Лекция 10.
Рандомизированные алгоритмы

Екатерина Вячеславовна Алексеева

Новосибирский Государственный Университет
Механико-математический факультет
http://math.nsc.ru/∼alekseeva/

09 ноября, 2012 г.

Содержание лекции

Определения

Рандомизированный алгоритм (RA)

- *алгоритм, в котором некоторые действия основаны на случайном выборе;*
- *множество детерминированных алгоритмов, один из которых выбирается вероятностным способом, зависящим от заданного входа.*

Алгоритм типа Лас-Вегас

если для любого входа x задачи F алгоритм A находит решение с вероятностью единица. При этом время работы алгоритма является случайной величиной.

Алгоритм типа Монте-Карло

если для любого входа x задачи F алгоритм A находит решение с некоторой ненулевой вероятностью.

Пример алгоритма типа Лас-Вегас

Алгоритм быстрая сортировка $QS(S)$

- *Вход: множество S из n элементов.*
- *Выход: множество элементов из S отсортированных по неубыванию.*

1. *Выбрать элемент y случайным образом с равномерным распределением из n элементов.*
2. *Если $n = 1$, то выдать S в качестве ответа, иначе разбить множество S на три подмножества:*
   $S_< := \{$*элементы из S меньше, чем y*$\}$,
   $S_= := \{$*элементы из S равные y*$\}$,
   $S_> := \{$*элементы из S больше, чем y*$\}$
3. *Вызвать алгоритм $QS(S_<)$ и $QS(S_>)$.*

Сложность алгоритма $QS(S)$

Теорема 1

Ожидаемое число сравнений в алгоритме $QS(S)$ не более $2nH_n$.

Доказательство:

Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ —результат работы алгоритма $QS(S)$.
Пусть x_{ij} — случайная величина:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_i \text{ и } s_j \text{ сравнивались между собой в } QS \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$i, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j$. $T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} x_{ij}$ *— общее число сравнений.*
Тогда ожидаемая сложность алгоритма:

$$E[T] = E[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} x_{ij}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} E[x_{ij}]$$

Доказательство (продолжение):

Пусть p_{ij} *— вероятность того, что* s_i *и* s_j *сравниваются.*
$E[x_{ij}] = p_{ij} \cdot 1 + (1 - p_{ij}) \cdot 0 = p_{ij}$.
Рассмотрим для каждого $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j$ *последовательность* $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{i+j-1}, s_j$.
Элементы s_i *и* s_j *сравниваются между собой только, если один из них был выбран в качестве первого элемента последовательности. Любой из элементов* $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{i+j-1}, s_j$ *с равной вероятностью может быть первым в последовательности, следовательно,*
$p_{ij} = \frac{2}{j-i+1}$.

$$E[T] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \frac{2}{j-i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} \frac{2}{k}$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2 \sum_{i=1}^{n} H(n) = 2nH(n) \approx 2n \ln n + \Theta(1) = O(n \log n).$$

Пример алгоритма типа Монте-Карло. Задача о минимальном разрезе

- Дано: G — связный неориентированный мультиграф с n вершинами

Мультиграф

граф, в котором между любой парой вершин может быть несколько ребер

Разрез в графе G

*множество **ребер**, удаление которых приводит к распаду графа на две или более компонент связности*

- Найти разрез минимальной мощности

Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе

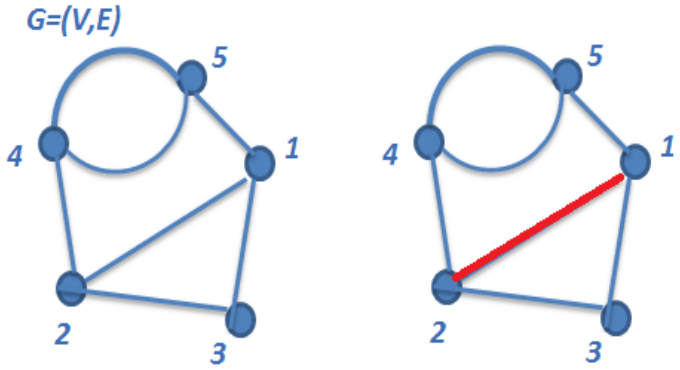
Алгоритм стягивания вершин

- *Вход: мультиграф* $G = (V, E)$
- *Выход: разрез* C

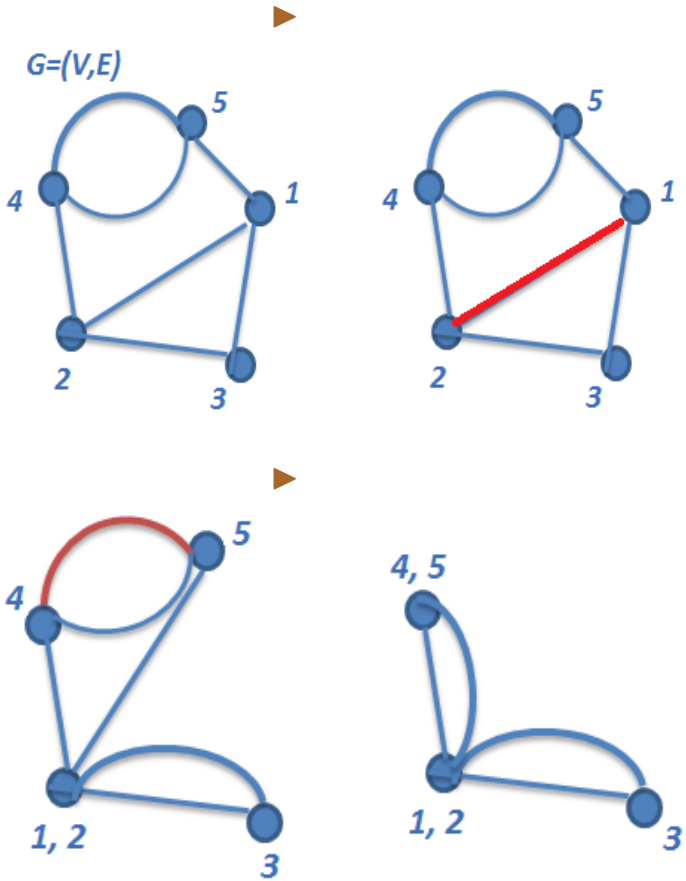
Пока не останется две вершины выполнить:

1. *выбрать случайным образом с равномерным распределением ребро* $e = (u, v)$
2. *слить вершины* u *и* v *в одну "метавершину":*
   удалить все ребра между вершинами u *и* v,
   все ребра из E *инцидентные вершинам* u *и* v *инцидентны "метавершине"*

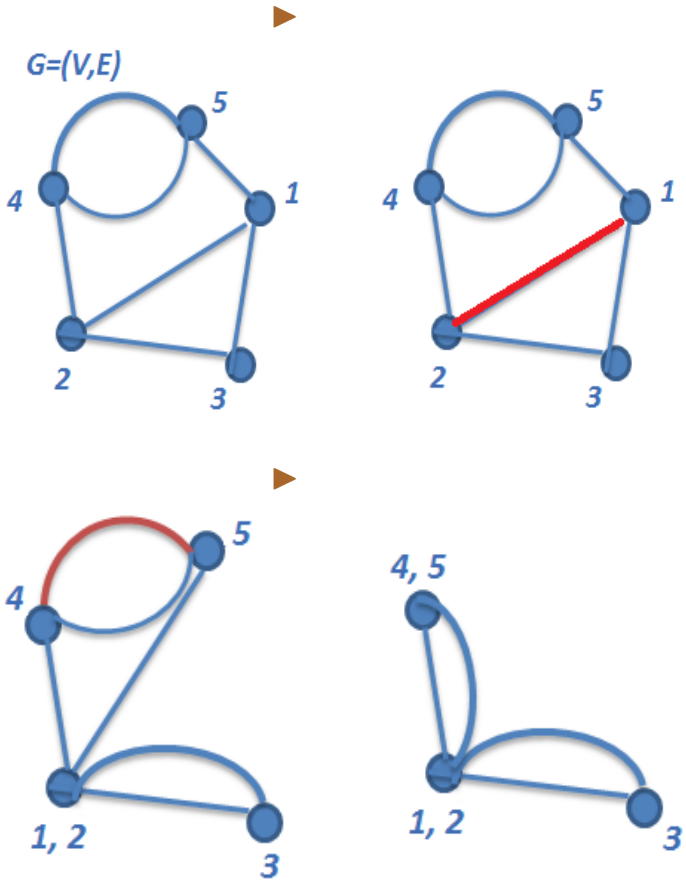
Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе

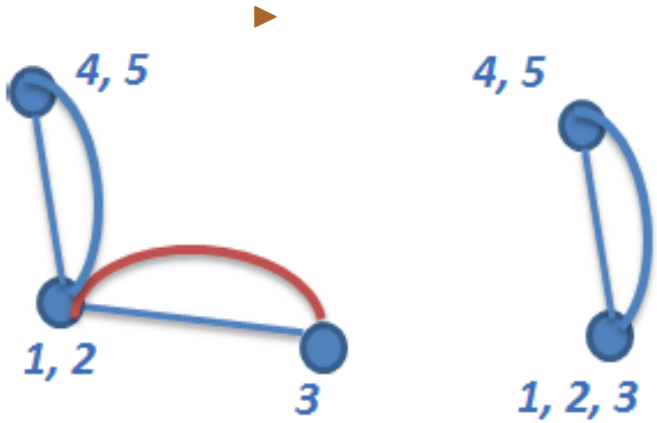


Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе



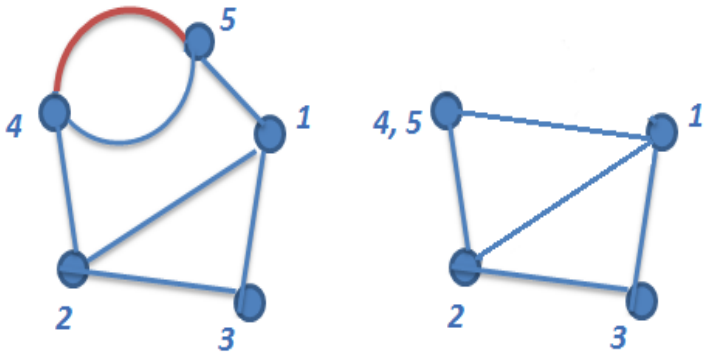
Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе



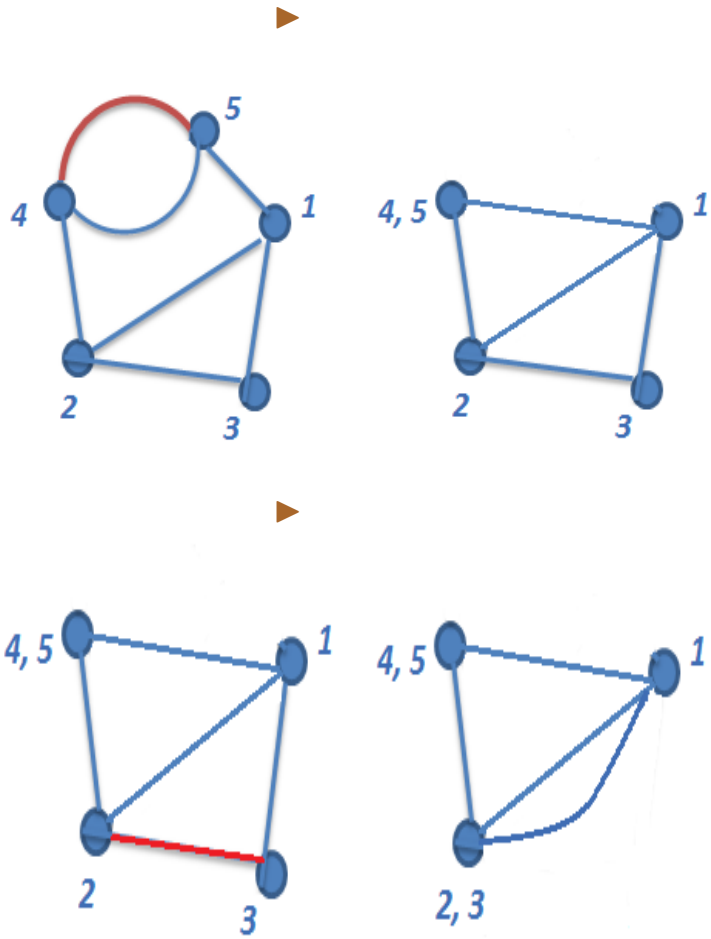


минимальный разрез

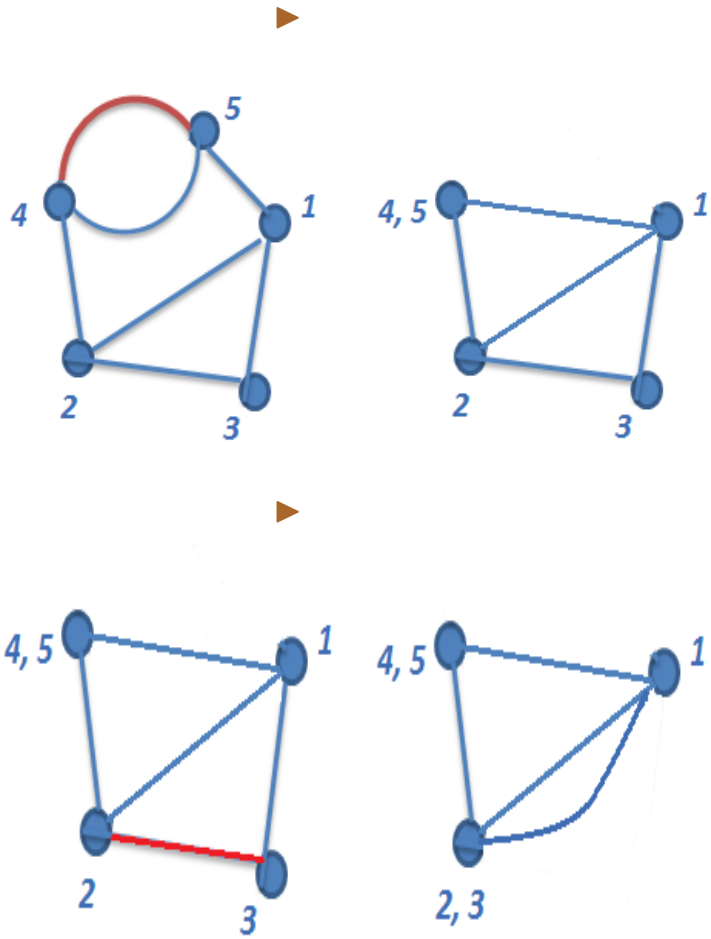
Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе

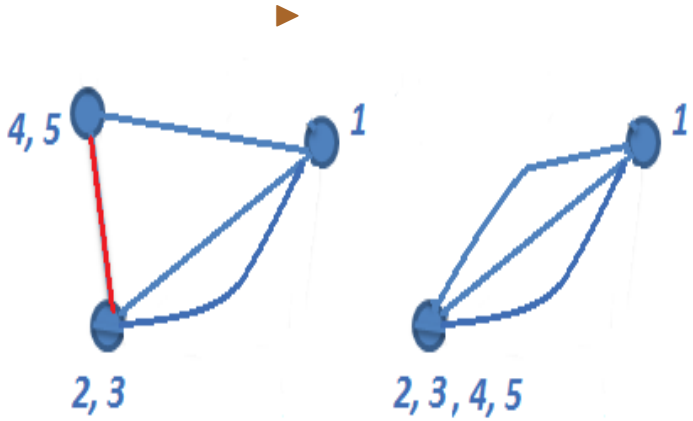


Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе



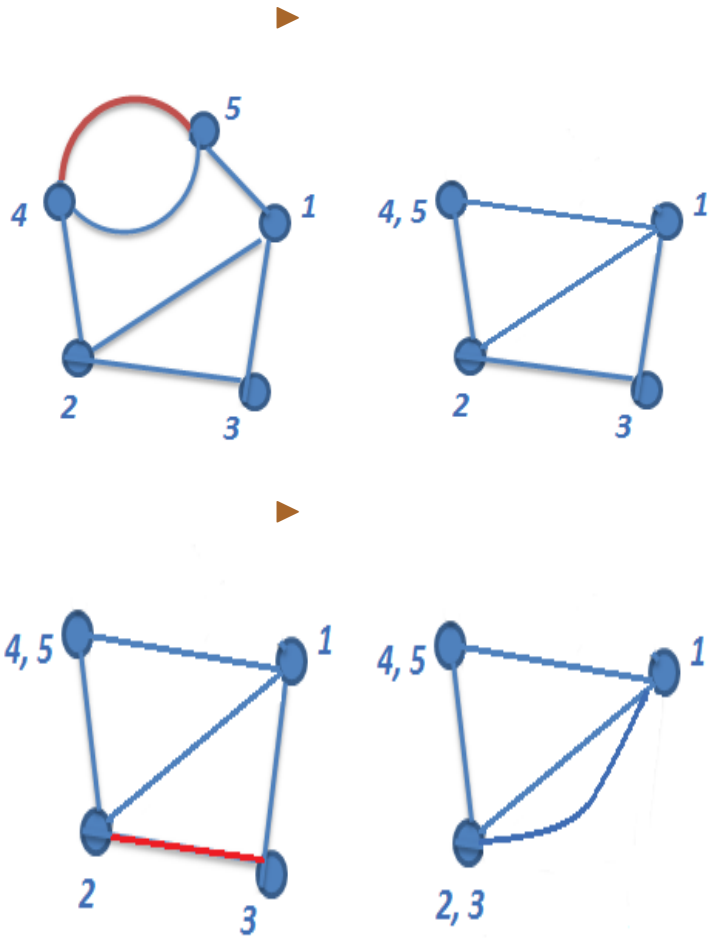
Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе

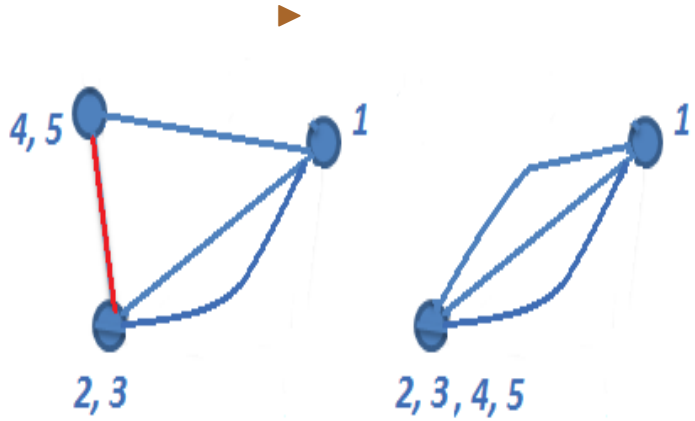




неминимальный разрез

Рандомизированный алгоритм для задачи о минимальном разрезе





неминимальный разрез

- С какой вероятностью алгоритм находит минимальный разрез?

Вероятность нахождения минимального разреза

Пусть в минимальном разрезе k ребер,
тогда в графе G ребер по крайней мере ...

Вероятность нахождения минимального разреза

Пусть в минимальном разрезе k ребер,
тогда в графе G ребер по крайней мере ...

- $nk/2$.

Оценим вероятность того, что в ходе работы алгоритма ни одного ребро из разреза не удалялось.

Вероятность нахождения минимального разреза

Пусть в минимальном разрезе k ребер,
тогда в графе G ребер по крайней мере ...

- $nk/2$.

Оценим вероятность того, что в ходе работы алгоритма ни одного ребро из разреза не удалялось.

- Пусть e_i означает, что ребро из разреза не было выбрано алгоритмом на i-ом шаге, $1 \leq i \leq (n-2)$.

Вероятность нахождения минимального разреза

Пусть в минимальном разрезе k ребер,
тогда в графе G ребер по крайней мере ...

- $nk/2$.

Оценим вероятность того, что в ходе работы алгоритма ни одного ребро из разреза не удалялось.

- Пусть e_i означает, что ребро из разреза не было выбрано алгоритмом на i-ом шаге, $1 \leq i \leq (n-2)$.
- 1-й шаг: $P(\text{ребро, выбранное на первом шаге } \in C) \leq \frac{k}{\frac{(nk)}{2}} = \frac{2}{n}$.

  Следовательно, $P(e_1) \geq 1 - \frac{2}{n}$.

Вероятность нахождения минимального разреза

Пусть в минимальном разрезе k ребер,
тогда в графе G ребер по крайней мере ...

- $nk/2$.

Оценим вероятность того, что в ходе работы алгоритма ни одного ребро из разреза не удалялось.

- Пусть e_i означает, что ребро из разреза не было выбрано алгоритмом на i-ом шаге, $1 \leq i \leq (n-2)$.
- 1-й шаг: $P(\text{ребро, выбранное на первом шаге } \in C) \leq \frac{k}{\frac{(nk)}{2}} = \frac{2}{n}$.

  Следовательно, $P(e_1) \geq 1 - \frac{2}{n}$.
- 2-й шаг: число вершин уменьшилось на одну, а ребер не меньше, чем $k(n-1)/2$, следовательно, $P(e_2|e_1) \geq 1 - \frac{2}{(n-1)}$.

Вероятность нахождения минимального разреза

Пусть в минимальном разрезе k ребер,
тогда в графе G ребер по крайней мере ...

- $nk/2$.

Оценим вероятность того, что в ходе работы алгоритма ни одного ребро из разреза не удалялось.

- Пусть e_i означает, что ребро из разреза не было выбрано алгоритмом на i-ом шаге, $1 \leq i \leq (n-2)$.
- 1-й шаг: $P(\text{ребро, выбранное на первом шаге } \in C) \leq \frac{k}{\frac{(nk)}{2}} = \frac{2}{n}$.

  Следовательно, $P(e_1) \geq 1 - \frac{2}{n}$.
- 2-й шаг: число вершин уменьшилось на одну, а ребер не меньше, чем $k(n-1)/2$, следовательно, $P(e_2|e_1) \geq 1 - \frac{2}{(n-1)}$.
- i-й шаг: ребер не меньше, чем $k(n-i+1)/2$, следовательно, $P(e_i| \cap_{j=1}^{i-1} e_j) \geq 1 - \frac{2}{(n-i+1)}$.

Вероятность нахождения минимального разреза

Итого, вероятность того, что в ходе алгоритма ни одно ребро из разреза не удалялось:

$$P(\cap_{i=1}^{n-2} e_i) \geq \prod_{i=1}^{n-2}(1 - \frac{2}{(n-i+1)}) = \frac{2}{n(n-1)}$$

Сколько раз следует запустить алгоритм, чтобы вероятность несрабатывания была как можно меньше?

Вероятность нахождения минимального разреза

Итого, вероятность того, что в ходе алгоритма ни одно ребро из разреза не удалялось:

$$P(\cap_{i=1}^{n-2} e_i) \geq \prod_{i=1}^{n-2}(1 - \frac{2}{(n-i+1)}) = \frac{2}{n(n-1)}$$

Сколько раз следует запустить алгоритм, чтобы вероятность несрабатывания была как можно меньше?

- Пусть запустили алгоритм $n^2/2$ раз независимо с равномерным распределением.
  Вероятность того, что за $n^2/2$ раз минимальный разрез не найден не больше, чем
  $$(1 - \frac{2}{n^2})^{n^2/2} < 1/e.$$

Пример алгоритма типа Монте-Карло

Алгоритм

1. *Запустить алгоритм с входом* x t *раз. Пусть* $y_1, \ldots, y_t$ *— полученные решения.*
2. *Предъявить в качестве ответа решение* y*, полученное по крайней мере* $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ *раз среди* t *запусков, если такого* y *нет, то задача не решена.*

Пример алгоритма типа Монте-Карло

Пусть $p(x)$ — вероятность того, что алгоритм A находит правильный ответ на заданном входе x за один запуск:
$p = p(x) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$
Вероятность, что алгоритм A находит правильный ответ на заданном входе x i раз за t запусков:

$$p_i(x) = C_i^t p^i (1-p)^{t-i} =$$

$$C_i^t (p(1-p))^i (1-p)^{2(\frac{t}{2}-i)} \leq$$

$$C_i^t (\frac{1}{4} - \varepsilon^2)^i (\frac{1}{4} - \varepsilon^2)^{(\frac{t}{2}-i)} =$$

$$C_i^t (\frac{1}{4} - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

Пример алгоритма типа Монте-Карло

Вероятность, что алгоритм A_t решает задачу:

$$P \geq (1 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} p_i(x)) > (1 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} C_i^t (\frac{1}{4} - \varepsilon^2)^{\frac{t}{2}}))$$

$$> (1 - 2^{t-1}(\frac{1}{4} - \varepsilon^2)^{\frac{t}{2}}) = (1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \varepsilon^2)^{\frac{t}{2}})$$

Чтобы найти k такое, что $P(A_k(x)$ решает задачу$) \geq 1 - \delta$ для выбранного δ и любого входа x достаточно взять $k \geq \frac{2 \log_2 2\delta}{\log_2(1-4\varepsilon^2)}$

Задача максимальная выполнимость (MAX-SAT)

- Дано: набор дизъюнкций C на множестве булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$, веса дизъюнкций $\omega_c \geq 0$, $c \in C$
- Найти: назначение булевых переменных с максимальным суммарным весом выполненных дизъюнкций

Обозначения:
$size(c)$ — число литералов, входящих в дизъюнкцию c, размер каждой дизъюнкции произвольный;
W_c — случайная переменная, обозначающая вес, вносимый дизъюнкцией c;
$W = \bigcup_{c \in C} W_c$ — суммарный вес выполненных дизъюнкций;
$E(W_c) = \omega_c P(c = 1)$ — мат. ожидание выполнимости дизъюнкции c.

RA для MAX-SAT

Алгоритм Джонсона

for $i = 1$ *to* n *do*
begin
$p := Random(0, 1);$
if $p \leq 1/2$ *then* $x_i := 1$
else $x_i := 0;$
end;

RA для MAX-SAT

Теорема 2

Если $size(c) = k$, то ожидаемый вес, вносимый дизъюнкцией c оценивается $E(W_c) = \alpha_k \omega_c$, где $\alpha_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k \geq 1$.

Доказательство:

c — не выполнима $\Leftrightarrow$ все литералы в c принимают значение 0, вероятность этого события $\frac{1}{2^k}$.

Для $k \geq 1$, $\alpha_k \geq \frac{1}{2}$, $E(W) = \sum_{c \in C} E(W_c) \geq \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \omega_c \geq \frac{1}{2} OPT$
Алгоритм хорош при больших значениях k.

MAX-SAT в виде задачи ЦЛП

Пусть S_c^+, (S_c^-) — множество переменных, входящих в дизъюнкцию c без(с) отрицания(ем).

Переменные задачи:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i = 1, \\ 0, & \text{если } x_i = 0 \end{cases} \qquad z_c = \begin{cases} 1, & \text{если } c \text{ выполнима}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Математическая модель:

$$\max \sum_{c \in C} \omega_c z_c$$

$$\sum_{i \in S_c^+} y_i + \sum_{i \in S_c^-} (1 - y_i) \geq z_c, \forall c \in C$$

$$z \in \{0,1\} \forall c \in C; y_i \in \{0,1\} \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

LP-релаксация MAX-SAT

$$\max \sum_{c \in C} \omega_c z_c$$

$$\sum_{i \in S_c^+} y_i + \sum_{i \in S_c^-} (1 - y_i) \geq z_c, \forall c \in C$$

$$0 \leq z_c \leq 1, \forall c \in C$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

RA для MAX-SAT

Вероятностный алгоритм Джонсона

1. *Найти* (y^*, z^*) *— оптимальное решение LP-релаксации*
2. *for* $i = 1$ *to* n *do*
   begin
   $p := Random(0, 1)$;
   if $p \leq y_i^*$ *then* $x_i := 1$
   else $x_i := 0$;
   end;

RA для MAX-SAT

Теорема 3

Если $size(c) = k$, *то ожидаемый вес, вносимый дизъюнкцией* c *оценивается* $E(W_c) = \beta_k \omega_c z_c^*$, *где* $\beta_k = 1 - (1 - \frac{1}{k})^k$, $k \geq 1$.

Доказательство:

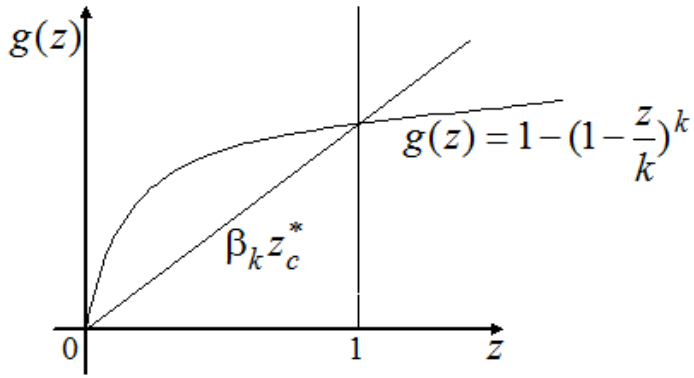
Можно считать, что все переменные входят в дизъюнкции без отрицания, иначе сделать замену. Вероятность того, что дизъюнкция c *выполнена:*

$$1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - y_i) \geq^{(1)} 1 - (\frac{\sum_{i=1}^{k}(1 - y_i)}{k})^k =$$

$$1 - (1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{k})^k \geq^{(2)} 1 - (1 - \frac{z_c^*}{k})^k$$

(1): $\frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}$
(2): $y_1 + \ldots + y_k \geq z_c$

Доказательство (продолжение):



$g(z)$ — *вогнутая,* $g(0) = 0$, $g(1) = \beta_k$, *следовательно,* $z \in [0, 1]$, $g(z) \geq \beta_k z$, *следовательно,* $P(\text{"}c \text{ выполнена "}) \geq \beta_k z_c^*$.
β_k — *убывающая функция по* k;

$$E(W) = \sum_{c \in C} E(W_c) \geq \beta_k \sum_{c \in C} \omega_c z_c^* = \beta_k OPT_f \geq \beta_k OPT,$$

где OPT_f — *оптимум LP-релаксации и* $OPT_f \geq OPT$.
Заметим,$(1 - \frac{1}{k})^k > \frac{1}{e}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$.

Алгоритм Гойманса и Уильямсона с оценкой $3/4$

С равной вероятностью выполняется либо алгоритм Джонсона, либо вероятностный алгоритм, основанный на LP-релаксации.

Таким образом $x_i = 1$ с вероятностью $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y_i^*$

Теорема 4

$E(W_c) \geq \frac{3}{4}\omega_c z_c^*$

Доказательство:

Пусть $b = 0$, *если выполняется алгоритм Джонсона,*
$b = 1$, *если выполняется вероятностный алгоритм Джонсона,*
z^* *— оптимальное решение LP-релаксации,* $size(c) = k$.
по теореме 2: $E(W_c|b = 0) = \alpha_k\omega_c \geq \alpha_k\omega_c z_c^*$, $z_c^* \leq 1$.
по теореме 3: $E(W_c|b = 1) \geq \beta_k\omega_c z_c^*$.
$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 3/2$, *для* $k \geq 3$ $\alpha_k + \beta_k \geq 7/8 + (1 - \frac{1}{e}) \geq \frac{3}{2}$.
$E(W_c) = \frac{1}{2}(E(W_c|b = 0) + E(W_c|b = 1)) \geq \omega_c z_c^* \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$
$E(W) = \sum_{c\in C} E(W_c) \geq \frac{3}{4}\sum_{c\in C} \omega_c z_c^* = \frac{3}{4}OPT_f \geq \frac{3}{4}OPT$.

Пример, что оценка $3/4$ точная для LP

- Дано: $C = \{(x_1 \vee x_2), (\overline{x_1} \vee x_2), (x_1 \vee \overline{x_2}), (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})\}$, $\omega_c = 1$
- Оптимальное решение LP-релаксации:

Пример, что оценка $3/4$ точная для LP

- Дано: $C = \{(x_1 \vee x_2), (\overline{x_1} \vee x_2), (x_1 \vee \overline{x_2}), (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})\}$, $\omega_c = 1$
- Оптимальное решение LP-релаксации:
- $y_i = \frac{1}{2}, \forall i,\ z_c = 1, \forall c,\ OPT_f = 4$

Пример, что оценка $3/4$ точная для LP

- Дано: $C = \{(x_1 \vee x_2), (\overline{x_1} \vee x_2), (x_1 \vee \overline{x_2}), (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})\}$, $\omega_c = 1$
- Оптимальное решение LP-релаксации:
- $y_i = \frac{1}{2}, \forall i,\ z_c = 1, \forall c,\ OPT_f = 4$
- Оптимальное решение:

Пример, что оценка $3/4$ точная для LP

- Дано: $C = \{(x_1 \vee x_2), (\overline{x_1} \vee x_2), (x_1 \vee \overline{x_2}), (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})\}$, $\omega_c = 1$
- Оптимальное решение LP-релаксации:
- $y_i = \frac{1}{2}, \forall i$, $z_c = 1, \forall c$, $OPT_f = 4$
- Оптимальное решение:
- $OPT = 3$.

Пример, что оценка $3/4$ точная для алгоритма Гойманса и Уильямсона

- Дано: $C = \{(x_1 \vee x_2), (\overline{x_1} \vee x_3), (x_1 \vee \overline{x_2})\}$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2 + \varepsilon$
- Убедитесь, что оценка точна для алгоритма Гойманса и Уильямсона.

Дерандомизация — конвертирование рандомизированного алгоритма в детерминированный.
Например, методом "условных вероятностей".

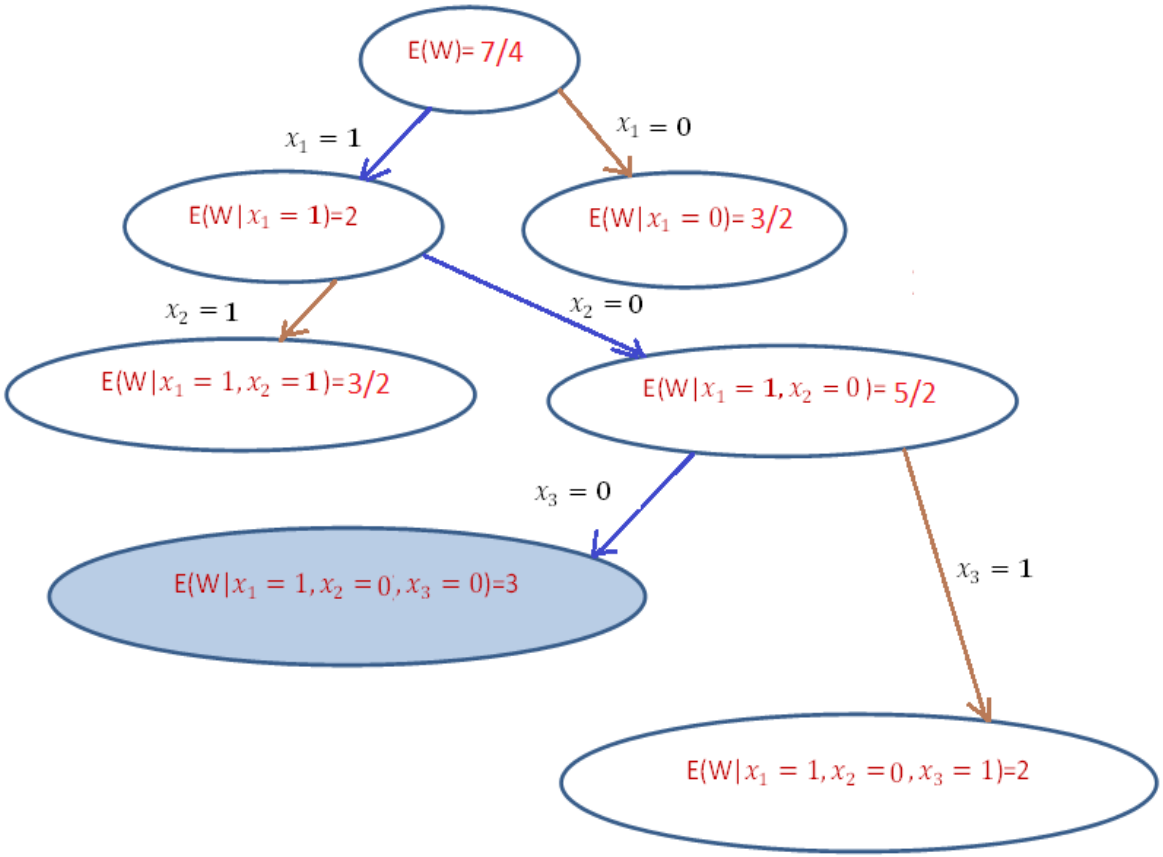


Рис.: Дерево назначений в задаче MAX SAT

Дерандомизация

Общая схема дерандомизации

- *Вход: постановка задачи в виде ЦЛП.*
- *Выход:* β *—приближенное решение (назначение переменных).*

for $i = 1$ *to* n *do*
  вычислить $E_1 = E(Z|X_1 = \beta_1, \ldots, X_{i-1} = \beta_{i-1}, X_i = 1)$
  вычислить $E_0 = E(Z|X_1 = \beta_1, \ldots, X_{i-1} = \beta_{i-1}, X_i = 0)$
    if $E_1 \geq E_0$ *then* $\beta_i := 1$
      else $\beta_i := 0$
$\beta = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$ *— ответ*

Нетрудно заметить, что $E(Z|X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}) \leq E(Z|X_1, X_2, \ldots, X_i)$
Этот алгоритм полиномиальный, если условные вероятности вычислимы за полиномиальное время.

Рекомендуемая литература


Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы построение и анализ, 2-е издание. М.: Изд. дом «Вильямс», 2009


V. Vazirani Approximation Algorithms. Springer-Verlag Berlin 2001.


Juraj Hromković Algorithmics for Hard Problems. Introduction to combi-natorial optimization, randomization, approximation, and heuristics. Second edition, Springer-Verlag Berlin 2001, 2003


R. Motwani, P. Raghavan Randomized Algorithms. Cambridge University Press, 1995


R. C. T. Lee, S. S. Tseng, R. C. Chang, Y. T. Tsai Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. A strategic Approach. MCGraw-Hill, 2005