Лекции 7, 8.
Матроиды. Пересечение матроидов

Екатерина Вячеславовна Алексеева

Новосибирский Государственный Университет
Механико-математический факультет
http://math.nsc.ru/~alekseeva/

11, 16 октября, 2012 г.

Содержание лекции

Основные определения

Системой подмножеств $S = (E, \mathfrak{F})$ называется пара конечное множество E вместе с семейством $\mathfrak{F}$ подмножеств множества E, замкнутым относительно включения, т.е. если $A \in \mathfrak{F}$ и $A' \subseteq A$, то $A' \in \mathfrak{F}$.

Элементы семейства $\mathfrak{F}$ называются независимыми.

Подмножество $D \subseteq E$ не входящее в $\mathfrak{F}$, называется зависимым.

Комбинаторная задача оптимизации для системы подмножеств $S = (E, \mathfrak{F})$:

Для каждого $e \in E$ задан вес $w(e) \geq 0$.
Требуется найти независимое подмножество, имеющее наибольший общий вес.

"Жадный" алгоритм для матроидов

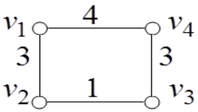
begin
$I := \emptyset$;
while $E \neq \emptyset$ do
    begin
        пусть e — элемент из E с наибольшим весом;
        удалить e из E;
        if $(I + e) \in \mathfrak{F}$ then $I := I + e$;
    end;
end;

Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?

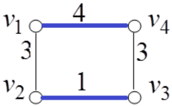
Пример 1.

- Дано: граф $G = (V, E)$, веса $w(e) \geq 0$, $\forall e \in E$
- Найти максимальное взвешенное паросочетание, т.е. подмножество $B \subseteq E$ наибольшего веса так, чтобы никакие два ребра не имели общей вершины.

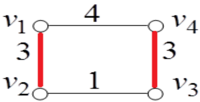
Рис.: Какое оптимальное решение? Какое решение жадного алгоритма?



Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?



Решение жадного алгоритма

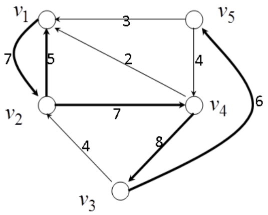


Оптимальное решение

Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?

Пример 2.

- Дано: орграф $D = (V, A)$, веса $w(a) \geq 0$, $\forall a \in A$
- Найти подмножество $B \subseteq A$ наибольшего веса так, чтобы никакие две дуги из B не имели общего конца.



Оптимальное решение, найденное жадным алгоритмом

Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?

Пример 3.

- Дано: множество E столбцов матрицы A , $\mathfrak{F}$ — семейство линейно независимых множеств столбцов матрицы A

3	1	3	0	2	1	1	1
0	2	1	1	0	0	1	2
1	1	2	0	1	0	0	0
2	0	0	-1	0	2	1	0
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \in \mathfrak{F}$, $\{e_1, e_4, e_5, e_6\} \notin \mathfrak{F}$

Определение

Система подмножеств $M = (E, \mathfrak{F})$ называется матроидом , если жадный алгоритм корректно решает любую индивидуальную комбинаторную задачу оптимизации для системы M.

Эквивалентные определения

Теорема 1

Пусть $M = (E, \mathfrak{F})$ *— система подмножеств. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. M *— матроид;*
2. *если* I_p, $I_{p+1} \in \mathfrak{F}$, *где* $|I_p| = p$ *и* $|I_{p+1}| = p + 1$, *то существует такой элемент* $e \in I_{p+1} \setminus I_p$, *что* $I_p \cup e \in \mathfrak{F}$;

Эквивалентные определения

Теорема 1

Пусть $M = (E, \mathfrak{F})$ *— система подмножеств. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. M *— матроид;*
2. *если* I_p, $I_{p+1} \in \mathfrak{F}$, *где* $|I_p| = p$ *и* $|I_{p+1}| = p + 1$, *то существует такой элемент* $e \in I_{p+1} \setminus I_p$, *что* $I_p \cup e \in \mathfrak{F}$*;*
3. *если* $A \subseteq E$ *и* I, I' *— максимальные по включению подмножества множества* A*,то* $|I| = |I'|$.

Эквивалентные определения

Доказательство

$(1) \Longrightarrow (2)$:
пусть (2) не выполняется, т.е. $\exists$ *множества* I_p, $I_{p+1} \in \mathfrak{F} |$
$|I_p| = p$ *и* $|I_{p+1}| = p + 1$ *и ни для какого* $e \in I_{p+1} \setminus I_p$ *подмножество*
$I_p \cup e \notin \mathfrak{F}$.
Выберем следующие веса на E:

$$w(e) = \begin{cases} p+2, & e \in I_p \\ p+1, & e \in I_{p+1} \setminus I_p \\ 0 & e \notin I_{p+1} \cup I_p. \end{cases}$$

Заметим, что I_p *не оптимально: жадный алгоритм выберет сначала все элементы* I_p, *а далее не сможет улучшить вес, т.к. для остальных элементов* e *либо* $I_p \cup e \notin \mathfrak{F}$, *либо* $w(e) = 0$. *Таким образом* $w(I_{p+1}) \geq (p+1)^2 > p(p+2) = w(I_p)$. *Следовательно,* M*—не матроид, противоречие.*

Эквивалентные определения

Доказательство (продолжение)

$(2) \Longrightarrow (3)$:
пусть (2) выполняется, и пусть I, I' — два максимальных по включению независимых подмножества множества $A \subseteq E$.
Допустим $|I| < |I'|$.
Отбрасывая $|I'| - |I| - 1$ элементов из $|I'|$ можно получить такое $I'' \subseteq I'$, что $|I''| = |I| + 1$.
По (2) можно найти элемент $e \in I'' \setminus I$, что $I \cup e \in \mathfrak{F}$.
Следовательно, I не максимальное по включению независимое подмножество множества A. Противоречие.

Эквивалентные определения

Доказательство (продолжение)

$(3) \Longrightarrow (1)$:
пусть (3) справедливо для M, покажем, что жадный алгоритм решает для M.
Предположим противное:
для некоторого множества весов $w(e), e \in E$ жадный алгоритм получает $I = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$,
но $\exists$ множество $J = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_j\} \in \mathfrak{F} |\ w(J) > w(I)$.
Пусть $w(e_1) \geq w(e_2) \dots \geq w(e_i)$ и $w(e'_1) \geq w(e'_2) \dots \geq w(e'_j)$.
J — максимальное по включению независимое подмножество в E,
I — максимальное по включению независимое подмножество в E (по построению).
Из (3) (при $E = A$) $i = j$.
Покажем, что $\forall m = 1, 2, \dots, i$, выполняется $w(e_m) \geq w(e'_m)$, чтобы получить противоречие с предположением, что $w(J) > w(I)$.

Эквивалентные определения

Доказательство (продолжение)

Индукция по m.
Для $m = 1$ верно. Пусть $w(e_m) < w(e'_m)$ для некоторого $m > 1$ и $w(e_s) \geq w(e'_s)$ для $s = 1, \ldots, m-1$.
Рассмотрим $A = \{e \in E, w(e) \geq w(e'_m)\}$.
Множество $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$ — максимальное по включению независимое подмножество в A, т.к.
если $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}, e\} \in \mathfrak{F}$ и $w(e) \geq w(e'_m) > w(e_m)$, то жадный алгоритм должен был бы вместо e_m выбрать e в качестве следующего элемента множества I, это противоречит (3), т.к. $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ — другое независимое подмножество в A большей мощности. Доказали.

Параметры матроидов

Пусть $M = (E, \mathfrak{F})$ — матроид и $A \subseteq E$.

Ранг $r(A)$ множества A в M

мощность максимальных по включению независимых подмножеств множества A

Базис (база матроида)

максимальные по включению независимые подмножества множества E

Цикл C

минимальное по включению зависимое подмножество C в E

Оболочка множества A, $sp(A)$

максимальное по включению множество S, содержащее A и удовлетворяющее условию $r(S) = r(A)$

Вопросы:

- $\emptyset \in \mathfrak{F}$?

Вопросы:

- $\emptyset \in \mathfrak{F}$?
- Пусть B_1, B_2 — базы матроида, что можно сказать про их мощность?

Вопросы:

- $\emptyset \in \mathfrak{F}$?
- Пусть B_1, B_2 — базы матроида, что можно сказать про их мощность?
- Правда ли, что любое максимальное по включению независимое множество в матроиде является также максимальным по числу элементов?

Примеры матроидов

Графический матроид

Граф $G = (V, E)$, $\mathfrak{F}$ — *множество лесов графа*
$M = (E, \mathfrak{F})$
$E' \subseteq E$

- *Ранг* $r(E') = |V| - c(E')$, *где* $c(E')$ — *число связных компонент графа* $G' = (V, E')$

Примеры матроидов

Графический матроид

Граф $G = (V, E)$, $\mathfrak{F}$ *— множество лесов графа*
$M = (E, \mathfrak{F})$
$E' \subseteq E$

- *Ранг* $r(E') = |V| - c(E')$, *где* $c(E')$ *— число связных компонент графа* $G' = (V, E')$
- *Циклы — циклы графа* G

Примеры матроидов

Графический матроид

Граф $G = (V, E)$, $\mathfrak{F}$ *— множество лесов графа*
$M = (E, \mathfrak{F})$
$E' \subseteq E$

- *Ранг* $r(E') = |V| - c(E')$, *где* $c(E')$ *— число связных компонент графа* $G' = (V, E')$
- *Циклы — циклы графа* G
- *Оболочка* $sp(E') = \{[v, u] \in E : v$ *и* u *лежат в одной и той же компоненте графа* $G' = (V, E')\}$

Примеры матроидов

Матроид разбиения

E — *конечное множество,* $\Pi = \{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ — *разбиение множества* E
$\cup_{i=1,\ldots,p} E_i = E$ *и* $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i, j, i \neq j$
$I \subseteq E$ *—независимое подмножество* $\Longleftrightarrow$ *никакие два элемента из* I *не лежат в одном и том же множестве разбиения* Π: $I \subseteq E, I \in \mathfrak{F} \Longleftrightarrow$
$|I \cap E_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots p$
$M = (E, \mathfrak{F})$

- *Ранг* $r(A) = |J(A)|$, *где* $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \emptyset\}$

Примеры матроидов

Матроид разбиения

E — конечное множество, $\Pi = \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ — разбиение множества E
$\cup_{i=1,\dots,p} E_i = E$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i, j, i \neq j$
$I \subseteq E$ —независимое подмножество $\Longleftrightarrow$ никакие два элемента из I не лежат в одном и том же множестве разбиения Π: $I \subseteq E, I \in \mathfrak{F} \Longleftrightarrow$
$|I \cap E_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \dots p$
$M = (E, \mathfrak{F})$

- *Ранг $r(A) = |J(A)|$, где $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \emptyset\}$*
- *Цикл — любое множество, состоящее из двух элементов одного и того же E_j*

Примеры матроидов

Матроид разбиения

E — конечное множество, $\Pi = \{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ — разбиение множества E
$\cup_{i=1,\ldots,p} E_i = E$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i, j, i \neq j$
$I \subseteq E$ —независимое подмножество $\Longleftrightarrow$ никакие два элемента из I не лежат в одном и том же множестве разбиения Π: $I \subseteq E, I \in \mathfrak{F} \Longleftrightarrow$
$|I \cap E_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots p$
$M = (E, \mathfrak{F})$

- *Ранг $r(A) = |J(A)|$, где $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \emptyset\}$*
- *Цикл — любое множество, состоящее из двух элементов одного и того же E_j*
- *Оболочка $sp(A) = \cup_{j \in J(A)} E_j$*

Свойства матроидов

Теорема 2

Пусть $I \in \mathfrak{F}$ и $e \in E$. Тогда либо $(I \cup e) \in \mathfrak{F}$, либо $(I \cup e)$ содержит единственный цикл.

Доказательство

- *Предположим, что $(I \cup e) \notin \mathfrak{F}$.*
  Пусть $C = \{c : (I \cup e) \setminus c \in \mathfrak{F}\}$. $C \subseteq (I \cup e)$.
  C — цикл, т.к. C — зависимое подмножество, иначе его можно было бы увеличить до базиса в $(I \cup e)$, мощностью $|I|$ и имел бы вид $(I \cup e) \setminus d$, но тогда $d \in C$;
  C — минимально, т.к. при удалении любого его элемента c, получается подмножество $C \setminus c$, содержащееся в независимом подмножестве $(I \cup e) \setminus c$.

Свойства матроидов

Теорема 2

Пусть $I \in \mathfrak{F}$ *и* $e \in E$. *Тогда либо* $(I \cup e) \in \mathfrak{F}$, *либо* $(I \cup e)$ *содержит единственный цикл.*

Доказательство

- *Предположим, что* $(I \cup e) \notin \mathfrak{F}$.
  Пусть $C = \{c : (I \cup e) \setminus c \in \mathfrak{F}\}$. $C \subseteq (I \cup e)$.
  C *— цикл, т.к.* C *— зависимое подмножество, иначе его можно было бы увеличить до базиса в* $(I \cup e)$, *мощностью* $|I|$ *и имел бы вид* $(I \cup e) \setminus d$, *но тогда* $d \in C$;
  C *— минимально, т.к. при удалении любого его элемента* c, *получается подмножество* $C \setminus c$, *содержащееся в независимом подмножестве* $(I \cup e) \setminus c$.
- *Единственность. Пусть* D *— другой цикл в* $(I \cup e)$ *и в* $C \setminus D$ *имеется некоторый элемент* c. *Тогда* $D \subseteq (I \cup e) \setminus c \Rightarrow D$ *независимо.*

Свойства матроидов

Теорема 3

Любое подмножество $A \subseteq E$ *имеет единственную оболочку* $sp(A) = \{e : r(A \cup e) = r(A)\}$.

Доказательство

Если S *— оболочка подмножества* A *и* $e \in S$, *то* $r(A \cup e) = r(A)$. *Иначе если* $r(A \cup e) > r(A)$, *то* $r(S) \geq r(A \cup e) > r(A)$, *противоречие. Следовательно,* $S \subseteq sp(A)$. *Покажем, что* $r(sp(A)) = r(A)$. *Общий базис двух множеств является базисом их объединения, поэтому базис множества* A *— базис в* $sp(A)$, *т.к. он — базис в* $(A \cup e)$ *для каждого* $e \in sp(A)$.

Свойства матроидов

Следствие 1

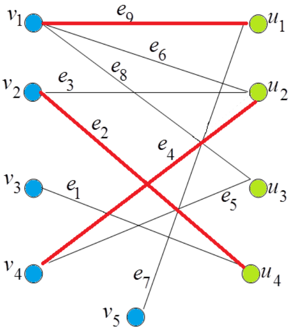
$sp(A)$ является объединением A и всех циклов, все элементы которых, кроме одного, содержатся в A.

Следствие 2

Если $I \in \mathfrak{F}$, $(I \cup e) \notin \mathfrak{F}$, и c принадлежит циклу в $(I \cup e)$, то $sp(I) = sp((I \cup e) \setminus c)$.

Поиск паросочетания в двудольном графе

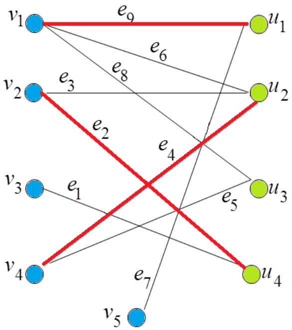
- Дано: двудольный граф $B = (V, U, E)$, веса $w(e) \geq 0$, $\forall e \in E$. Множество $\mathfrak{F}$ паросочетаний в B.

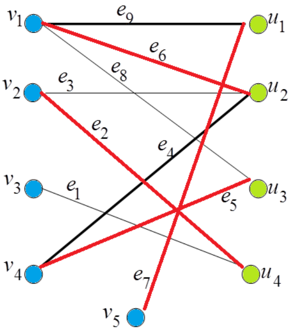


- Является ли пара $(E, \mathfrak{F})$ матроидом ?

Поиск паросочетания в двудольном графе

- Не матроид: паросочетание слева максимальное по включению, но не максимальное по числу элементов





Пересечение двух матроидов. Пример

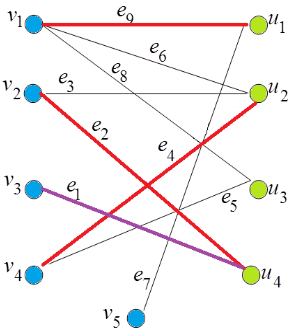
- Но является пересечением двух матроидов разбиения $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{K}$

$M = (E, \mathfrak{F})$
определяется разбиением Π_v
$\Pi_v = \{\{e_9, e_6, e_8\}, \{e_3, e_2\}, \{e_1\}, \{e_4, e_5\}, \{e_7\}\}$

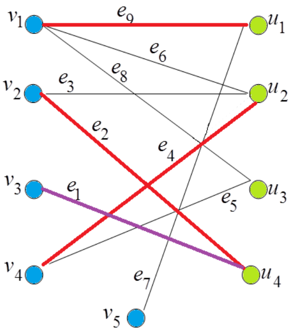
$N = (E, \mathfrak{K})$
определяется разбиением Π_u
$\Pi_u = \{\{e_9, e_7\}, \{e_6, e_3, e_4\}, \{e_8, e_5\}, \{e_1, e_2\}\}$

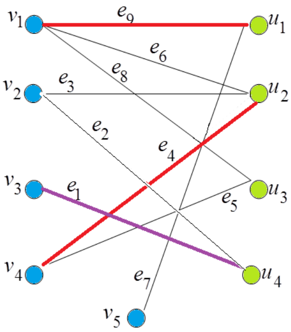
Подмножество $I \in E$ является паросочетанием $\Leftrightarrow$ независимо в M и в N

Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь

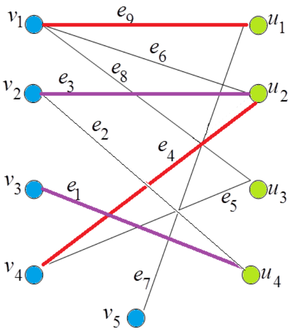
▶ 

Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь

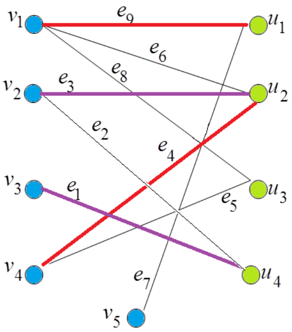


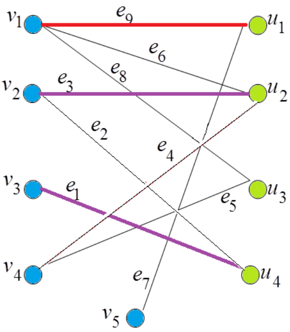


Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь

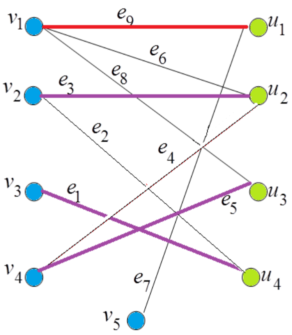


Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь

▶ 

▶ 

Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь



$S = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$ увеличивающий путь для $I = \{e_2, e_4, e_6\}$
$I \oplus S = I + e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5$

Увеличивающий путь. Чередующаяся последовательность

Пусть $S = [e_1, e_2, \ldots, e_m]$ — последовательность элементов из E
S_{ij}, $(i \leq j)$ — последовательность $[e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j]$
$sp_M(A)(sp_N(A))$ — оболочка множества $A \subseteq E$ в матроиде M (N)
$r_M(A)(r_N(A))$ — ранг множества $A \subseteq E$ в матроиде M (N)

Последовательность $S = [e_1, e_2, \ldots, e_m]$ чередующаяся относительно $I \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{K}$

если выполнены условия
Чер1. $I + e_1 \in \mathfrak{F}$ *и* $e_1 \notin I$
Чер2. Для любого четного i, $2 \leq i \leq m$ *справедливо* $e_i \in I$ *и* $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$
Чер3. Для любого нечетного i, $3 \leq i \leq m$ *справедливо* $e_i \notin I$ *и* $sp_M(I \oplus S_{1i}) = sp_M(I + e_1)$
Кроме того, если m *нечетно, то* $I \oplus S \in \mathfrak{K}$, *то* S *называется увеличивающей последовательностью*

Увеличивающий путь. Чередующаяся последовательность

Лемма 1

Пусть S — чередующаяся последовательность, тогда
1. $I \oplus S_{1i} \in \mathfrak{K}$ для четных i;
2. $I \oplus S_{1i} \in \mathfrak{F}$ для нечетных i.

Доказательство

1. Т.к. $e_i \notin I$ для нечетных i, то $I \oplus S_{1i} \neq I$ для четных i. Т.к. $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$, то I и $I \oplus S_{1i}$ имеют одинаковый ранг в N. Т.к. I независимо, т.е. имеет полный ранг в N, то $I \oplus S_{1i}$ тоже независимо.
2. Аналогично.

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Последовательность $S = [e_1, e_2, \ldots, e_m]$ *правильная относительно* $I \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{K}$

если выполнены условия
Пр1. $I + e_1 \in \mathfrak{F}$ *и* $e_1 \notin I$
Пр2. Для любого четного i, $2 \leq i \leq m$ *справедливо* $e_i \in I$ *и* $e_i \in D_{i-1}$*.*
Кроме того, $e_i \notin D_{k-1}$ *для любого четного* $k < i$*.*
Пр3. Для любого нечетного i, $3 \leq i \leq m$ *справедливо* $e_i \notin I$ *и* $e_{i-1} \in C_i$*.*
Кроме того, если m *нечетно и* $I \oplus S \in \mathfrak{K}$*, то* S *называется правильной увеличивающей последовательностью*

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Лемма 2

Правильные последовательности являются чередующимися.

Доказательство

Пр.1 $\Rightarrow$ *Чер.1 — очевидно.*
Пр.3 $\Rightarrow$ *Чер.3.*
Представим $I \oplus S_{1i}$ *для нечетного* i *в виде* $I + e_1 + (e_3 - e_2) + \ldots + (e_i - e_{i-1})$. *Слагаемым* $(e_j - e_{j-1})$ *соответствует добавление некоторого элемента к* $I \oplus S_{1,j-2}$ *(образуется цикл* C_j, *т.к.* $e_{k-1} \notin C_j$ *для нечетных* $k < j$*) и удаление некоторого элемента из этого цикла. По следствию 2 оболочка не изменится, следовательно,* $sp_M(I \oplus S_{1i}) = sp_M(I + e_1)$.

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Доказательство (продолжение)

Пр.2 $\Rightarrow$ *Чер.2.*
для четного i*:* $I \oplus S_{1i} = I + (e_{i-1} - e_i) + (e_{i-3} - e_{i-2}) + \ldots + (e_1 - e_2)$.
Каждая скобка $(e_{j-1} - e_j)$ *содержит:*
добавление e_{j-1} *к* $I \oplus S_{j+1,i}$*, получается цикл* D_{j-1}. $e_k \notin D_{j-1}$ *для четных* $k > j$*;*
удаление e_j *из* D_{j-1}.
В результате $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$.

Причины определения правильных чередующихся последовательностей

- их можно находить поиском в «статическом» вспомогательном графе;
- при их использовании сохраняется гарантия, что будет достигнута оптимальность.

Построение вспомогательного орграфа (E, A)

- множество вершин — множество E;
  для каждого $e_i \in E \setminus I$
- если $I \cup e_i \notin \mathfrak{F}$, то находим C_i и добавляем к A дугу (e_j, e_i) для каждого $e_j \in C_i \setminus e_i$ в соответствии с Пр.3
- если $I \cup e_i \notin \mathfrak{K}$, то для каждого e_j из $D_i \setminus e_i$ добавляем к A дугу (e_i, e_j) в соответствии с Пр.2

Построение последовательности по орграфу

- каждый элемент $e_i \in E \setminus I$ — кандидат на нечет. позиции в правильной чередующейся послед-ти S;
- $I \cup e_i \in \mathfrak{F}$, то e_i может быть первым элементом в S
- любой элемент из $E \setminus I$, такой что $I \cup e_i \in \mathfrak{K}$ может быть последним элементом в S

Достижение любого из этих элементов означает, что найден правильный увеличивающийся путь. (поиском в ширину)

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Лемма 3

$r(E_1, E_2) \geq |J|$, где $E_1 \bigcup E_2 = E$, $r(E_1, E_2) = r_M(E_1) + r_N(E_2)$, J — произвольное подмножество из $\mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$.

Доказательство

Пусть $J_1 = E_1 \bigcap J$, $J_2 = E_2 \bigcap J$. Так как J_1, J_2 — независимые в E_1, E_2, то $r(E_1, E_2) = r_M(E_1) + r_M(E_2) \geq |J_1| + |J_2| \geq |J|$.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.
Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- Begin
- $I := \emptyset$

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.
Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- Begin
- $I := \emptyset$
- label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.
Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- Begin
- $I := \emptyset$
- label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
  begin

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.
Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- Begin
- $I := \emptyset$
- label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
  begin
- if $I + e_i \in \mathfrak{F}, \mathfrak{K}$ then $I := I + e_i$ go to label;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.
Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- Begin
- $I := \emptyset$
- label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
  begin
- if $I + e_i \in \mathfrak{F}, \mathfrak{K}$ then $I := I + e_i$ go to label;
- if $I + e_i \in \mathfrak{F}$ then $Q := Q \bigcup \{e_i\}$, пометка$[e_i] := 0$
  else for all $e_j \in C_i - e_i$ do $A := A \bigcup \{(e_j, e_i)\}$;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.
Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- Begin
- $I := \emptyset$
- label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
  begin
- if $I + e_i \in \mathfrak{F}, \mathfrak{K}$ then $I := I + e_i$ go to label;
- if $I + e_i \in \mathfrak{F}$ then $Q := Q \bigcup \{e_i\}$, пометка$[e_i] := 0$
  else for all $e_j \in C_i - e_i$ do $A := A \bigcup \{(e_j, e_i)\}$;
- if $I + e_i \in \mathfrak{K}$ then $T := T \bigcup \{e_i\}$
  else for all $e_j \in D_i - e_i$ do $A := A \bigcup \{(e_i, e_j)\}$;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.
Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- Begin
- $I := \emptyset$
- label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
  begin
- if $I + e_i \in \mathfrak{F}, \mathfrak{K}$ then $I := I + e_i$ go to label;
- if $I + e_i \in \mathfrak{F}$ then $Q := Q \bigcup \{e_i\}$, пометка$[e_i] := 0$
  else for all $e_j \in C_i - e_i$ do $A := A \bigcup \{(e_j, e_i)\}$;
- if $I + e_i \in \mathfrak{K}$ then $T := T \bigcup \{e_i\}$
  else for all $e_j \in D_i - e_i$ do $A := A \bigcup \{(e_i, e_j)\}$;
- end;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- while $Q \neq \emptyset$ do
- begin

  пусть $e \in Q$

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- while $Q \neq \emptyset$ do
- begin
  пусть $e \in Q$
- удалить e из Q (Q — очередь);

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- while $Q \neq \emptyset$ do
- begin
  пусть $e \in Q$
- удалить e из Q (Q — очередь);
- for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- while $Q \neq \emptyset$ do
- begin
  пусть $e \in Q$
- удалить e из Q (Q — очередь);
- for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do
- begin

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- while $Q \neq \emptyset$ do
- begin
  пусть $e \in Q$
- удалить e из Q (Q — очередь);
- for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do
- begin
- пометка $[e'] := e, Q := Q \bigcup \{e'\}$;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- while $Q \neq \emptyset$ do
- begin
  пусть $e \in Q$
- удалить e из Q (Q — очередь);
- for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do
- begin
- пометка $[e'] := e, Q := Q \bigcup \{e'\}$;
- if $e' \in T$ then $I := I \oplus$ ПУТЬ(e') go to label;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- while $Q \neq \emptyset$ do
- begin
  пусть $e \in Q$
- удалить e из Q (Q — очередь);
- for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do
- begin
- пометка $[e'] := e, Q := Q \bigcup \{e'\}$;
- if $e' \in T$ then $I := I \oplus$ ПУТЬ(e') go to label;
- end;

  end;

End;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

поиск правильной увеличивающейся последовательности от некоторого элемента множества S до e

- procedure ПУТЬ(e)

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

поиск правильной увеличивающейся последовательности от некоторого элемента множества S до e

- procedure ПУТЬ(e)
- if пометка$[e] = 0$ then return $[e]$
  else return ПУТЬ(пометка$[e]$)

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Теорема 4

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов корректно решает задачу за время $O(|E|^3 C(|E|))$, где $C(|E|)$ — верхняя оценка сложности алгоритмов $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$ при работе с задачами размера $|E|$.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Доказательство

Последовательность $S = [e_1, e_2, \ldots, e_m]$ *— правильная.*
Пр.1 — очевидно.
Пр.2 — т.к. вспомогательный граф — двудольный, то элементы из S *на четных местах входят в* I.
По построению $e_i \in D_{i-1}$ *для четных* i. *Пусть* $e_i \in D_{k-1}$ *для некоторого* $k < i$. *Тогда дуга* (e_k, e_i) *содержится во вспомогательном графе. Это противоречит, что* Q *— очередь. Следовательно, алгоритм находит кратчайшие пути.*
Пр.3 — аналогично.
Т.к. $e_m \in T$, *то* m *— нечетно и* $I + e_m \in \mathfrak{K}$. *Таким образом* $I \oplus S \in \mathfrak{K}$ *и* S *— увеличивающая последовательность.*

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Доказательство (продолжение)

Алгоритм не останавливается, пока I не станет максимально возможным. Пусть L — множество помеченных и U — множество непомеченных элементов из I в конце алгоритма.
Рассмотрим $E_1 = sp_M(U)$, $E_2 = sp_N(L)$.
Каждый элемент множества I принадлежит E_1 или E_2.
Рассмотрим любой элемент e_i из $E \setminus I$. Он принадлежит одному из E_1 или E_2.
Если e_i помечен, значит во время поиска помечали все элементы соответствующего D_i. Поэтому, если e_i добавить к L, то образуется N-цикл, D_i. Т.о. $e_i \in sp_N(L)$.
Если e_i не помечен, тогда должно быть $I + e_i \notin \mathfrak{F}$, иначе была бы пометка 0. Следовательно, $I + e_i$ содержит M-цикл C_i. Но никакой элемент e_j из C_i не мог помечаться, т.к. иначе e_i был бы помечен на следующем шаге по дуге (e_j, e_i). Поэтому при добавлении e_i к U образуется M-цикл. Следовательно, $e_i \in sp_M(U)$.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Доказательство (продолжение)

$E_1 \bigcup E_2 = E$, поэтому $r(E_1, E_2) \geq |J|$ для всех $J \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$.
$r(E_1, E_2) = |L| + |U| = |I|$, поэтому $|I| \geq |J|$ для всех $J \in \mathfrak{K} \bigcap \mathfrak{F}$.
Следовательно, I — максимальное пересечение.
Временная оценка.
Возможно не более $|E|$ увеличений.
При каждом увеличении время уходит на построение D_i или/и C_i. Это можно сделать, применяя алгоритмы $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$ к $I + e_i - e_j$ для каждого $e_j \in E$.
Построение вспомогательного орграфа Q и множества T: $O(|E|^2 C(|E|))$.
Поиск по орграфу: $O(|E|^2)$.

Рекомендуемая литература

- Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985
- Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы построение и анализ, 2-е издание. М.: Изд. дом «Вильямс», 2009