

Задача о размещении филиалов банка

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество мест (районов, городов, округов), где можно открывать филиалы;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество потенциальных клиентов;

$f_i \geq 0$ — расходы на открытие филиала i .

$c_{ij} \geq 0$ — доход от обслуживания клиента j филиалом i .

$p > 0$ — максимальное число открываемых филиалов.

Найти: подмножество $S \subset I$, $|S| \leq p$, открываемых филиалов, которое дает максимум суммарной прибыли.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если открываем филиал } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается филиалом } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$



Математическая модель

$$\max \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} - \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$z_{ij}, x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J$$

Задача размещения производства

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество районов (городов, областей), где можно открыть производство некоторой продукции;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);

$f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i .

$c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j -го клиента i -м предприятием.

$p > 0$ — максимально возможное число предприятий.



Найти: подмножество предприятий $S \subset I$, $|S| \leq p$, которое позволяет удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$z_{ij}, x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Упражнение. Замена $z_{ij} \in \{0, 1\}$ на $z_{ij} \geq 0$ не меняет минимума суммарных затрат.

Выбор состава системы технических средств

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество типов технических средств;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество видов работ, выполняемых этими техническими средствами;

$f_i \geq 0$ — затраты на разработку и организацию производства технического средства i -го типа;

$g_i \geq 0$ — затраты на производство одного средства i -го типа;

$c_{ij} \geq 0$ — затраты на выполнение одной работы j -го вида техническими средствами i -го типа;

$p_{ij} \geq 1$ — число технических средств i -го типа, необходимых для выполнения одной работы j -го вида;

$\varphi_j \geq 1$ — число работ j -го вида;

$p > 0$ — максимально возможное число типов технических средств в составе системы.



Найти: Состав системы, который позволил бы выполнить все работы с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если включаем в состав системы технические средства } i\text{-го типа} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$v_i \geq 0$, целые — число технических средств i -го типа в составе системы

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работы } j\text{-го вида выполняются техническими средствами } i\text{-го типа} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} \left(f_i x_i + g_i v_i + \sum_{j \in J} \varphi_j c_{ij} z_{ij} \right)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$
$$v_i = \sum_{j \in J} \varphi_j p_{ij} z_{ij}, \quad i \in I;$$
$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$
$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$
$$z_{ij}, x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Упражнение 1. Усовершенствовать модель для случая ненулевого начального состава системы $V_i^0 \geq 0, i \in I$.

Упражнение 2. Построить модель для случая последовательного выполнения работ.

Двухуровневая задача размещения

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество мест, где можно открыть производство некоторой продукции;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);

$f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i .

$c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j -го клиента i -м предприятием.

$p > 0$ — максимально возможное число предприятий.



$d_{ij} \geq 0$ — предпочтения j -го клиента на множестве предприятий:

$\min_{i \in I} d_{ij}$ — наиболее желаемый поставщик;

$\max_{i \in I} d_{ij}$ — наименее желаемый поставщик.

Найти: Подмножество $S \subset I$, $|S| \leq p$, открываемых предприятий, которые позволили бы удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij}^* + \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I,$$

где z_{ij}^* — оптимальное решение задачи потребителя:

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} d_{ij} z_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Квадратичная задача о назначениях

Дано: $I = \{1, \dots, n\}$ — множество зданий, где могут размещаться цеха;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество производственных цехов;

a_{kl} — расстояние между зданиями $k, l \in I$;

b_{ij} — объем продукции, транспортируемый из цеха i в цех j , где $i, j \in J$.



Найти: Размещение цехов по зданиям, при котором суммарный объем перевозок продукции был бы минимальным.

Переменные задачи:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если цех } i \text{ размещается в здании } k, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{l \in I} \sum_{k \in I} a_{kl} b_{ij} x_{ik} x_{jl}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in J} x_{ik} = 1, \text{ для всех } k \in I;$$

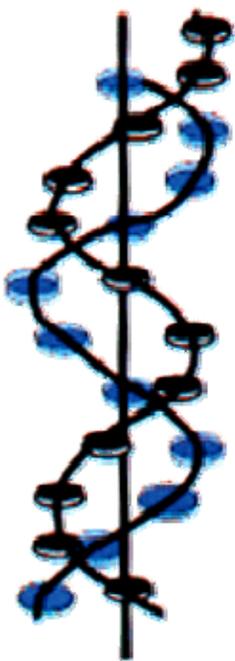
$$\sum_{k \in I} x_{ik} = 1, \text{ для всех } i \in J;$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i \in J, k \in I.$$

Генетический алгоритм для задач размещения

Идея заимствована у живой природы и состоит в организации эволюции, целью которой является получение оптимального решения в сложной комбинаторной задаче:

$$\min \{f(S), S \in Sol\}.$$



Начальная популяция $P = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — набор допустимых решений исходной задачи.

Шаг эволюции: выбираем из популяции два решения, скрещиваем их, применяем мутацию, локальную перестройку и добавляем в популяцию, затем наихудшее решение удаляем из популяции.



Общая схема алгоритма

1. Выбрать начальную популяцию P и запомнить рекорд $F^* = \min_{i=1, \dots, k} f(S_i)$.
2. Пока не выполнен критерий останова делать следующее:
 - 2.1. Выбрать “родителей” S_{i_1}, S_{i_2} из популяции.
 - 2.2. Применить к S_{i_1}, S_{i_2} оператор скрещивания и получить новое решение S' .
 - 2.3. Применить к S' оператор мутации и получить новое решение S'' .
 - 2.4. Применить к S'' оператор локального улучшения и получить новое решение S''' .
 - 2.5. Если $f(S''') < F^*$, то сменить рекорд $F^* := f(S''')$.
 - 2.6. Добавить S''' к популяции и удалить из нее наихудшее решение.

Оператор скрещивания

Пусть S_1, S_2 — два решения, задаваемые векторами $X^1, X^2 \in \{0,1\}^n$.

Одноточечный оператор скрещивания: выбираем случайным образом координату $1 \leq l \leq n$ и новый вектор X' получает первые l координат от вектора X^1 , а остальные от вектора X^2 .

$$\begin{array}{l} X^1: (0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 1 \ . \ . \ . \ 0 \ 1 \ 1) \\ X^2: (1 \ 1 \ 0 \ 1 \mid 0 \ . \ . \ . \ 1 \ 1 \ 1) \\ X': (0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 0 \ . \ . \ . \ 1 \ 1 \ 1) \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_l$

Аналогично определяется двухточечный, трехточечный и т.д. операторы.

Равномерный оператор скрещивания: новое решение X' в каждой координате получает с вероятностью 0.5 значение одного из родителей.

Выбор родителей

Турнирная селекция: из популяции P случайным образом выбирается некоторое подмножество $P' \subseteq P$ и родителем назначается наилучшее решение в P' :

$$S_i = \min_{S \in P'} f(S).$$

Пропорциональная селекция: из популяции P случайным образом выбирают два родителя. Для решения S_i вероятность быть выбранным обратно пропорциональна значению целевой функции $f(S_i)$.

Варианты: Лучший в популяции + случайно выбранный.
Случайно выбранный + наиболее удаленный от него
и др.



Локальное улучшение

Для решения S обозначим через $N(S)$ его окрестность, например, множество всех решений S' , находящихся от S на расстоянии не более 2 (3, 4, 5...)

Алгоритм локального спуска

1. Положить $S := S''$;
2. Найти в окрестности решения S наилучшего соседа \bar{S}

$$f(\bar{S}) = \min\{f(\hat{S}), \hat{S} \in N(S)\};$$

3. Если $f(\bar{S}) < f(S)$, то положить $S := \bar{S}$ и вернуться на шаг 2, иначе STOP, получен локальный минимум.

Задачи размещения в условиях конкуренции

$I = \{1, \dots, m\}$ — множество пунктов размещения;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество клиентов;

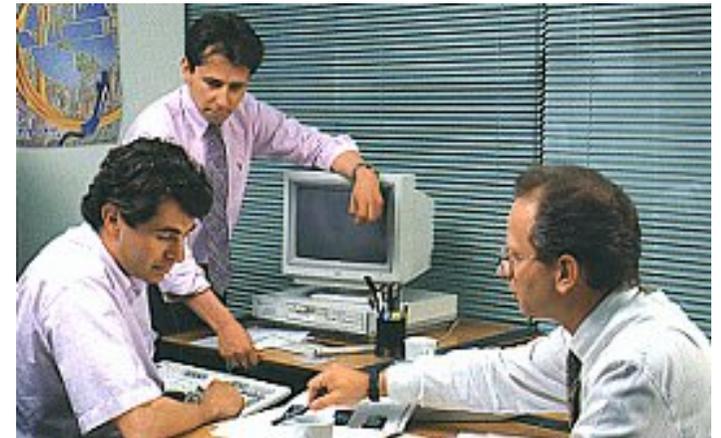
c_{ij} — расстояние от пункта i до клиента j ;

f_i — стоимость открытия предприятия в пункте i для первого ЛПР;

g_i — стоимость открытия предприятия в пункте i для второго ЛПР;

d_j — доход от обслуживания клиента j ;

Сначала ЛПР₁ принимает решение об открытии своих предприятий. Затем, зная это решение, ЛПР₂ открывает свои предприятия так, чтобы получить максимальный доход. Клиент знает оба решения и выбирает ближайшее к себе предприятие. Задача состоит в том, чтобы найти решение для ЛПР₁ с максимальных доходом.



Переменные задачи

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если ЛПР}_1 \text{ открыл предприятие в пункте } i \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если ЛПР}_2 \text{ открыл предприятие в пункте } i \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Для вектора z положим

$I_j(z) = \{i \in I \mid c_{ij} < \min(c_{kj} \mid z_k = 1)\}$ — множество пунктов размещения которые находятся ближе к клиенту j , чем ближайшее открытое предприятие, принадлежащие ЛПР₁.

Математическая модель

$$\max_z \left\{ \sum_{j \in J} d_j \prod_{i \in I_j(z)} x_i^* - \sum_{i \in I} f_i z_i \right\}$$

при ограничениях $z_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$

и x^* — оптимальное решение задачи ЛПР₂:

$$\max_x \left\{ \sum_{j \in J} d_j (1 - \prod_{i \in I_j(z)} x_i) - \sum_{i \in I} g_i (1 - x_i) \right\}$$

при ограничениях $z_i + (1 - x_i) \leq 1$, $i \in I$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$.

Задача ЛПР₂ является экстремальным ограничением в задаче ЛПР₁.

Принятие решений путем голосования

Пусть в районе размещается p школ (больниц, Интернет-центров, ...).

$I = \{1, \dots, m\}$ — множество возможных пунктов размещения;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество клиентов (учащихся, ...);

c_{ij} — матрица предпочтений (расстояний от i до j , чем меньше, тем лучше)

ЛПР₁ выдвигает проект $z_i \in \{0, 1\}$, $\sum_{i \in I} z_i = p$, и хочет получить его одобрение.

ЛПР₂ — оппозиция, которая хочет “провалить” проект Z и выставляет свой проект X , зная проект Z .

Решение принимается голосованием.

Клиент отдает свой голос за тот проект, который ему “ближе”.



Математическая модель

$$\max_z \sum_{j \in J} d_j \prod_{i \in I_j(z)} x_i^*$$

при ограничениях $z_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} z_i = p$,

и x^* — оптимальное решение задачи:

$$\max_x \sum_{j \in J} (1 - \prod_{i \in I_j(z)} x_i)$$

при ограничениях $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} (1 - x_i) = p$.

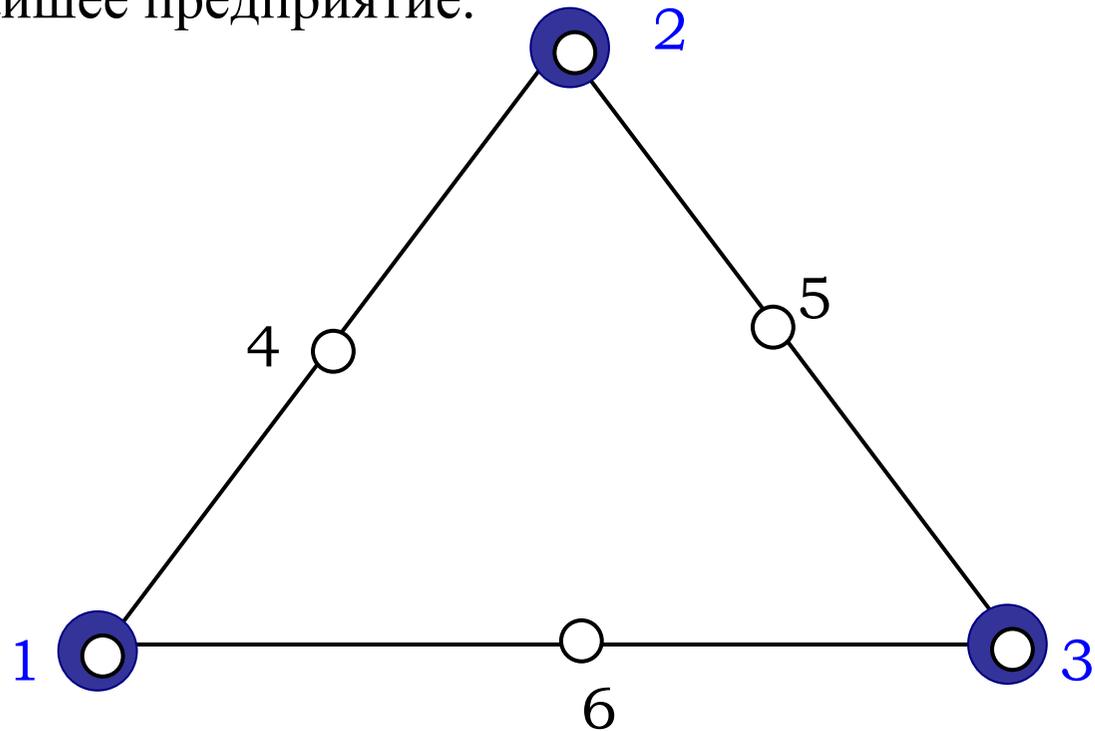
Если ЛПР₁ набрал больше половины голосов, то он “победил”.

«Безнадежный» пример

$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — места размещения предприятий;

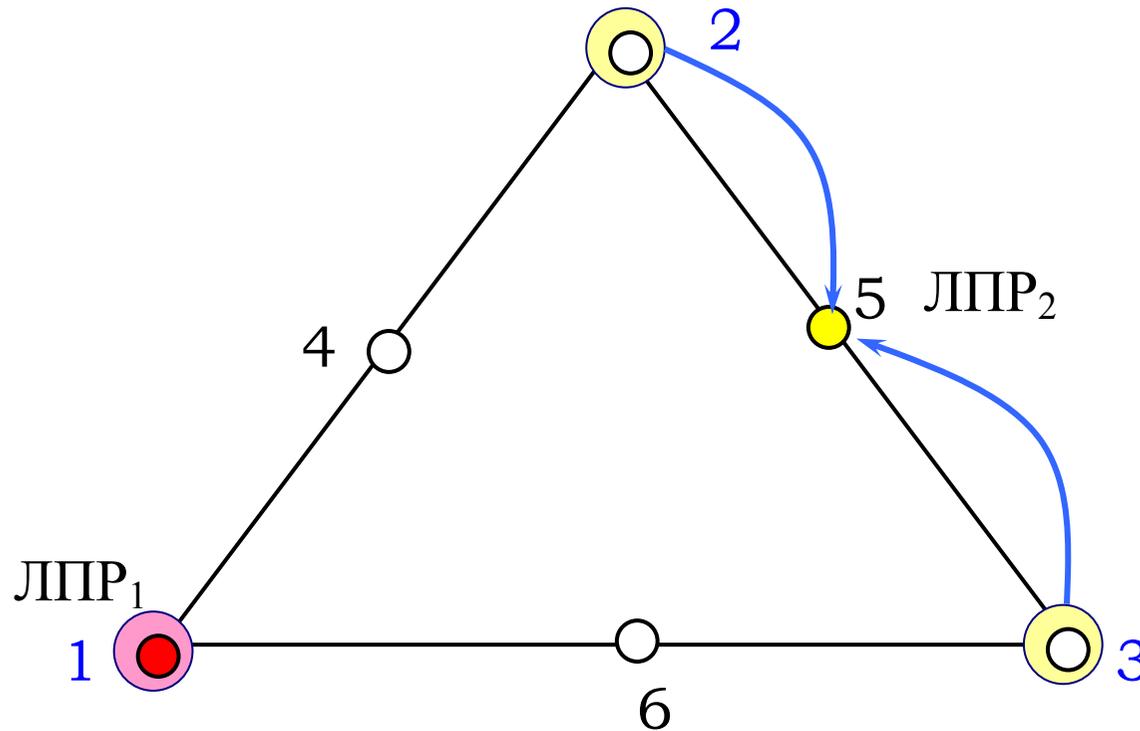
$J = \{1, 2, 3\}$ — клиенты.

Клиенты выбирают ближайшее предприятие.

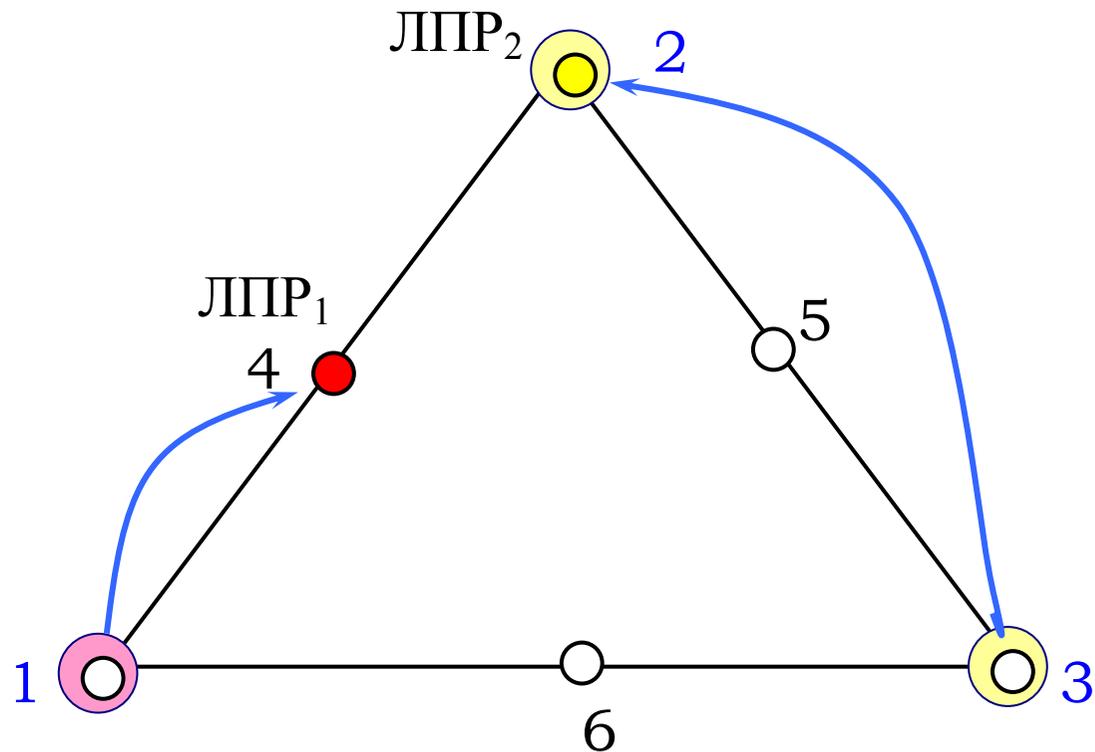


При $p = 1$ ЛПР₁ всегда проигрывает!

Если ЛПР₁ ставит предприятие в вершине треугольника, то ЛПР₂ ставит свое предприятие на противоположной стороне треугольника и захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР₁ получает только одного.



Если ЛПР₁ ставит предприятие на стороне треугольника, то ЛПР₂ ставит свое предприятие в соседней вершине треугольника и тоже захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР₁ получает только одного



Задача о $(r|p)$ -центроиде

$I = \{1, \dots, m\}$ — множество возможных пунктов размещения;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество клиентов;

p — число предприятий размещаемых Лидером

r — число предприятий размещаемых Конкурентом

r_j — доход от обслуживания клиента j

g_{ij} — матрица расстояний от предприятия i до клиента j

Найти: открыть p предприятий Лидера, так чтобы максимизировать его суммарный доход

Задача о $(r|p)$ -центроиде

Переменные задачи

Лидер $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если Лидер открыл предприятие в пункте } i \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Конкурент $y_i = \begin{cases} 1, & \text{если Конкурент открывает в пункте } i, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

Клиенты $u_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается Лидером,} \\ 0, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается Конкурентом.} \end{cases}$

Для заданного решения $x_i, i \in I$ определим множество

$$I_j(x) = \{i \in I \mid g_{ij} < \min_{k \in I} (g_{kj} \mid x_k = 1)\} .$$

Задача о $(r|p)$ -центроиде

Математическая модель

$$\max_x \sum_{j \in J} r_j u_j(x_i, y_i^*)$$

при ограничениях
$$\sum_{i \in I} x_i = p, x_i \in \{0, 1\}, i \in I,$$

где $u = (u_1(x_i, y_i^*), \dots, u_{|J|}(x_i, y_i^*))$ оптимальное решение задачи Конкурента:

$$\max_{u_j, y_i} \sum_{j \in J} r_j (1 - u_j)$$

при ограничениях
$$1 - u_j \leq \sum_{i \in I_j(x)} y_i, j \in J$$

$$\sum_{i \in I} y_i = r$$

$$x_i + y_i \leq 1, i \in I; y_i, u_j \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J$$

http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Competitive/p_med_comp.html

Результаты экспериментов показывают, что при небольших значениях параметра p Лидер проигрывает

$n=m=100, p=r=5, r_j \in (0,200)$		$n=m=50, r=7, r_j = 1$	
пример	доля рынка Лидера (в %)	p	доля рынка Лидера (в %)
111	47,63	1	2
211	45,84	2	6
311	45,08	3	16
411	47,12	4	28
511	44,85	5	36
611	47,10	6	44
711	46,01	7	52
811	46,08	8	58
911	45,21	9	62
1011	48,14	10	66

Дискретные задачи принятия решений. Лекция 6.

