Положим

$$\alpha_n x = \begin{cases} S_n, & \text{если } x \notin C, \\ \nu i, & \text{если } x = c_i. \end{cases}$$

Покажем, что при $m \neq n$ нумерации α_m и α_n образуют минимальную пару. Фиксируем произвольные вычислимые функции g, h и предположим, что $\alpha_m g = \alpha_n h$ и $\alpha_m g(\mathbb{N})$ бесконечно. Установим, что вычислимая функция

$$r(x) = \min\{g(x), h(x)\}$$

не ограничена. Действительно, $\alpha_m g(\mathbb{N})$ бесконечно, стало быть, для любого y существует такое z, что

$$\alpha_m g(z) \notin \{\alpha_i v : v < y,\ i = m \text{ или } i = n\}.$$

Отсюда $g(z) \geq y$. Кроме того, $h(z) \geq y$, так как в противном случае

$$\alpha_m g(z) = \alpha_n h(z) \in \{\alpha_n v : v < y\}.$$

Поскольку r не ограничена, можно выбрать вычислимую последовательность $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую условию

$$\forall k\, [\max\{g(z_k), h(z_k)\} < r(z_{k+1})].$$

Ввиду того, что $\alpha_m g = \alpha_n h$, для любого k справедливо $\alpha_m g(z_k) \in C$ или $\alpha_n h(z_k) \in C$. Иначе

$$\alpha_m g(z_k) = S_m \neq S_n = \alpha_n h(z_k).$$

Таким образом, $E_k = \{g(z_k), h(z_k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, является сильно вычислимой последовательностью конечных множеств без пересечений такой, что $C \cap E_k \neq \varnothing$ для всех k. Согласно [10, II.6.10.b] это противоречит одновременной иммунности и ретрассируемости C. Следовательно, либо $\alpha_m g(\mathbb{N}) \neq \mathscr{F}$, либо $\alpha_m g \neq \alpha_n h$. $\square$

Следствие 1. *Пусть A — невычислимое множество и $\mathscr{F}$ — бесконечное A-вычислимое семейство. Тогда полурешетка Роджерса $\mathscr{F}$ бесконечна и не является решеткой.*

3. Идеалы без минимальных элементов

Среди полурешеток Роджерса семейств в.п. множеств известны примеры полурешеток, содержащих как минимальные элементы, так и идеалы без минимальных элементов (см. [17–20]). В [2] было установлено существование бесконечного множества попарно не эквивалентных минимальных $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимых нумераций любого бесконечного $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимого семейства. В связи с этим в [2] был поставлен вопрос о существовании идеала без минимальных элементов в полурешетке Роджерса любого бесконечного $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимого семейства. Там же получен положительный ответ на этот вопрос для $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимых семейств, обладающих фридберговыми $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимыми нумерациями, а в [7] — для A-вычислимых бесконечных семейств всюду определенных функций, где $\varnothing' \leq_T A$. В следующей теореме ответ на поставленный вопрос дается для произвольных бесконечных семейств, вычислимых относительно оракула гипериммунной степени, в частности, вычислимых относительно оракулов вида $\varnothing^{(n+1)}$. В доказательствах следующих теорем 2, 3 существенно используется критерий Мартина — Миллера [21], согласно которому тьюрингова степень множества A содержит гипериммунное множество тогда и только тогда, когда существует функция $f \leq_T A$, которая не доминируется никакой вычислимой функцией.

Теорема 2. *Пусть A — гипериммунное множество и $\mathscr{F}$ — бесконечное A-вычислимое семейство. Тогда полурешетка Роджерса семейства $\mathscr{F}$ содержит идеал без минимальных элементов.*

Доказательство. Пусть ν — A-вычислимая нумерация семейства $\mathscr{F}$ такая, что $\nu 0 \neq \nu 1$. Поскольку A гипериммунно, можно фиксировать строго возрастающую функцию $h \leq_T A$, которая не доминируется никакой вычислимой функцией. Не ограничивая общности, можно считать, что $h(0) = 0$. Будем строить по шагам A-вычислимую нумерацию α семейства $\mathscr{F}$, к которой не сводится ни одна минимальная нумерация $\mathscr{F}$. Отметим, что каждая сводящаяся к α нумерация $\mathscr{F}$ имеет вид $\alpha\varphi_e$, где φ_e всюду определена и не ограничена. В процессе построения α будем использовать вычислимые функции f и g, определенные следующим образом:

$$\varphi_{g(e)}(0) = 0, \quad \varphi_{f(e)}(0) = \varphi_e(0),$$
$$\varphi_{g(e)}(x+1) = \min\{z > \varphi_{g(e)}(x) : \varphi_e(z) > \varphi_{f(e)}(x)\},$$
$$\varphi_{f(e)}(x+1) = \varphi_e\varphi_{g(e)}(x+1).$$

Отметим, что φ_e всюду определена и не ограничена тогда и только тогда, когда $\varphi_{f(e)}$ и $\varphi_{g(e)}$ всюду определены. Для доказательства теоремы достаточно, чтобы для всех e, i и $j \leq 1$ построение удовлетворяло следующим требованиям:

$$M_{3\langle e,i\rangle+j} : \varphi_e \text{ всюду определена и не ограничена} \Rightarrow \exists k\,[\alpha\varphi_{f(e)}(2k+j) = \nu i],$$

$$M_{3\langle e,i\rangle+2} : \varphi_e, \varphi_i \text{ всюду определены и } \varphi_e \text{ не ограничена}$$
$$\Rightarrow \exists k\,[\alpha\varphi_{f(e)}(2k+1) \neq \alpha\varphi_{f(e)}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1))].$$

Для каждого e определим нумерации γ_e и β_e, полагая

$$\gamma_e x = \alpha\varphi_e(x), \quad \beta_e k = \gamma_e\varphi_{g(e)}(2k).$$

Выполнение всех требований $M_{3\langle e,i\rangle}$ при фиксированном e обеспечит, что γ_e и β_e нумеруют все семейство $\mathscr{F}$, а выполнение всех $M_{3\langle e,i\rangle+2}$ — что все сводящиеся к α нумерации $\mathscr{F}$ не минимальны при условии, что φ_e всюду определена и не ограничена. Действительно, если для заданного i требование $M_{3\langle e,i\rangle+2}$ удовлетворено, то для некоторого k имеем

$$\gamma_e\varphi_{g(e)}(2k+1) = \alpha\varphi_e\varphi_{g(e)}(2k+1) = \alpha\varphi_{f(e)}(2k+1) \neq \alpha\varphi_{f(e)}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1))$$
$$= \alpha\varphi_e\varphi_{g(e)}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1)) = \gamma_e\varphi_{g(e)}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1)) = \beta_e\varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1).$$

Следовательно, $\gamma_e \neq \beta_e\varphi_i$, в то время как $\beta_e \leq \gamma_e$. Требования $M_{3\langle e,i\rangle+1}$ имеют вспомогательный характер и нужны для удовлетворения $M_{3\langle e,i\rangle+2}$.

Не ограничивая общности, можно считать, что если на шаге s значение $\varphi_{n,s}(x)$ определено, то $\varphi_n(x) < s$. В начале построения отметим все требования *не выполненными*. Будем говорить, что не отмеченное выполненным $M_{3\langle e,i\rangle+j}$ *требует внимания на шаге* $s+1$, если при $j \leq 1$ выполнено условие

$$\exists k\,[h(s) \leq \varphi_{f(e),h(s+1)}(2k+j)\downarrow < h(s+1)]$$

и при $j = 2$ для некоторого k каждое из значений

$$y_0 = \varphi_{f(e),h(s+1)}(2k+1), \quad y_1 = \varphi_{g(e),h(s+1)}(2k+1),$$
$$y_2 = \varphi_{i,h(s+1)}\varphi_{g(e)}(2k+1), \quad y_3 = \varphi_{f(e),h(s+1)}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1))$$

определено и

$$h(s) \leq \min\{y_n : n \leq 3\} < h(s+1).$$

Построение α.

Шаг 0. Полагаем $\alpha_0 x$ не определенным для всех x.

Шаг $s+1$. Выберем наименьшее $n \leq s$ такое, что M_n требует внимания. Если $n = 3\langle e,i\rangle + j$, $j \leq 1$, то положим $\alpha_{s+1}x = \nu i$ для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$h(s) \leq x < h(s+1). \tag{1}$$

Если $n = 3\langle e,i\rangle + 2$, то фиксируем k, для которого значения y_m, $m \leq 3$, определены, и для всех x, удовлетворяющих неравенству (1), положим

$$\alpha_{s+1}x = \begin{cases} \nu 0, & \text{если } x = \varphi_{f(e)}(2k+1), \\ \nu 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим M_n *выполненным.* Если никакое M_n не требует внимания при $n \leq s$, то для всех x, удовлетворяющих (1), определим $\alpha_{s+1}x = \nu 0$.

В конце построения положим $\alpha = \bigcup\limits_s \alpha_s$. Отметим, что согласно построению каждое M_n, отмеченное выполненным, удовлетворено.

Лемма 1. *Для всех e, i и $j \leq 1$ требование $M_{3\langle e,i\rangle+j}$ удовлетворено.*

Доказательство. Если $\varphi_{f(e)}$ не является всюду определенной, то φ_e не является всюду определенной и неограниченной. В таком случае $M_{3\langle e,i\rangle+j}$ удовлетворено. Пусть $\varphi_{f(e)}$ всюду определена. Отметим, что по определению $\varphi_{f(e)}$ строго возрастает. Фиксируем такое наименьшее t, что никакое M_n, $n < 3\langle e,i\rangle + j$, не требует внимания на шагах, больших t. Определим вычислимую функцию d, полагая $d(y) = h(y)$ для всех $y \leq t$ и

$$d(x+1) = \min\{s : \varphi_{f(e),s}(2z+j)\downarrow\}, \text{ где } z = \min\{u : \varphi_{f(e)}(2u+j) > d(x)\},$$

для всех $x \geq t$. Поскольку d не доминирует h, можно выбрать такое наименьшее s, что $d(s+1) < h(s+1)$. Согласно выбору s имеем $h(s) \leq d(s) < d(s+1)$. Фиксируем такое k, что $\varphi_{f(e)}(2k+j) > d(s)$ и

$$d(s+1) = \min\{v : \varphi_{f(e),v}(2k+j)\downarrow\}.$$

Имеем

$$h(s) < \varphi_{f(e),h(s+1)}(2k+j)\downarrow < h(s+1).$$

Таким образом, $M_{3\langle e,i\rangle+j}$ требует внимания на некотором шаге $r \leq s+1$ и отмечается выполненным. Следовательно, $M_{3\langle e,i\rangle+j}$ удовлетворено. □

Лемма 2. *Для всех e, i требование $M_{3\langle e,i\rangle+2}$ удовлетворено.*

Доказательство. Легко видеть, что $M_{3\langle e,i\rangle+2}$ удовлетворено, если одна из функций φ_i, $\varphi_{f(e)}$ не является всюду определенной. Пусть φ_i, $\varphi_{f(e)}$ всюду определены. Предположим, что функция $q(k) = \varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1)$ ограничена. Пусть $q(k) \leq N$ для всех k. Поскольку для всех m требование $M_{3\langle e,m\rangle+1}$ удовлетворено, а семейство $\mathscr{F}$ бесконечно, можно выбрать такое k, что

$$\alpha\varphi_{f(e)}(2k+1) \notin \{\alpha\varphi_{f(e)}(2x) : x \leq N\}.$$

Имеем

$$\alpha\varphi_{f(e)}(2k+1) \neq \alpha\varphi_{f(e)}(2q(k)) = \alpha\varphi_{f(e)}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2k+1)).$$

Отсюда $M_{3\langle e,i\rangle+2}$ удовлетворено. Пусть q не ограничена. Покажем, что тогда для любого N существует такое z, что каждое из значений

$$y_0(z) = \varphi_{f(e)}(2z+1), \quad y_1(z) = \varphi_{g(e)}(2z+1),$$
$$y_2(z) = \varphi_i\varphi_{g(e)}(2z+1), \quad y_3(z) = \varphi_{f(e)}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2z+1))$$

больше N. Так как $\varphi_{f(e)}$ и $\varphi_{g(e)}$ строго возрастают, можем фиксировать такое z, что $\varphi_{f(e)}(z) > N$ и $\varphi_{g(e)}(z) > N$. Поскольку q не ограничена, для некоторого $k > z$ имеем $y_2(k) > \max\{N, z\}$. Ввиду монотонности $\varphi_{f(e)}$ и $\varphi_{g(e)}$ значения $y_j(k)$, $j = 0, 1, 3$, также превышают N. Таким образом, данное k искомое. Фиксируем такое наименьшее t, что никакое M_n, $n < 3\langle e,i\rangle + 2$, не требует внимания на шагах, больших t. Определим вычислимую функцию d, полагая $d(y) = h(y)$ для всех $y \leq t$. Предположим, что $d(x)$ определено для некоторого $x \geq t$, и определим $d(x+1)$. Для этого выберем такое наименьшее z, что каждое из значений $y_j(z)$, $j \leq 3$, превышает $d(x)$. Положим $d(x+1)$ равным первому шагу v, на котором определены значения

$$\varphi_{f(e),v}(2z+1),\ \varphi_{g(e),v}(2z+1),\ \varphi_{i,v}\varphi_{g(e)}(2z+1),\ \varphi_{f(e),v}(2\varphi_i\varphi_{g(e)}(2z+1)).$$

Поскольку d не доминирует h, можно выбрать такое наименьшее s, что

$$d(s+1) < h(s+1).$$

Согласно выбору s справедливо также неравенство

$$h(s) \leq d(s) < d(s+1) < h(s).$$

Фиксируем такое k, что каждое из значений $y_n(k)$, $n \leq 3$, определено на шаге $d(s+1)$ и превышает $d(s)$. Имеем

$$h(s) < \min\{y_n : n \leq 3\} < h(s+1).$$

Таким образом, $M_{3\langle e,i\rangle+2}$ требует внимания на некотором шаге $r \leq s+1$ и отмечается выполненным. Следовательно, $M_{3\langle e,i\rangle+2}$ удовлетворено. Лемма, а также теорема доказаны. □

4. О предельности наибольшего элемента

Будем говорить, что универсальная A-вычислимая нумерация ν семейства $\mathscr{F}$ *предельная*, если для для любой нумерации $\alpha < \nu$ семейства $\mathscr{F}$ существует такая нумерация β, что $\alpha < \beta < \nu$. В работе С. Ю. Подзорова [3] найден ряд достаточных условий для семейств, при выполнении которых универсальные арифметические нумерации этих семейств предельные. Одним из таких условий является наличие наименьшего по включению множества в данном семействе. В следующей теореме мы покажем, что это условие является также достаточным для предельности универсальных нумераций, вычислимых относительно оракулов гипериммунной степени.

Теорема 3. *Пусть A — гипериммунное множество, $\mathscr{F}$ — A-вычислимое семейство, содержащее наименьший по включению элемент, и ν — универсальная A-вычислимая нумерация $\mathscr{F}$. Тогда ν предельная.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой нумерации $\alpha < \nu$ семейства $\mathscr{F}$ существует A-вычислимая нумерация β некоторого подсемейства $\mathscr{F}$, удовлетворяющая условиям $\beta \not\leq \alpha$ и $\nu \not\leq \alpha \oplus \beta$. Отсюда $\alpha < \alpha \oplus \beta < \nu$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\nu 0$ наименьший по включению элемент $\mathscr{F}$ и $\nu 0 \neq \nu 1$. Пусть h — строго возрастающая A-вычислимая функция такая, что h не доминируется никакой вычислимой функцией и $h(0) = 0$. Фиксируем произвольную A-вычислимую нумерацию $\alpha < \nu$ семейства $\mathscr{F}$ и построим A-вычислимые нумерации β и γ некоторых подсемейств $\mathscr{F}$, удовлетворяя для всех e требованиям

$$P_e : \beta \neq \alpha\varphi_e, \quad R_e : \gamma \neq (\alpha \oplus \beta)\varphi_e.$$

В процессе построения также будем определять функцию $l(e, s)$, соответствующую длине соглашения в равенстве $\beta = \alpha\varphi_e$. Кроме того, в конструкции будет определена функция запрета $r(e, s)$, устанавливаемого требованиями R_e. Будем говорить, что P_e *требует внимания* на шаге $s + 1$, если

$$m(e, s) = \max\{t \leq s : \forall x \leq t\,[\beta_s x \restriction t = \alpha_s\varphi_{e,s}(x) \restriction t]\} > l(e, s).$$

Будем говорить, что R_e *требует внимания* на шаге $s + 1$, если $r(e, s) = 0$ и существует x, удовлетворяющий следующим условиям:

(a) $h(s) \leq \langle x, e\rangle < h(s + 1)$;

(b) $\varphi_{e,h(s+1)}(\langle x, e\rangle) \downarrow= 2n + 1$ и $h(s) \leq n < h(s + 1)$.

Построение β, γ.

Шаг 0. Определим $\beta_0 x = \gamma_0 x = \nu 0$, $l(x, 0) = r(x, 0) = 0$ для всех x.

Шаг $s + 1$. Рассмотрим три исчерпывающих случая.

Случай 1. Для всех $e \leq s$ ни P_e, ни R_e не требуют внимания.

Для всех $x = \langle y, i\rangle \in [h(s), h(s + 1))$ положим $\gamma_{s+1}\langle y, i\rangle = \nu y$ и $\beta_{s+1}x = \nu x$. Оставим значения всех остальных величин прежними.

Если условие случая 1 не выполняется, выберем наименьшее $e \leq s$, для которого по крайней мере одно из требований P_e и R_e требует внимания.

Случай 2. P_e требует внимания.

Определим $l(e, s + 1) = l(e, s) + 1$ и $\beta_{s+1}x = \nu x$ для всех x, принадлежащих множеству

$$\bigcup_{e \leq i, 0 < r(i,s)} [h(r(i, s) - 1), h(r(i, s))) \cup [h(s), h(s + 1)).$$

Для всех $\langle y, i\rangle \in [h(s), h(s+1))$ положим $\gamma_{s+1}\langle y, i\rangle = \nu y$. Определим $r(i, s+1) = 0$ для всех $i \geq e$. Оставим значения всех остальных величин прежними.

Случай 3. P_e не требует внимания, но R_e требует внимания.

Фиксируем x, удовлетворяющий условиям (a), (b). Определим $\gamma_{s+1}\langle x, e\rangle = \nu 1$ и $r(e, s+1) = s+1$. Для всех $\langle y, i\rangle \in [h(s), h(s+1))$, отличных от $\langle x, e\rangle$, положим $\gamma_{s+1}\langle y, i\rangle = \nu y$. Оставим значения всех остальных величин прежними.

В конце построения определим $\beta = \bigcup\limits_s \beta_s$ и $\gamma = \bigcup\limits_s \gamma_s$. Покажем, что для всех e требования P_e, R_e удовлетворены. Фиксируем e и выберем по индукции такой шаг s, что R_i для всех $i < e$ не требует внимания после шага s. Согласно построению имеем $r(i, s) = r(i, t)$ для всех $i < e$ и $t \geq s$. Отметим, что P_e удовлетворено тогда и только тогда, когда $\lim\limits_t m(e, t) < \infty$. Допустим, что $\lim\limits_t m(e, t) = \infty$. Тогда P_e требует внимания на бесконечном числе шагов. Следовательно, $\beta x = \nu x$ для всех шагов, за исключением конечного числа x. Отсюда $\nu \leq \alpha$; противоречие. Таким образом, P_e удовлетворено и перестает требовать внимания начиная с некоторого шага. С целью доказать, что R_e также удовлетворено, выберем такой наименьший шаг s, что никакое P_i, $i \leq e$, не требует внимания после шага s. Легко видеть, что если R_e требует внимания после шага s, то для некоторого x справедливо

$$\gamma\langle x, e\rangle = \nu 1 \neq \nu 0 = (\alpha \oplus \beta)\varphi_e(\langle x, e\rangle).$$

Следовательно, R_e удовлетворено и не требует внимания на последующих шагах. Будем считать функцию φ_e всюду определенной, так как в противном случае R_e удовлетворено. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \min\{\langle x, e\rangle : \forall y < x\, [\varphi_e(\langle x, e\rangle) > \psi(y)] \text{ и } \varphi_e(\langle x, e\rangle) \text{ нечетно}\}.$$

Предположим, что ψ не всюду определена. Тогда существует такое N, что для всех x либо $\varphi_e(\langle x, e\rangle)$ четно, либо $\varphi_e(\langle x, e\rangle) < N$. Если R_e не требует внимания ни на каком шаге, большем s, то согласно построению для всех шагов, за исключением конечного числа x, справедливо $\gamma\langle x, e\rangle = \nu x$. Отсюда $\gamma \neq (\alpha \oplus \beta)\varphi_e$, так как в противном случае $\nu \leq \alpha$. Следовательно, R_e удовлетворено. Пусть ψ всюду определена. Определим вычислимую функцию d, полагая $d(y) = h(y)$ для всех $y \leq s$ и

$$d(y+1) = \min\{t : \varphi_{e,t}\psi(z_0)\downarrow\},$$

где z_0 есть такое наименьшее z, что $\psi(z) > d(y)$ и $\frac{\varphi_e\psi(z)-1}{2} > d(y)$ для всех $y \geq s$. Заметим, что если $d(y+1) = t$, то $\psi(z_0) < t$ и $\varphi_e\psi(z_0) < t$. Выберем такое наименьшее v, что $d(v) < h(v)$. Тогда R_e требует внимания на шаге v и становится удовлетворенным. $\square$

В заключение приведем несколько открытых вопросов, связанных с результатами данной статьи.

Вопрос 1. *Может ли полурешетка Роджерса обобщенно вычислимых относительно невычислимого оракула нумераций конечного нетривиального семейства быть решеткой?*

В предложении 1 установлено лишь, что полурешетка Роджерса конечного нетривиального семейства бесконечна, а теорема 1 дает ответ на этот вопрос для случая бесконечных семейств.

Вопрос 2. *Существует ли бесконечное семейство, вычислимое относительно гипериммунного (или хотя бы невычислимого) оракула и не имеющее минимальных обобщенно вычислимых нумераций?*

Семейства в.п. множеств без минимальных нумераций были построены в [18, 20]. С другой стороны, в [2] было доказано, что любое бесконечное $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимое семейство имеет бесконечно много попарно не эквивалентных $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимых минимальных нумераций. В связи с этим представляется интересным выяснить, допускает ли последний результат обобщение на все невычислимые или гипериммунные оракулы или же существует обобщенно вычислимое семейство, полурешетка Роджерса которого будет схожей по строению в плане минимальности с полурешетками из [18, 20].

Вопрос 3. *Можно ли ослабить условие теорем* 2, 3 *с гипериммунных до произвольных невычислимых оракулов?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.
2. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507–522.
3. *Подзоров С. Ю.* О предельности наибольшего элемента полурешетки Роджерса // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 98–108.
4. *Подзоров С. Ю.* О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 2. С. 148–172.
5. *Бадаев С. А., Гончаров С. С., Сорби А.* Типы изоморфизмов полурешеток Роджерса семейств из различных уровней арифметической иерархии // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 6. С. 637–654.
6. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 555–569.
7. *Исахов А. А.* Идеалы без минимальных элементов в полурешетках Роджерса // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 3. С. 305–314.
8. *Файзрахманов М. Х.* Универсальные обобщенно вычислимые нумерации и гипериммунность // Алгебра и логика. (В печати).
9. *Файзрахманов М. Х.* Минимальные обобщенно вычислимые нумерации и высокие степени // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 710–716.
10. *Odifreddi P.* Classical recursion theory: The theory of functions and sets of natural numbers. Amsterdam: Elsevier, 1992. V. 1.
11. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1997.
12. *Ershov Yu. L.* Theory of numberings // E. R. Griffor, ed. Handbook of computability theory. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 473–503. (Stud. Logic Found. Math.; 140).
13. *Ершов Ю. Л.* Нумерации семейств общерекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1015–1025.
14. *Хуторецкий А. Б.* О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 5. С. 561–569.
15. *Селиванов В. Л.* Две теоремы о вычислимых нумерациях // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 4. С. 470–484.
16. *Stephan S.* On the structures inside truth-table degrees // J. Symb. Log. 2001. V. 66, N 2. P. 731–770.
17. *Бадаев С. А.* К одной проблеме С. С. Гончарова // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 212–214.
18. *Бадаев С. А.* Минимальные нумерации // Математическая логика и теория алгоритмов: Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 3–34.
19. *Хуторецкий А. Б.* Две теоремы существования для вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 4. С. 483–492.
20. *Вьюгин В. В.* О некоторых примерах верхних полурешеток вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 512–529.

21. *Martin D., Miller W.* The degrees of hyperimmune sets // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1968. Bd 14. S. 159–166.

Статья поступила 16 ноября 2016 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
marat.faizrahmanov@gmail.com