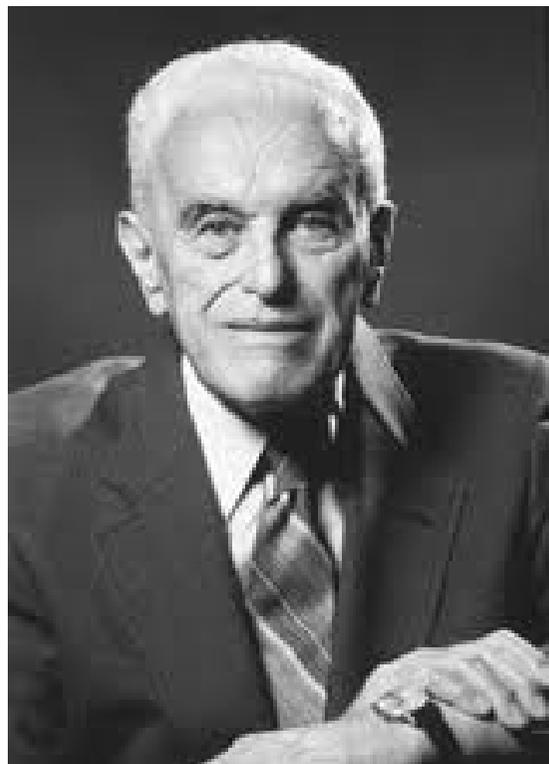


# Введение в матричные игры

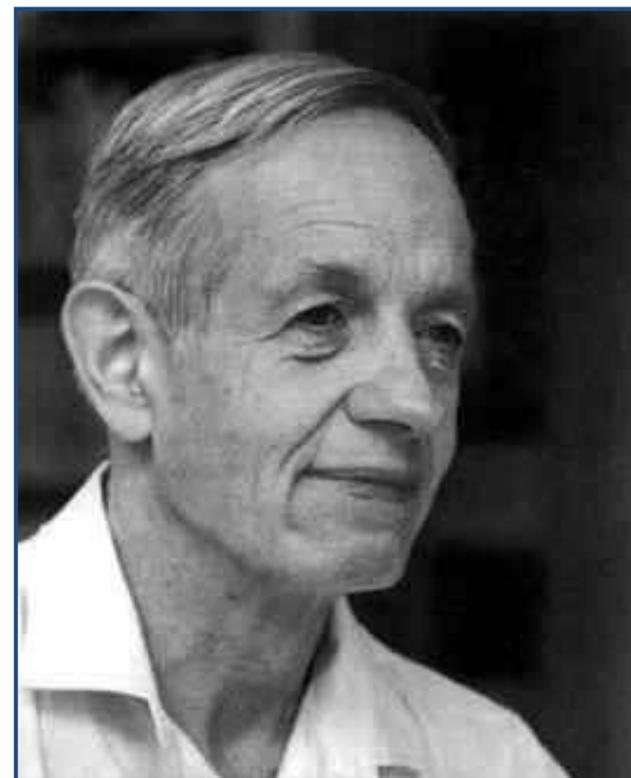
## Три Джона



John von Neumann  
(1903 – 1957)



John Harsanyi  
(1920 – 2000)



John Nash  
(1928)

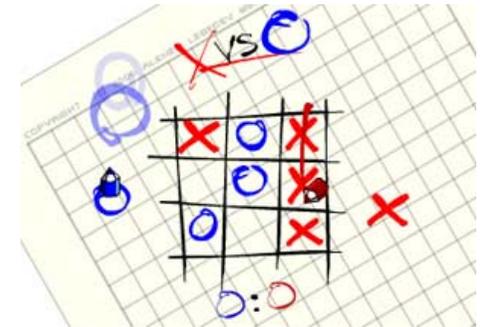
## «Семейный спор»

Муж и жена решают куда пойти в субботу вечером – на футбол или в театр.  
Им небезразлично куда пойдёт другой, но всё-таки, каждому больше хотелось бы пойти на что-то одно...

		стратегии второго игрока (жена)	
		футбол	театр
стратегии первого игрока (мужа)	футбол	5, 4	1, 1
	театр	0, 0	4, 5

На первом месте платеж первого игрока, на втором месте платеж второго

**Предметом исследований** в теории игр являются модели и методы принятия решений в ситуациях, где участвуют несколько сторон (игроков). Цели игроков различны, часто противоположны. Мы будем рассматривать только игры двух лиц с противоположными интересами.



Игра состоит из последовательности *ходов*. Ходы бывают личные и случайные. (В шахматах все ходы личные. Рулетка содержит случайный ход). Результаты ходов оцениваются *функцией выигрыша* для каждого игрока. Если сумма выигрышей равна 0, то игра называется *игрой с нулевой суммой* (преферанс). Будем рассматривать только такие игры.



*Стратегией* называется набор правил, определяющих поведение игрока, т.е. выбор хода.

*Оптимальной стратегией* называют такую стратегию, при которой достигается максимальный ожидаемый средний выигрыш при многократном повторении игры.

**Матричные игры** — это игры, где два игрока играют в игру с нулевой суммой, имея конечное число «чистых» стратегий:  $\{1, \dots, m\}$  и  $\{1, \dots, n\}$  и  $\forall (ij)$  задан платеж  $a_{ij}$  второго игрока первому. Матрица  $(a_{ij})$  задает выигрыш первого игрока и проигрыш второго,  $a_{ij} \geq 0$  !

### Игра в орлянку.

Игроки выбирают ход  $\in \{\text{орел}, \text{решка}\}$ . Если ходы совпали, то выиграл первый, иначе второй.

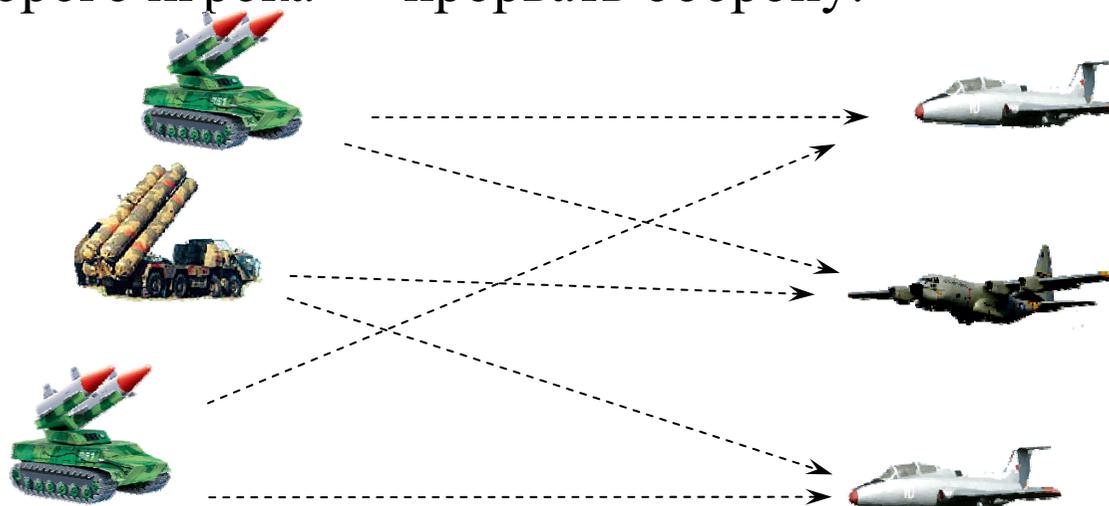


		II игрок	
		орел	решка
I игрок	орел	(1;-1)	(-1;1)
	решка	(-1;1)	(1;1)



**Прорыв обороны.** Первый игрок выбирает систему зенитного вооружения. Второй игрок выбирает самолет. Элементы  $a_{ij}$  задают вероятность поражения самолета  $j$  системой  $i$ . Цель второго игрока — прорвать оборону.

	<i>Самолеты</i>		
<i>Зенитки</i>	0,5	0,6	0,8
	0,9	0,7	0,8
	0,7	0,5	0,6



В первом примере все ходы одинаково плохи или хороши. Во втором примере ход (2, 2) в некотором смысле лучший для обеих сторон: если взять самолет 2, то зенитка 2 — лучшая для первого игрока; если взять зенитку 2, то самолет 2 лучший для второго. В матрице есть седловая точка!

**Определение.** *Седловой точкой* матрицы  $(a_{ij})$  называют пару  $(i_0, j_0)$  такую,

$$\text{что } a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}, \quad \forall ij.$$

## Принцип минимакса (осторожности).

Предположим, что противник всеведущ и угадывает все ходы! Первый игрок предполагает, что второй все знает и для хода  $i$  первого игрока выберет  $j(i)$ :  $a_{ij(i)} \leq a_{ij}, \forall j = 1, \dots, n$ . Обозначим  $\alpha_i = a_{ij(i)} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда лучшей

стратегией для первого игрока является выбор  $i_0$  такой, что

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \alpha_{i_0}.$$

Величину  $\alpha$  назовем *нижней ценой* игры в чистых стратегиях.

Второй игрок из соображений осторожности считает, что первый  $\forall j$  выберет  $i(j)$  так, что  $a_{i(j)j} \geq a_{ij}, \forall i$ , т.е.  $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$  и выбирает  $j$  с минимальным  $\beta_j$ , т.е.

$$\beta = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} = \beta_{j_0}.$$

Величину  $\beta$  назовем *верхней ценой* игры в чистых стратегиях.

**Пример 1.**  $\alpha = -1, \beta = +1, \alpha \leq \beta$

**Пример 2.**  $\alpha = \max_i \{0.5, 0.7, 0.5\} = 0.7, \beta = \min_j \{0.9, 0.7, 0.8\} = 0.7$ .

**Лемма.** Для любой функции  $f(x,y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , справедливо неравенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

в предположении, что эти величины существуют.

**Доказательство.** Введем обозначения:

$$f(x, y(x)) = \min_{y \in Y} f(x, y),$$

$$f(x^*, y(x^*)) = \max_{x \in X} f(x, y(x)).$$

Тогда

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = f(x^*, y(x^*)) = \min_{y \in Y} f(x^*, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$



**Теорема.** Необходимым и достаточным условием равенства верхней и нижней цен игры в чистых стратегиях является существование седловой точки в матрице  $(a_{ij})$ .

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $\alpha = \beta$ . По определению

$$\begin{cases} \alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j_0} \\ \beta = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij_0} \geq a_{i_0 j_0} \end{cases}$$

т.е.  $\alpha \leq a_{i_0 j_0} \leq \beta$ . Так как  $\alpha = \beta$ , то  $a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}$ ,  $\forall ij$ , т.е. является седловой точкой.

*Достаточность.* Пусть седловая точка  $(i_0 j_0)$  существует, т.е.

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда  $\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq \min_j a_{i_0 j} \leq \max_i \min_j a_{ij}$ , но по лемме верно

обратное, т.е.  $\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$ . Следовательно  $\alpha = \beta$ . ■

## Смешанные стратегии и основная теорема матричных игр

**Определение.** Под *смешанной стратегией* будем понимать вероятностное распределение на множестве чистых стратегий.

Смешанная стратегия первого игрока:  $p = (p_1, \dots, p_m)$ ,

$$p \in P_m = \{(p_1, \dots, p_m) \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Смешанная стратегия второго игрока  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,

$$q \in Q_n = \{(q_1, \dots, q_n) \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

При многократном повторении игры игрок выбирает чистые стратегии случайным образом с соответствующими вероятностями.

Платежная функция для смешанных стратегий  $p$  и  $q$ :

$$E(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

задает математическое ожидание выигрыша первого игрока при  $p, q$ .

**Замечание.** Добавлением большой положительной константы можно добиться того, что  $E(p, q) > 0, \forall p, q$  без изменения стратегий.

**Из принципа осторожности:**

Первый игрок ищет максимум  $\alpha(p) = \min_{q \in Q_n} E(p, q)$  и получает нижнюю цену

игры  $\alpha = \max_{p \in P_m} \alpha(p)$ .

Второй игрок ищет минимум  $\beta(q) = \max_{p \in P_m} E(p, q)$  и получает верхнюю цену

игры  $\beta = \min_{q \in Q_n} \beta(q)$ .

### **Теорема Фон–Неймана**

В матричной игре существует пара  $(p^*, q^*)$  смешанных стратегий, таких что

1.  $E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, q), \forall p \in P_m, q \in Q_n$ .
2.  $\alpha = \beta = E(p^*, q^*)$ .

**Доказательство.** Сначала покажем, как представить задачу о выборе наилучших стратегий в виде ЛП, а затем докажем теорему.

Первый игрок:  $\alpha(p) \rightarrow \max$

$$\alpha(p) = \min_{q \in Q_n} E(p, q) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Пусть  $u_i = p_i / \alpha(p)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , в предположении  $\alpha(p) > 0$ .

Тогда  $u_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и  $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq 1$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Заметим, что  $\sum_{i=1}^m u_i = \frac{1}{\alpha(p)}$

и задача  $\alpha(p) \rightarrow \max$  может быть записана следующим образом:

$$\min \sum_{i=1}^m u_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Аналогичным образом получаем задачу второго игрока:

$$\max \sum_{j=1}^n v_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $v_j = q_j / \beta(q)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Полученные задачи являются взаимодвойственными. Пусть  $u_i^*, v_j^*$  — оптимальные решения этих задач.

Положим  $p_i^* = u_i^* / \sum_{i=1}^m u_i^*$ ,  $q_j^* = v_j^* / \sum_{j=1}^n v_j^*$ . Из второй теоремы двойственности

следует, что

$$v_j^* \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* - 1 \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^* - 1 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Просуммировав, получим

$$\sum_{j=1}^n v_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i^* v_j^* = \sum_{i=1}^m u_i^* .$$

Поделим на  $(\sum v_j^*)(\sum u_i^*)$ :

$$E(p^*, q^*) = \frac{1}{\sum v_j^*} = \frac{1}{\sum u_i^*} .$$

Теперь докажем первое утверждение теоремы:

$$E(p, q^*) = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{v_j^*}{\sum v_j^*} \leq \frac{1}{\sum v_j^*} \sum p_i = \frac{1}{\sum v_j^*} .$$

Аналогично

$$E(p^*, q) = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{u_i^*}{\sum u_i^*} \geq \frac{1}{\sum u_i^*} \sum q_j = \frac{1}{\sum u_i^*} .$$

т.е.  $E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, q)$ ,  $\forall p \in P_m, q \in Q_n$ .

Докажем второе утверждение теоремы.

Из предыдущего неравенства имеем:

$$\max_p E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq \min_q E(p^*, q),$$

$$\text{т.е. } \beta = \min_q \max_p \sum_{ij} a_{ij} p_i q_j \leq \max_p \min_q \sum_{ij} a_{ij} p_i q_j = \alpha.$$

Но по лемме  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha = \beta = E(p^*, q^*)$ . ■



## Дилемма заключенных

Два преступника пойманы за совершение преступления. У следствия не хватает доказательств их виновности и преступникам предлагают сделку:

*Если сознаешься и подтвердишь участие товарища в преступлении, то выйдешь на свободу, а товарищ получит 7 лет лишения свободы.*



Преступники сидят в разных камерах и не могут общаться, но они знают, что каждому сделано такое предложение.

Если оба преступника сознаются, то каждый получит 5 лет.

Если оба не сознаются, то каждый получит по 1 году.

## Матричная игра двух лиц

	2-й сознался	2-й не сознался
1-й сознался	5 : 5	0 : 7
1-й не сознался	7 : 0	1 : 1

**Седловая точка** — оба сознаются — существует и дает 5 лет каждому

**Оптимальное решение** — не сознаваться — дает только 1 год.

Оно не является седловой точкой!

Что будет, если дать преступникам посоветаться?

## Игра с ненулевой суммой. Дилемма путешественников

Авиакомпания потеряла багаж двух путешественников. Оба чемодана полностью идентичны. Авиакомпания готова возместить не более \$100 за чемодан. Представитель авиакомпании просит пассажиров оценить стоимость багажа величиной от \$2 до \$100, совещаться и договариваться они не могут. Если пассажиры напишут одинаковую стоимость, им возместят в этом размере. Иначе, стоимость багажа оценивается меньшим числом, и оба получают эту сумму с бонусом или вычетом: тот, кто написал меньшее число, получает на \$2 больше, тот кто написал большее число получает на \$2 меньше.



Что должны написать путешественники?

## Дилемма путешественников

	100	99	98	97	...	3	2
100	100, 100	97, 101	96, 100	95, 99	...	1, 5	0, 4
99	101, 97	99, 99					
98	100, 96		98, 98				
97	99, 95						
...	...						
3	5, 1						
2	4, 0	4, 0	4, 0	4, 0	4, 0	4, 0	2, 2

(2, 2) – равновесие по Нэшу

(100, 100) – оптимальное решение в чистых стратегиях

Упражнение.

У хозяина работает работник. Он может работать хорошо (Х) и сачковать (С). Хозяин может либо проверять его (П), либо нет (Н). Таблица выигрышей:

	Х	С
П	10;2	4;0
Н	10;2	4;3

В игре два равновесия (какие)?

Пусть теперь у хозяина два работника, но проверять он может только одного (а выигрыши складываются для хозяина). Тогда, у него есть два равновесия: проверять первого работника (и тогда первый старается, а второй сачкует) выигрыш хозяина равен 14 или проверять второго. Представим, что хозяин использует смешанную стратегию и с равными вероятностями проверяет того и другого. В этом случае каждый работник будет стараться, и хозяин получит выигрыш 20! Не противоречит ли этот пример замечанию, что смешанная стратегия не может дать больше чистой?