

Метод ветвей и границ

В основе метода лежит принцип «разделяй и властвуй».

Пусть D — множество допустимых решений задачи

$$\min \{f(x) \mid x \in D\},$$

и для любого подмножества $d \subseteq D$ умеем вычислять:

$LB(d)$ — нижнюю оценку для минимума $f(x)$, $x \in d$,

$UB(d)$ — верхнюю оценку для минимума $f(x)$, $x \in d$,

т. е.

$$LB(d) \leq \min \{f(x) \mid x \in d\} \leq UB(d), \text{ для любого } d \subseteq D.$$

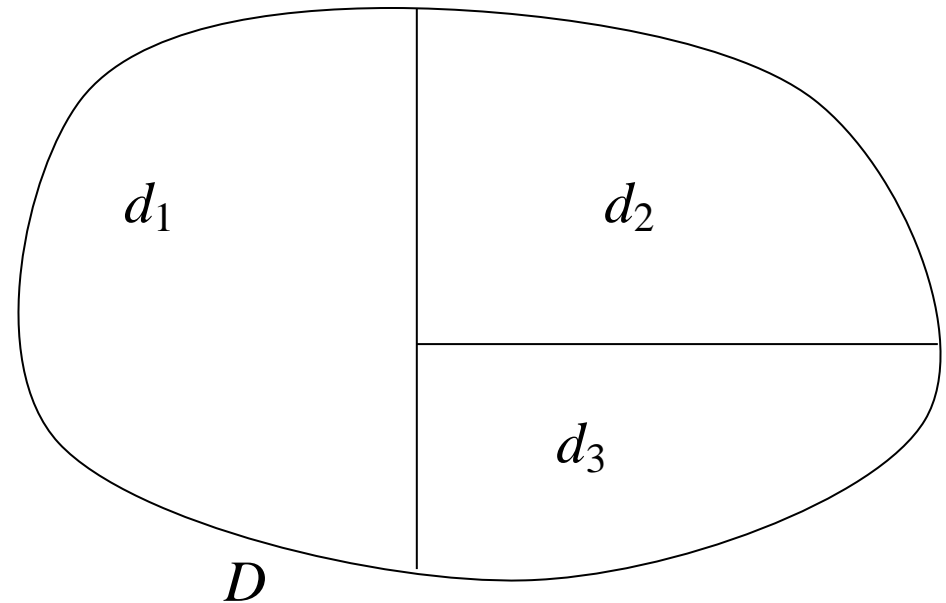
Основная идея

Пусть x^* — текущий рекорд и сначала $f(x^*) = UB(D)$. Вычисляем $LB(D)$ и, если $LB(D) = UB(D)$, то STOP, x^* — оптимальное решение задачи. В противном случае разбиваем D на подмножества $D = d_1 \cup \dots \cup d_k$. Для каждого подмножества вычисляем $UB(d_i)$, $LB(d_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Если $f(x^*) > UB(d_i)$, то меняем рекорд.

Если $LB(d_i) \geq f(x^*)$, то выбрасываем d_i , иначе дробим d_i на подмножества.

Так как D — конечное множество, то процесс конечен и дает точное решение задачи.



Описание метода

На каждом шаге имеется

- рекорд x^* ;
- просмотренная часть $P \subset D$, для которой $f(x) \geq f(x^*)$, $x \in P$;
- разбиение множества $D \setminus P$ на подмножества $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_k}$.

Шаг состоит в следующем.

1. Выбрать элемент разбиения, например, d_{i_k} ;
2. Вычислить $UB(d_{i_k})$. Если $f(x^*) > UB(d_{i_k})$, то сменить рекорд x^* .
3. Вычислить $LB(d_{i_k})$.

3.1. Если $LB(d_{i_k}) \geq f(x^*)$, то добавить d_{i_k} к P и перейти к следующему шагу.

3.2. Если $LB(d_{i_k}) \leq f(x^*)$, но в множестве d_{i_k} удалось найти наилучший элемент \tilde{x} : $f(\tilde{x}) = \min\{f(x) \mid x \in d_{i_k}\}$, то добавить d_{i_k} к P ; если $f(x^*) > f(\tilde{x})$, то положить $x^* := \tilde{x}$.

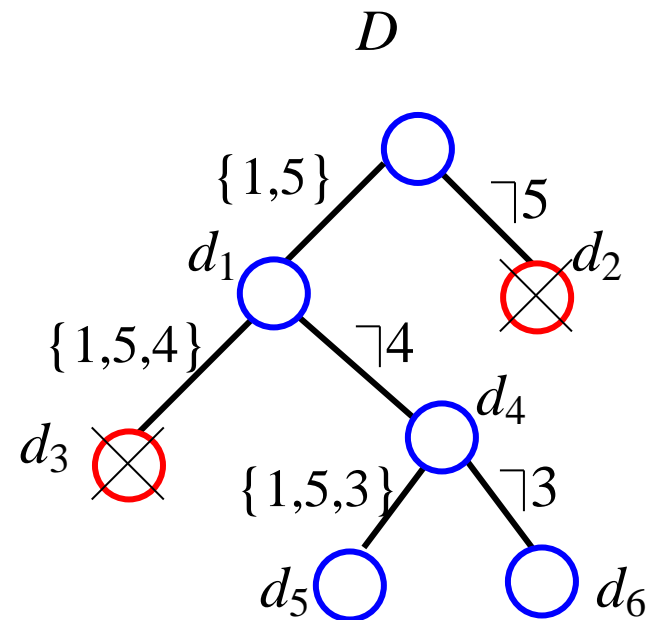
3.3. Если $LB(d_{i_k}) \leq f(x^*)$, но элемент \tilde{x} найти не удалось, то разбиваем d_{i_k} на подмножества $d_{i_k} = d_{i_{k+1}} \cup \dots \cup d_{i_{k+m}}$ и переходим к следующему шагу, имея новое разбиение для $D \setminus P$.

Метод В&Г для задачи коммивояжера

Разбиение множества D представляется в виде бинарного дерева.

Каждой вершине дерева соответствует частичный тур и список запретов.

Например, вершине d_6 соответствует частичный тур 1,5 и запреты $\{4,3\}$ на выход из города 5.



Метод В&Г для задачи коммивояжера

Примитивная нижняя оценка для вершины дерева,
например, d_6 при $n = 5$:

$$LB(d_6) = c_{15} + \sum_{i=2}^5 a_i + \sum_{j=1}^4 b_j.$$

Задача о назначениях:

$$LB(d_6) = c_{15} + \sum_{i=2}^5 c_{ij(i)}, \text{ при } c_{53} = c_{54} = c_{51} = +\infty.$$

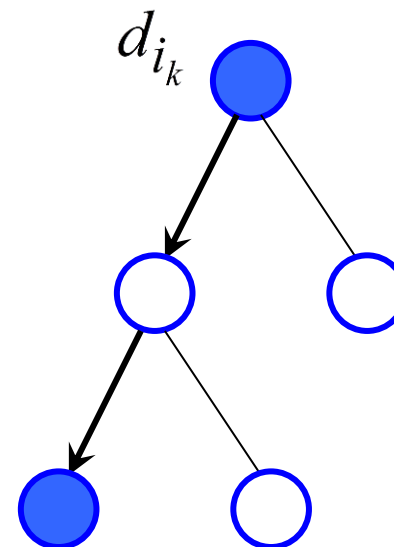
			c_{15}
c_{51}		c_{53}	c_{54}

Верхняя оценка — алгоритм «Иди в ближайший».

Выбор переменной для ветвления

Основная идея — угадать оптимальное решение на подмножестве d_{i_k} и ветвиться по дугам этого тура:

- для частичного тура i_1, \dots, i_k выбираем минимальный элемент в строке i_k матрицы $c''_{ij} = c_{ij} - a_i - b_j, j \neq i_1, \dots, i_k$
- для частичного тура i_1, \dots, i_k строим верхнюю оценку и ветвимся по дуге (i_1, \dots, i_{k+1}) .
- для частичного тура i_1, \dots, i_k решаем задачу о назначениях и ветвимся вдоль цикла, проходящего через вершину i_k .



Выбор подмножества из разбиения $D \setminus P$

Две основные схемы:

- *многосторонняя схема ветвления*, когда выбирается подмножество d' такое, что

$$LB(d') = \min \{LB(d_i) \mid i = i_1, \dots, i_k\}.$$

Среди элементов разбиения $D \setminus P = d_{i_1} \cup \dots \cup d_{i_k}$ выбирается подмножество с наименьшей нижней границей.

- *односторонняя схема ветвления*, когда всегда выбираем последний элемент $d' = d_{i_k}$.

Первая схема требует много оперативной памяти, но в среднем просматривает меньше вершин, чем вторая. Возможна комбинация этих схем: сначала первая, пока хватает памяти, затем вторая.

Задача коммивояжера в Интернет

- TSPBIB Home Page

http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB_home.html

- The Hamiltonian Page: **Hamiltonian cycle and path problems, their generalizations and variations**

<http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/Hamilton.html>

- Fractal Instances of the Traveling Salesman Problem

http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/FRACTAL_TSP_home.html

- **DIMACS:** The Traveling Salesman Problem

<http://www.research.att.com/~dsj/chtsp/>