Дискретные задачи принятия решений. Лекция 1. Моделирование с помощью булевых переменных

Екатерина Алексеева

Новосибирский Государственный Университет
Механико-математический факультет
http://math.nsc.ru/~alekseeva/

12 сентября 2012 г.

Предварительное содержание курса

дата	тема
21.02.2012	1. Моделирование с помощью булевых переменных
28.02.2012	2. Анализ качества математических моделей
06.03.2012	3. Задача о покрытии
13.03.2012	4. Задачи размещения производства.
	Квадратичная задача о назначениях
20.03.2012	5. Эвристики
27.03.2012	6. Матроиды
03.04.2012	7. Задача о пересечении матроидов
10.04.2012	8. Рандомизированные алгоритмы
17.04.2012	9. Многокритериальная оптимизация (МО)
24.04.2012	10. МО для дискретных задач

Содержание лекции

Определение

Пример I оптимизационной задачи P (или индивидуальная задача) — это пара (X, f), где

- *X — произвольное множество решений,*
- *$f : X \to \mathbb{R}$ — целевая функция.*

Любое $x \in X$ называется решением, а $f(x)$ — значение целевой функции на решении x.

Определение

Решение x^* называется оптимальным решением для примера $I = (X, f)$, если $f(x^*) \leq (\geq) f(x)$, $\forall x \in X$.

Определение

Задача оптимизации P — это множество всех примеров I задачи P

Определение

Комбинаторной (дискретной) задачей P называется оптимизационная задача, такая что для каждого примера $I = (X, f) \in P$, множество решений X является конечным (или бесконечным счетным).

Пример задачи смешанного целочисленного линейного программирования, MIP

MIP в стандартной форме

- $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{Q}^{m \times p}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$, $f \in \mathbb{Q}^p$

$\min cx + fy$
при ограничениях $Ax + By \geq b$,
$x \geq 0$,
$y \geq 0$, *целые*

- множество решений $X = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \mid x \geq 0, y \geq 0, Ax + By \geq b\}$
- значения целевой функции $f(x,y) = cx + fy$, $\forall (x,y) \in X$

Классификация задач

- задача линейного программирования, LP
  $x \geq 0$,
  $y \geq 0$
- задача булева (или 0—1) программирования
  $x \in \{0, 1\}$,
  $y \in \{0, 1\}$
- задача смешанного булева программирования
  $x \in \{0, 1\}$,
  $y \geq 0$
- задача полностью целочисленного программирования
  $x \geq 0$, целые,
  $y \geq 0$, целые

Замечание

Любая целочисленная переменная x, принимающая значения из отрезка $[0, U]$ может быть представлена в следующем виде

$$x = \sum_{j=0}^{\lfloor log_2 U \rfloor} 2^j x_j$$

Определение

Имликация — логическая связка некоторого условия и следствия из него ("если" , . . . "то")

Правила моделирования

Первое правило моделирования логических отношений

Пусть I *— конечное множество индексов,* $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$ *и* $0 \le y \le 1$. *Тогда импликация если* $x_i = 0$ *для всех* $i \in I$, *то* $y = 0$ *моделируется неравенством*

$$y \le \sum_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Доказательство. Если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $\sum_{i \in I} x_i = 0$ и (1) превращается в $y \le 0$, поскольку $y \ge 0$,то $y = 0$.
Неравенство (1) не порождает никаких лишних ограничений: если $x_i = 1$ для некоторого i, то $1 \le \sum_{i \in I} x_i$ и так как $y \le 1$, то (1) всегда выполнено.

Правила моделирования

Следствие

Пусть $0 \le y \le c$. *Тогда импликация если* $x_i = 0$ *для всех* $i \in I$, *то* $y = 0$ *моделируется неравенством*

$$y \le c \sum_{i \in I} x_i. \tag{2}$$

Пример. Задача размещения производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — стоимость доставки клиенту j из пункта i
- Определить в каких пунктах следует разместить производство, чтобы обслужить всех клиентов с наименьшими суммарными затратами?

Пример. Задача размещения производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из пункта производства } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если в пункте i производство не размещено, то клиент j не обслуживается из i, то есть

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \text{ для каждого } i \in I, j \in J.$$

Следуя правилу 1:

$$y_{ij} \le x_i, \text{ для каждого } i \in I, j \in J.$$

Пример. Задача размещения производства

Математическая модель

$$\min \sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} y_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1, \forall j \in J,$$

$$y_{ij} \leq x_i, \forall i \in I, j \in J,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — удельные затраты на доставку продукции клиенту j из пункта i
  u_i — производственная мощность предприятия i
  b_j — спрос клиента j
- Определить в каких пунктах следует разместить производство, чтобы удовлетворить спрос всех клиентов с наименьшими суммарными затратами?

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$y_{ij} \geq 0$ — количество продукции поставляемое клиенту j из пункта i.

Если в пункте i открыто предприятие, то общее количество продукции, отправленное из него всем клиентам не может быть больше, чем величина u_i, т. е.

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \forall j \in J \text{ и } 0 \leq \sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i$$

В виде неравенства:

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i x_i, \forall i \in I.$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = b_j, \forall j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i x_i, \forall i \in I,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in I,$$

$$y_{ij} \geq 0, \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j
  s_j — максимальное расстояние, которое клиент j согласен преодолеть до магазина
  N_j — множество магазинов, которые клиент j мог бы посещать,
  $N_j := \{i \in I | d_{ij} \leq s_j\}$
  w_i — затраты, связанные с открытием магазина в пункте i
  B — общий бюджет на открытие магазинов
- Требуется обслужить как можно больше клиентов при ограниченном бюджете на открытие магазинов.

Задача о покрытии

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ магазин открыт,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача о покрытии

Переменные y_j и x_i логически связаны:

$$y_j = 1, \text{ тогда и только тогда, когда } x_i = 1 \text{ для некоторого } i \in N_j.$$

То есть

$$\text{если } x_i = 1 \text{ для некоторого } i \in N_j, \text{ то } y_j = 1$$

или

$$\text{если } x_i = 0 \text{ для всех } i \in N_j, \text{ то } y_j = 0.$$

и

$$\text{если } y_j = 1, \text{ то } x_i = 1 \text{ для некоторого } i \in N_j$$

или

$$\text{если } y_j = 0, \text{ то } x_i = 0 \text{ для всех } i \in N_j$$

Задача о покрытии

Следуя правилу 1 получаем:

$$y_j \leq \sum_{i \in N_j} x_i \quad \forall j \in J.$$

$$x_i \leq y_j, \forall i \in N_j, \quad \forall j \in J.$$

Задача о покрытии

Математическая модель

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

при ограничениях

$$y_j \le \sum_{i \in N_j} x_i \quad \forall j \in J.$$

$$x_i \le y_j, \forall i \in N_j, \quad \forall j \in J.$$

$$\sum_{i \in I} w_i x_i \le B,$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Правила моделирования

Второе правило моделирования логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $I_0, I_1 \subseteq I$, $I_0 \cap I_1 = \emptyset$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$, и $y \in \mathbb{R}$, $0 \le y \le 1$. Тогда импликация
если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $x_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 0$
моделируется неравенством

$$y \le \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i). \tag{3}$$

Импликация
если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $x_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 1$
моделируется неравенством

$$(1 - y) \le \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i). \tag{4}$$

Правила моделирования

Второе правило моделирования логических отношений

После приведения подобных неравенства (3) и (4) можно переписать в более компактном виде:

$$\sum_{i \in I_1} x_i - \sum_{i \in I_0} x_i + y \leq |I_1|,$$

$$\sum_{i \in I_1} x_i - \sum_{i \in I_0} x_i - y \leq |I_1| - 1.$$

Пример. Назначение клиента к ближайшему предприятию

В задачах размещения часто необходимо назначить клиентов к ближайшим открытым предприятиям.
Пусть C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к клиенту j ближе, чем предприятие i. Тогда

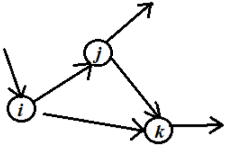
$$\text{если } x_i = 1 \text{ и } x_t = 0 \text{ для всех } t \in C_{ij}, \text{ то } y_{ij} = 1.$$

Применяя второе правило получаем

$$1 - y_{ij} \leq (1 - x_i) + \sum_{t \in C_{ij}} x_t \text{ или } y_{ij} \geq x_i - \sum_{t \in C_{ij}} x_t,$$

где x_i, $y_{ij} \in \{0, 1\}$ (см. задачу UFLP)

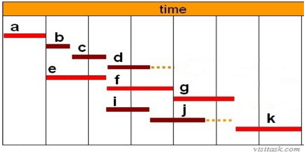
Пример. Моделирование отношения транзитивности



Задан граф $G = (V, E)$

Требуется смоделировать транзитивность отношения связности вершин.
Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть ребро} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$ Для любой тройки вершин $(i, j, k) \in V \times V \times V$ если $x_{ij} = 1$ и $x_{jk} = 1$, то $x_{ik} = 1$.
Следуя правилу 2 получаем линейное неравенство
$(1 - x_{ik}) \leq (1 - x_{ij}) + (1 - x_{jk})$ или $x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)



Очередная работа не может начаться, пока не закончится предыдущая работа

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ выполняется до работы } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad i \neq j$

Можно ограничиться рассмотрением только переменных x_{ij} с $i < j$ и $x_{ii} = 0$.

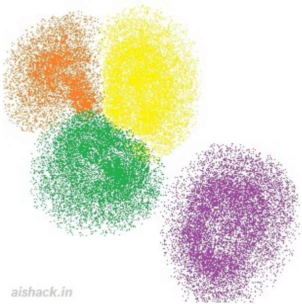
Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

Для каждой тройки работ i, j и k должно выполняться отношение транзитивности.
Убедитесь, что в результате получится следующая система неравенств:

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k$$

$$(1 - x_{ij}) - x_{jk} + x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k$$

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)



В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов I нужно разбить на подмножества.

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объекты } i \text{ и } j \text{ лежат в одном подмножестве} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$ В силу симметричности принадлежности двух объектов одному подмножеству число переменных можно сократить и рассматривать только x_{ij} с $i < j$, $x_{ji} = x_{ij}$, $x_{ii} = 1$.

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

- если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

- если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

- если i и k в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и j, также в одном подмножестве

$$x_{ik} + x_{jk} - x_{ij} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Как выбрать минимум из двух неотрицательных чисел?

$y = min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось

- $$y \leq u_1 \text{ и } y \leq u_2,$$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось

- $$y \leq u_1 \text{ и } y \leq u_2,$$
- $$y \geq u_1 \text{ или } y \geq u_2.$$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
- $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_2 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
- $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_2 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
- W — некоторое большое положительное число.

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

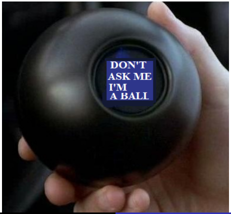
- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$
- $x_1 + x_2 = 1$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

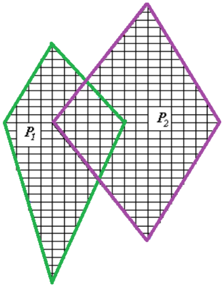
- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$
- $x_1 + x_2 = 1$
- $y \geq u_1 - W(1 - x_1)$
- $y \geq u_2 - W(1 - x_2)$

$y \geq 0,\ x_1, x_2 \in \{0, 1\}$



Моделирование взаимоисключающих событий

Пусть допустимая область образована объединением двух многоугольников P_1 и P_2:



Моделирование взаимоисключающих событий

Многоугольники задаются группой неравенств.

P_1 :

$$2y_1 + y_2 \geq 4$$
$$y_1 - y_2 \geq -4$$
$$-4y_1 + 3y_2 \geq -8$$
$$2y_1 + 3y_2 \leq 22$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

P_2 :

$$3y_1 + 4y_2 \geq 22$$
$$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 39$$
$$y_1 - y_2 \leq 5$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Решение является допустимым, если оно удовлетворяет хотя бы одной группе неравенств P_1 или P_2.
Другими словами из двух групп ограничений нужно, чтобы выполнялась по крайней мере одна группа.

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

Преобразуем ограничения, кроме ограничений на значение переменных, в ограничения со знаком $\leq$ в неравенствах:

P_1 :
$-2y_1 - y_2 \leq -4$
$-y_1 + y_2 \leq 4$
$4y_1 - 3y_2 \leq 8$
$2y_1 + 3y_2 \leq 22$
$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

P_2 :
$-3y_1 - 4y_2 \leq -22$
$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$
$3y_1 + 3y_2 \leq 39$
$y_1 - y_2 \leq 5$
$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

Переменные:

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$
$$x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_2 \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

W — большое положительное число

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$

Моделирование взаимоисключающих событий.
Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leq -22 + W(1 - x_2)$
  $-3y_1 + 4y_2 \leq 10 + W(1 - x_2)$
  $3y_1 + 3y_2 \leq 39 + W(1 - x_2)$
  $y_1 - y_2 \leq 5 + W(1 - x_2)$

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leq -22 + W(1 - x_2)$
  $-3y_1 + 4y_2 \leq 10 + W(1 - x_2)$
  $3y_1 + 3y_2 \leq 39 + W(1 - x_2)$
  $y_1 - y_2 \leq 5 + W(1 - x_2)$
- $x_1 + x_2 \geq 1$
  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$
  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

$$
\begin{array}{ccc}
 & y_1 & y_2 \\
 & \| & \| \\
P_1 : & y_1^1 & y_2^1 \\
 & + & + \\
P_2 : & y_1^2 & y_2^2
\end{array}
$$

Булевы переменные x_1, x_2 как в первом способе.

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$

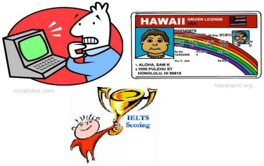
- P_2 :
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geq 22x_2$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leq 10x_2$
  $3y_1^2 + 3y_2^2 \leq 39x_2$
  $y_1^2 - y_2^2 \leq 5x_2$

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$
- P_2 :
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geq 22x_2$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leq 10x_2$
  $3y_1^2 + 3y_2^2 \leq 39x_2$
  $y_1^2 - y_2^2 \leq 5x_2$
- $y_1^1 + y_1^2 = y_1$
  $y_2^1 + y_2^2 = y_2$
  $x_1 + x_2 = 1$
  $y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0$
  $y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0$
  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$
  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

Утверждается, что $P_1 \cup P_2 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда система неравенств разрешима.

Пример. Задача составления расписания



n работ

m машин

Задан порядок выполнения работ на машинах:
работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$,
затем на машине с номером $j(2)$...
В каждый момент времени машина может выполнять не более одной работы, каждая работа выполняется не более, чем на одной машине.
Работы не прерываются.
p_{ij} — длительность выполнения работы j на машине i.
Требуется выполнить все работы и минимизировать сумму времен завершения всех работ.

Пример. Задача составления расписания

Переменные:

$t_{ij} \geq 0$, целые — время начала выполнения работы j на машине i

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } j \text{ предшествует } k \text{ на машине } i, j < k \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример. Задача составления расписания

Если работа j предшествует работе k на машине i, то время начала работы k должно наступить не раньше времени завершения работы j:
$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$, если $x_{ijk} = 1$
и
$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$, если $x_{ijk} = 0$

$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk})$
$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk}$,
где W — большое положительное число

Пример. Задача составления расписания

Каждая работа состоит из операций, выполняемых на разных машинах и $(r+1)$-ая операция работы j не может начаться пока не будет завершена предыдущая r-ая операция, значит
$t_{j(r+1)j} \geq t_{j(r)j} + p_{j(r)j}$

Пример. Задача составления расписания

Математическая модель

$\min \sum_{j=1}^{n} (t_{j(m)j} + p_{j(m)j})$

при ограничениях:

$t_{j(r+1)j} \geq t_{j(r)j} + p_{j(r)j}, r = 1, \ldots, (m-1), j = 1, \ldots, n$

$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk}), i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$

$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk}, i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$

$t_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$

$x_{ijk} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Линеаризация произведения переменных

Пусть$y_{ij} = x_i x_j$, то есть

$$y_{ij} = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } x_i = 1 \text{ и } x_j = 1,$$

другими словами

$$\text{если } y_{ij} = 1, \text{ то } x_i = 1,$$

$$\text{если } y_{ij} = 1, \text{ то } x_j = 1,$$

и

$$\text{если } x_i = 1 \text{ и } x_j = 1, \text{ то } y_{ij} = 1.$$

Линеаризация произведения переменных

Применяя первое и второе правила получаем:

$1 - x_i \leq 1 - y_{ij}$

$1 - x_j \leq 1 - y_{ij}$

$1 - y_{ij} \leq 1 - x_i + 1 - x_j$

Или в более упрощенной форме:

$y_{ij} \leq x_i$

$y_{ij} \leq x_j$

$x_i + x_j - y_{ij} \leq 1$

Пример. Задача о клике

- Дано
  $G = (V, E)$ — неориентированный граф
- Найти максимальный (по количеству вершин) полный подграф, то есть клику.

Простой граф без петель и кратных ребер называется *полным*, если любая пара вершин соединена ребром.

Пример. Задача о клике

Переменные:

$$x_v = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v \text{ входит в подграф} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Задача о клике

Подграф является кликой, тогда и только тогда, когда он не содержит пару вершин, между которыми нет ребра в исходном графе.
То есть

$$\text{если } x_w = 1, \text{ то } x_v = 0, \text{ для } (v, w) \notin E.$$

В виде неравенства:
$x_v \leq 1 - x_w$ для $(v, w) \notin E$

Пример. Задача о клике

Математическая модель

$\max \sum_{v \in V} x_v$

при ограничениях:

$x_v \leq 1 - x_w \quad \forall (v, w) \notin E$

$x_v \in \{0, 1\}, \quad v \in V$

Пример. Задача о клике максимального веса

Нужно знать еще и ребра, входящие в полный подграф.

Дополнительные переменные:

$$y_{vw} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро между вершинами } v \text{ и } w \text{ входит в подграф} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ребро (v, w) из множества E входит в подграф, тогда и только тогда, когда обе вершины v и w входят в подграф. Следовательно, $y_{vw} = x_v x_w$.

Пример. Задача о клике максимального веса

Линеаризация

$y_{vw} = 1,$ *тогда и только тогда, когда*
$x_v = 1$ *и* $x_w = 1$ *для* $(v, w) \in E$

Пример. Задача о клике максимального веса

Линеаризация

$y_{vw} = 1,$ *тогда и только тогда, когда*
$x_v = 1$ *и* $x_w = 1$ *для* $(v, w) \in E$

в виде неравенств:
$1 - y_{vw} \leq 1 - x_v + 1 - x_w, (v, w) \in E$
$y_{vw} \leq x_v, (v, w) \in E$
$y_{vw} \leq x_w, (v, w) \in E$

Линеаризация заменой переменных. Задача размещения с распределенными закупками

- Дано
  I — множество возможных мест для открытия p торговых центров
  J — множество потребителей
  u_{ij} — предпочтение торгового центра i потребителем j
  B_j — бюджет потребителя j
  c_{ij} — удельная прибыль предпринимателя от потраченной потребителем j денежной единицы в магазине i
- Задача предпринимателя — открыть p торговых центров так, чтобы получить максимальную прибыль.

Задача размещения с распределенными закупками

Переменные: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в месте } i \text{ открывается торговый центр} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

$y_{ij} \geq 0$ — сумма, потраченная клиентом j в торговом центре i

Задача размещения с распределенными закупками

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_i = p$$

$$y_{ij} = B_j \frac{u_{ij} x_i}{\sum_{k\in I} u_{kj} x_k}, i \in I, j \in J$$

$$x_i \in \{0, 1\}, y_{ij} \geq 0, i \in I, j \in J$$

Задача размещения с распределенными закупками. Линеаризация модели

Замена переменных
$z_j \geq 0$, $j \in J$

$$z_j = \frac{B_j}{\sum_{k \in I} u_{kj} x_k}$$

Задача размещения с распределенными закупками. Линеаризация модели

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}y_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_i = p$$

$$y_{ij} \le B_j x_i, i \in I, j \in J$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = B_j, j \in J$$

$$y_{ij} \le u_{ij} z_j, i \in I, j \in J$$

$$u_{ij} z_j \le y_{ij} + B_j(1 - x_i), i \in I, j \in J$$

$$y_{ij} \ge 0, z_j \ge 0, x_i \in \{0,1\}, i \in I, j \in J$$

Задача о ценообразовании

- Дано
  I — множество филиалов
  J — множество потребителей
  b_j — бюджет j-го потребителя
  c_{ij} — транспортные затраты от i-го филиала до j-го потребителя
- Задача фирмы назначить такую стоимость продукции в каждом филиале, чтобы получить максимальный суммарный доход от своих филиалов.

Задача о ценообразовании

Переменные:

$p_i \geq 0$ — стоимость продукции в i-м филиале

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый потребитель выбрал } i\text{-ый филиал} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача о ценообразовании

Математическая модель

$$\max \sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in J} x_{ij}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1, \quad j \in J$$

$$\sum_{i \in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \geq 0, \quad j \in J$$

$$\sum_{i \in I} (c_{ij} + p_i) x_{ij} \leq c_{kj} + p_k, \quad k \in I,\ j \in J$$

$$p_i \geq 0, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ j \in J$$

Задача о ценообразовании. Линеаризация модели

Пусть $\overline{p}_i$ — максимально возможная цена в i-ом филиале,
$\overline{p}_i = \max_{j \in J}(b_j - c_{ij})$.
Введем переменные $z_{ij} \geq 0$ — доход, который получает производитель от i-го филиала и j-го потребителя в нем, $z_{ij} = p_i x_{ij}$.

Задача о ценообразовании. Линеаризация модели

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I}(b_j - c_{ij})x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geq 0, \quad j \in J$$

$$c_{kj} + p_k - \sum_{i\in I} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geq 0, \quad k \in I,\ j \in J$$

$$(1 - x_{ij})\overline{p}_i - z_{ij} + p_i \geq 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$(1 - x_{ij})\overline{p}_i + z_{ij} - p_i \geq 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$z_{ij} \leq \overline{p}_i x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leq 1, \quad j \in J$$

$$p_i \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\}, z_{ij} \geq 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

Симметрия в математических моделях

Требуется

разбить конечное множество объектов I на p групп. Каждый объект может попасть только в одну группу.

Симметрия в математических моделях

Необходимо отслеживать количество групп, поэтому переменные

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ попадает в группу } k \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $i \in I$, $k = 1, \ldots, p$.
Ограничение каждый объект должен попасть только в одну группу:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = 1$$

Симметрия в математических моделях

В чем же недостаток?

$I = \{a, b, c, d\}$, $p = 3$

Возможное разбиение $\{a\}$, $\{b, d\}$, $\{c\}$

Но эти решения эквивалентны:

группа 1	*группа 2*	*группа 3*
$\{b,d\}$	$\{a\}$	$\{c\}$
$\{b,d\}$	$\{c\}$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{b,d\}$	$\{c\}$
$\{a\}$	$\{c\}$	$\{b,d\}$
$\{c\}$	$\{b,d\}$	$\{a\}$
$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b,d\}$

Каждому разбиению множества объектов соответствует $(p!)$ *эквивалентных решений!*

Нужно избавиться от перестановочной симметрии!!!

Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества* I *от 1 до* $|I|$.

Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*

Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*
- *в каждой группе найти объект с наименьшим номером,*

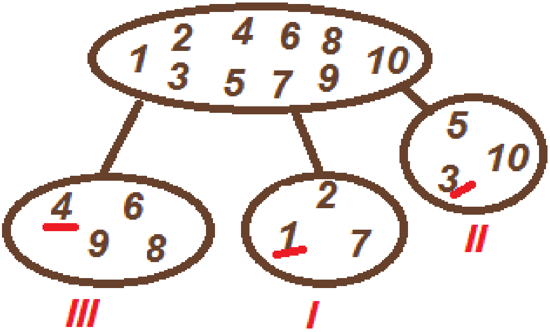
Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*
- *в каждой группе найти объект с наименьшим номером,*
- *упорядочить группы по возрастанию этих номеров и пронумеровать группы от 1 до p согласно полученному порядку.*

Построенное таким образом решение называется ***лексикографически минимальным решением*** *среди эквивалентных ему решений.*

Симметрия в математических моделях. Пример



Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 1.*
  Объект 1 должен лежать в группе 1, то есть $x_{11} = 1$.
  Заметим, что $x_{1k} = 0$, при $k > 1$.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 1.*
  Объект 1 должен лежать в группе 1, то есть $x_{11} = 1$.
  Заметим, что $x_{1k} = 0$, при $k > 1$.
- *Назначения в группу 2.*
  Если объект 2 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2, то есть

$$\text{если } x_{21} = 0, \text{ то } x_{22} = 1.$$

  В виде неравенства:

$$(1 - x_{22}) \leq x_{21}.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2, то есть
  если $x_{21} = 1$ и $x_{31} = 0$, то $x_{32} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1 - x_{32}) \leq (1 - x_{21}) + x_{31}$.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2, то есть
  если $x_{21} = 1$ и $x_{31} = 0$, то $x_{32} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1 - x_{32}) \leq (1 - x_{21}) + x_{31}$.
- Далее, если объекты $2, \dots, (j-1)$ лежат в группе 1 и объект j не лежит в группе 1, тогда объект j должен быть в группе 2, то есть если $x_{i1} = 1$ для всех $i = 2, \dots, (j-1)$ и $x_{j1} = 0$, то $x_{j2} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1 - x_{j2}) \leq \sum_{i=2}^{(j-1)} (1 - x_{i1}) + x_{j1}$.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группы с 3 по* $(p-1)$.
  Объект i может лежать в группе с меньшим номером l $(l < k)$, тогда и только тогда, когда $\sum_{l=1}^{k-1} x_{il} = 1$.
  Чтобы еще неразмещенный ни в одной группе объект j определял следующий номер группы с 3 по $(p-1)$ должно быть выполнено условие:
  если $\sum_{l=1}^{(k-1)} x_{il} = 1$ и $\sum_{l=1}^{(k-1)} x_{jl} = 0$ для всех $i = 2, ..., j-1$,
  то $x_{jk} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1-x_{jk}) \leq \sum_{i=2}^{j-1}(1-\sum_{l=1}^{k-1} x_{il})+\sum_{l=1}^{k-1} x_{jl}, j = k, ..., n, k = 3, ..., (p-1)$
  или
  $\sum_{i=2}^{j-1} \sum_{l=1}^{k-1} x_{il} - \sum_{l=1}^{k} x_{jl} \leq j-3, j = k, ..., n, k = 3, ..., (p-1)$.

Нужны ли переменные x_{ik} с индексами $i < k$?

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу с номером p.*
  Как назначить в последнюю группу? :)

Рекомендованная литература

- Е. В. Алексеева Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи. Учеб. пособие. НГУ: НОВОСИБИРСК, 2011
- Ю. А. Кочетов Курс лекций по теории принятия решений // `http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/or.html`, 2011
- Х. Пападимитриу, К. Стайглиц Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985
- F. Plastria Formulating logical implications in combinatorial optimization // European journal of Operational Research. N. 140. 2002