Лекция 1. Моделирование с помощью булевых переменных

Екатерина Вячеславовна Алексеева

Новосибирский Государственный Университет
Факультет Информационных Технологий
http://math.nsc.ru/~alekseeva/

11 февраля, 2012 г.

Предварительное содержание курса

дата	тема
11.02.2012	1. Моделирование с помощью булевых переменных
25.02.2012	2. Анализ качества математических моделей
10.03.2012	3. Матроиды
24.03.2012	4. Пересечение матроидов
07.04.2012	5. Рандомизированные алгоритмы
21.04.2012	6. Многокритериальная оптимизация
05.05.2012	7. Метаэвристики
19.05.2012	8. Двухуровневое программирование

Цель занятий

Цель занятий

- ознакомиться с процессом принятия решений в задачах дискретной оптимизации

Цель занятий

- ознакомиться с процессом принятия решений в задачах дискретной оптимизации
- научиться строить математические модели

Цель занятий

- ознакомиться с процессом принятия решений в задачах дискретной оптимизации
- научиться строить математические модели
- научиться применять и разрабатывать эвристические алгоритмы

Составляющие итоговой оценки

Составляющие итоговой оценки

- Посещаемость лекционных и семинарских занятий.
  $\leq 50\% \Rightarrow$ дополнительный вопрос на экзамене

Составляющие итоговой оценки

- Посещаемость лекционных и семинарских занятий.
  $\leq 50\% \Rightarrow$ дополнительный вопрос на экзамене
- Выполнение проверочных работ (2 лабораторные и 3 контрольные работы)

Составляющие итоговой оценки

- Посещаемость лекционных и семинарских занятий.
  $\leq 50\% \Rightarrow$ дополнительный вопрос на экзамене
- Выполнение проверочных работ (2 лабораторные и 3 контрольные работы)
- Оценка на экзамене

За неудовлетворительный ответ на дополнительный вопрос или невыполнение в течение семестра всех проверочных работ оценка на экзамене понижается на 1 балл

Содержание лекции

Определение

Пример I оптимизационной задачи P (или индивидуальная задача) — это пара (X, f), где

- *X — произвольное множество решений,*
- *$f : X \to \mathbb{R}$ — целевая функция.*

Любое $x \in X$ называется решением, а $f(x)$ — значение целевой функции на решении x.

Определение

Решение x^* называется оптимальным решением для примера $I = (X, f)$, если $f(x^*) \leq (\geq) f(x)$, $\forall x \in X$.

Определение

Задача оптимизации P — *это множество всех примеров* I *задачи* P

Определение

Комбинаторной (дискретной) задачей P *называется оптимизационная задача, такая что для каждого примера* $I = (X, f) \in P$, *множество решений* X *является конечным (или бесконечным счетным).*

Пример задачи смешанного целочисленного линейного программирования, MIP

MIP в стандартной форме

- $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{Q}^{m \times p}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$, $f \in \mathbb{Q}^p$

$\min cx + fy$
при ограничениях $Ax + By \geq b$,
$x \geq 0$,
$y \geq 0$, *целые*

- множество решений
  $X = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \mid x \geq 0, y \geq 0, Ax + By \geq b\}$
- значения целевой функции $f(x, y) = cx + fy$, $\forall (x, y) \in X$

Классификация задач

- задача линейного программирования, LP
  $x \geq 0$,
  $y \geq 0$
- задача булева (или 0—1) программирования
  $x \in \{0, 1\}$,
  $y \in \{0, 1\}$
- задача смешанного булева программирования
  $x \in \{0, 1\}$,
  $y \geq 0$
- задача полностью целочисленного программирования
  $x \geq 0$, целые,
  $y \geq 0$, целые

Замечание

Любая целочисленная переменная x, принимающая значения из отрезка $[0, U]$ может быть представлена в следующем виде

$$x = \sum_{j=0}^{\lfloor log_2 U \rfloor} 2^j x_j$$

Определение

Имликация — логическая связка некоторого условия и следствия из него ("если" , . . . "то")

Правила моделирования

Первое правило моделирования логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$ и $0 \leq y \leq 1$. Тогда импликация если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$ моделируется неравенством

$$y \leq \sum_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Доказательство. Если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $\sum_{i \in I} x_i = 0$ и (1) превращается в $y \leq 0$, поскольку $y \geq 0$,то $y = 0$.
Неравенство (1) не порождает никаких лишних ограничений: если $x_i = 1$ для некоторого i, то $1 \leq \sum_{i \in I} x_i$ и так как $y \leq 1$, то (1) всегда выполнено.

Правила моделирования

Следствие

Пусть $0 \leq y \leq c$. *Тогда импликация если* $x_i = 0$ *для всех* $i \in I$, *то* $y = 0$ *моделируется неравенством*

$$y \leq c \sum_{i \in I} x_i. \tag{2}$$

Пример. Задача размещения производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — стоимость доставки клиенту j из пункта i
- Определить в каких пунктах следует разместить производство, чтобы обслужить всех клиентов с наименьшими суммарными затратами?

Пример. Задача размещения производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из пункта производства } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если в пункте i производство не размещено, то клиент j не обслуживается из i, то есть

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \text{ для каждого } i \in I, j \in J.$$

Следуя правилу 1:

$$y_{ij} \le x_i, \text{ для каждого } i \in I, j \in J.$$

Пример. Задача размещения производства

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, \forall j \in J,$$

$$y_{ij} \le x_i, \forall i \in I, j \in J,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — удельные затраты на доставку продукции клиенту j из пункта i
  u_i — производственная мощность предприятия i
  b_j — спрос клиента j
- Определить в каких пунктах следует разместить производство, чтобы удовлетворить спрос всех клиентов с наименьшими суммарными затратами?

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$y_{ij} \geq 0$ — количество продукции поставляемое клиенту j из пункта i.
Если в пункте i открыто предприятие, то общее количество продукции, отправленное из него всем клиентам не может быть больше, чем величина u_i, т. е.

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \forall j \in J \text{ и } 0 \leq \sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i$$

В виде неравенства:

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i x_i, \forall i \in I.$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = b_j, \forall j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i x_i, \forall i \in I,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in I,$$

$$y_{ij} \geq 0, \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j
  s_j — максимальное расстояние, которое клиент j согласен преодолеть до магазина
  N_j — множество магазинов, которые клиент j мог бы посещать,
  $N_j := \{i \in I | d_{ij} \leq s_j\}$
  w_i — затраты, связанные с открытием магазина в пункте i
  B — общий бюджет на открытие магазинов
- Требуется обслужить как можно больше клиентов при ограниченном бюджете на открытие магазинов.

Задача о покрытии

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ магазин открыт,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача о покрытии

Переменные y_j и x_i логически связаны:

$$y_j = 1, \text{ тогда и только тогда, когда } x_i = 1 \text{ для некоторого } i \in N_j.$$

То есть

$$\text{если } x_i = 1 \text{ для некоторого } i \in N_j, \text{ то } y_j = 1$$

или

$$\text{если } x_i = 0 \text{ для всех } i \in N_j, \text{ то } y_j = 0.$$

и

$$\text{если } y_j = 1, \text{ то } x_i = 1 \text{ для некоторого } i \in N_j$$

или

$$\text{если } y_j = 0, \text{ то } x_i = 0 \text{ для всех } i \in N_j$$

Задача о покрытии

Следуя правилу 1 получаем:

$$y_j \leq \sum_{i \in N_j} x_i \quad \forall j \in J,$$

$$x_i \leq y_j, \forall i \in N_j, \quad \forall j \in J.$$

Задача о покрытии

Математическая модель

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

при ограничениях

$$y_j \leq \sum_{i \in N_j} x_i \quad \forall j \in J.$$

$$x_i \leq y_j, \forall i \in N_j, \quad \forall j \in J.$$

$$\sum_{i \in I} w_i x_i \leq B,$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Правила моделирования

Второе правило моделирования логических отношений

Пусть I *— конечное множество индексов,* $I_0, I_1 \subseteq I$, $I_0 \cap I_1 = \emptyset$, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$, *и* $y \in \mathbb{R}$, $0 \le y \le 1$. *Тогда импликация*
если $x_i = 0$ *для всех* $i \in I_0$ *и* $x_i = 1$ *для всех* $i \in I_1$, *то* $y = 0$
моделируется неравенством

$$y \le \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i). \tag{3}$$

Импликация
если $x_i = 0$ *для всех* $i \in I_0$ *и* $x_i = 1$ *для всех* $i \in I_1$, *то* $y = 1$
моделируется неравенством

$$(1 - y) \le \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i). \tag{4}$$

Правила моделирования

Второе правило моделирования логических отношений

После приведения подобных неравенства (3) и (4) можно переписать в более компактном виде:

$$\sum_{i\in I_1} x_i - \sum_{i\in I_0} x_i + y \leq |I_1|,$$

$$\sum_{i\in I_1} x_i - \sum_{i\in I_0} x_i - y \leq |I_1| - 1.$$

Пример. Назначение клиента к ближайшему предприятию

В задачах размещения часто необходимо назначить клиентов к ближайшим открытым предприятиям.
Пусть C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к клиенту j ближе, чем предприятие i. Тогда

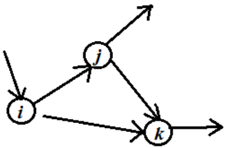
$$\text{если } x_i = 1 \text{ и } x_t = 0 \text{ для всех } t \in C_{ij}, \text{ то } y_{ij} = 1.$$

Применяя второе правило получаем

$$1 - y_{ij} \leq (1 - x_i) + \sum_{t \in C_{ij}} x_t \text{ или } y_{ij} \geq x_i - \sum_{t \in C_{ij}} x_t,$$

где x_i, $y_{ij} \in \{0, 1\}$ (см. задачу UFLP)

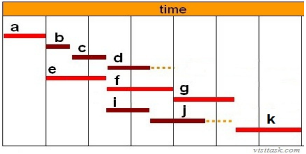
Пример. Моделирование отношения транзитивности



Задан граф $G = (V, E)$

Требуется смоделировать транзитивность отношения связности вершин.
Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть ребро} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$ Для любой тройки вершин $(i, j, k) \in V \times V \times V$ если $x_{ij} = 1$ и $x_{jk} = 1$, то $x_{ik} = 1$.
Следуя правилу 2 получаем линейное неравенство
$(1 - x_{ik}) \leq (1 - x_{ij}) + (1 - x_{jk})$ или $x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)



Очередная работа не может начаться, пока не закончится предыдущая работа

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ выполняется до работы } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad i \neq j$

Можно ограничиться рассмотрением только переменных x_{ij} с $i < j$ и $x_{ii} = 0$.

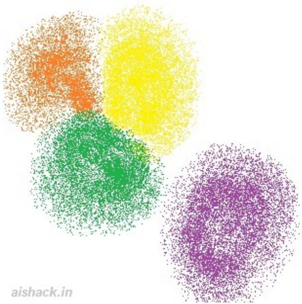
Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

Для каждой тройки работ i, j и k должно выполняться отношение транзитивности.
Убедитесь, что в результате получится следующая система неравенств:

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k$$

$$(1 - x_{ij}) - x_{jk} + x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k$$

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)



В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов I нужно разбить на подмножества.

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объекты } i \text{ и } j \text{ лежат в одном подмножестве} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$ В силу симметричности принадлежности двух объектов одному подмножеству число переменных можно сократить и рассматривать только x_{ij} с $i < j$, $x_{ji} = x_{ij}$, $x_{ii} = 1$.

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

- если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1 \text{ для любых } (i, j, k), i < j < k.$$

Пример. Моделирование отношения эквивалентности (транзитивность и симметричность)

- если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \text{ для любых } (i,j,k), i < j < k.$$

- если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

$$x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1 \text{ для любых } (i,j,k), i < j < k.$$

- если i и k в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и j, также в одном подмножестве

$$x_{ik} + x_{jk} - x_{ij} \leq 1 \text{ для любых } (i,j,k), i < j < k.$$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Как выбрать минимум из двух неотрицательных чисел?

$y = min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось

- $$y \le u_1 \text{ и } y \le u_2,$$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось

- $$y \le u_1 \text{ и } y \le u_2,$$
- $$y \ge u_1 \text{ или } y \ge u_2.$$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
- $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_2 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
- $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_2 \text{ выполняется} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
- W — некоторое большое положительное число.

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

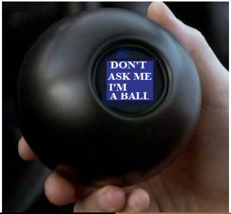
- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$
- $x_1 + x_2 = 1$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$

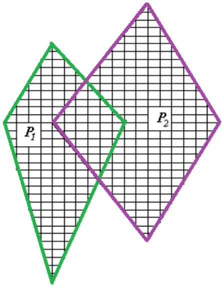
- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$
- $x_1 + x_2 = 1$
- $y \geq u_1 - W(1 - x_1)$
- $y \geq u_2 - W(1 - x_2)$

$y \geq 0,\ x_1, x_2 \in \{0, 1\}$



Моделирование взаимоисключающих событий

Пусть допустимая область образована объединением двух многоугольников P_1 и P_2:



Моделирование взаимоисключающих событий

Многоугольники задаются группой неравенств.

P_1 :
$2y_1 + y_2 \geq 4$
$y_1 - y_2 \geq -4$
$-4y_1 + 3y_2 \geq -8$
$2y_1 + 3y_2 \leq 22$
$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

P_2 :
$3y_1 + 4y_2 \geq 22$
$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$
$3y_1 + 3y_2 \leq 39$
$y_1 - y_2 \leq 5$
$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

Решение является допустимым, если оно удовлетворяет хотя бы одной группе неравенств P_1 или P_2.
Другими словами из двух групп ограничений нужно, чтобы выполнялась по крайней мере одна группа.

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

Преобразуем ограничения, кроме ограничений на значение переменных, в ограничения со знаком $\leq$ в неравенствах:

P_1 :

$$-2y_1 - y_2 \leq -4$$
$$-y_1 + y_2 \leq 4$$
$$4y_1 - 3y_2 \leq 8$$
$$2y_1 + 3y_2 \leq 22$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

P_2 :

$$-3y_1 - 4y_2 \leq -22$$
$$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 39$$
$$y_1 - y_2 \leq 5$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

Переменные:

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_2 \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

W — большое положительное число

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leq -22 + W(1 - x_2)$
  $-3y_1 + 4y_2 \leq 10 + W(1 - x_2)$
  $3y_1 + 3y_2 \leq 39 + W(1 - x_2)$
  $y_1 - y_2 \leq 5 + W(1 - x_2)$

Моделирование взаимоисключающих событий. Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leq -22 + W(1 - x_2)$
  $-3y_1 + 4y_2 \leq 10 + W(1 - x_2)$
  $3y_1 + 3y_2 \leq 39 + W(1 - x_2)$
  $y_1 - y_2 \leq 5 + W(1 - x_2)$
- $x_1 + x_2 \geq 1$
  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$
  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

$$
\begin{array}{lcc}
 & y_1 & y_2 \\
 & \| & \| \\
P_1: & y_1^1 & y_2^1 \\
 & + & + \\
P_2: & y_1^2 & y_2^2
\end{array}
$$

Булевы переменные x_1, x_2 как в первом способе.

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$
- P_2 :
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geq 22x_2$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leq 10x_2$
  $3y_1^2 + 3y_2^2 \leq 39x_2$
  $y_1^2 - y_2^2 \leq 5x_2$

Моделирование взаимоисключающих событий. Второй способ

- $P_1:$
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$
- $P_2:$
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geq 22x_2$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leq 10x_2$
  $3y_1^2 + 3y_2^2 \leq 39x_2$
  $y_1^2 - y_2^2 \leq 5x_2$
- $y_1^1 + y_1^2 = y_1$
  $y_2^1 + y_2^2 = y_2$
  $x_1 + x_2 = 1$
  $y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0$
  $y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0$
  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$
  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

Утверждается, что $P_1 \cup P_2 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда система неравенств разрешима.

Пример. Задача составления расписания

n работ

m машин

Задан порядок выполнения работ на машинах:
работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$,
затем на машине с номером $j(2)$...
В каждый момент времени машина может выполнять не более одной работы, каждая работа выполняется не более, чем на одной машине.
Работы не прерываются.
p_{ij} — длительность выполнения работы j на машине i.
Требуется выполнить все работы и минимизировать сумму времен завершения всех работ.

Пример. Задача составления расписания

Переменные:

$t_{ij} \geq 0$, целые — время начала выполнения работы j на машине i

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } j \text{ предшествует } k \text{ на машине } i, j < k \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример. Задача составления расписания

Если работа j предшествует работе k на машине i, то время начала работы k должно наступить не раньше времени завершения работы j:
$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$, если $x_{ijk} = 1$
и
$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$, если $x_{ijk} = 0$

$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk})$
$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk}$,
где W — большое положительное число

Пример. Задача составления расписания

Каждая работа состоит из операций, выполняемых на разных машинах и $(r+1)$-ая операция работы j не может начаться пока не будет завершена предыдущая r-ая операция, значит
$t_{j(r+1)j} \geq t_{j(r)j} + p_{j(r)j}$

Пример. Задача составления расписания

Математическая модель

$\min \sum_{j=1}^{n} (t_{j(m)j} + p_{j(m)j})$

при ограничениях:

$t_{j(r+1)j} \geq t_{j(r)j} + p_{j(r)j}, r = 1, \ldots, (m-1), j = 1, \ldots, n$

$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk}), i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$

$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk}, i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$

$t_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$

$x_{ijk} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, n$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Линеаризация произведения переменных

Пусть$y_{ij} = x_i x_j$, то есть

$$y_{ij} = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } x_i = 1 \text{ и } x_j = 1,$$

другими словами

$$\text{если } y_{ij} = 1, \text{ то } x_i = 1,$$

$$\text{если } y_{ij} = 1, \text{ то } x_j = 1,$$

и

$$\text{если } x_i = 1 \text{ и } x_j = 1, \text{ то } y_{ij} = 1.$$

Линеаризация произведения переменных

Применяя первое и второе правила получаем:

$1 - x_i \leq 1 - y_{ij}$

$1 - x_j \leq 1 - y_{ij}$

$1 - y_{ij} \leq 1 - x_i + 1 - x_j$

Или в более упрощенной форме:

$y_{ij} \leq x_i$

$y_{ij} \leq x_j$

$x_i + x_j - y_{ij} \leq 1$

Пример. Задача о клике

- Дано
  $G = (V, E)$ — неориентированный граф
- Найти максимальный (по количеству вершин) полный подграф, то есть клику.

Простой граф без петель и кратных ребер называется *полным*, если любая пара вершин соединена ребром.

Пример. Задача о клике

Переменные:

$$x_v = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v \text{ входит в подграф} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Задача о клике

Подграф является кликой, тогда и только тогда, когда он не содержит пару вершин, между которыми нет ребра в исходном графе.
То есть

$$\text{если } x_w = 1, \text{ то } x_v = 0, \text{ для } (v, w) \notin E.$$

В виде неравенства:
$x_v \leq 1 - x_w$ для $(v, w) \notin E$

Пример. Задача о клике

Математическая модель

$\max \sum_{v \in V} x_v$

при ограничениях:

$x_v \leq 1 - x_w \quad \forall (v, w) \notin E$

$x_v \in \{0, 1\}, \quad v \in V$

Пример. Задача о клике максимального веса

Нужно знать еще и ребра, входящие в полный подграф.

Дополнительные переменные:

$$y_{vw} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро между вершинами } v \text{ и } w \text{ входит в подграф} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ребро (v, w) из множества E входит в подграф, тогда и только тогда, когда обе вершины v и w входят в подграф. Следовательно, $y_{vw} = x_v x_w$.

Пример. Задача о клике максимального веса

Линеаризация

$y_{vw} = 1$, *тогда и только тогда, когда*
$x_v = 1$ *и* $x_w = 1$ *для* $(v, w) \in E$

Пример. Задача о клике максимального веса

Линеаризация

$y_{vw} = 1$, *тогда и только тогда, когда*
$x_v = 1$ *и* $x_w = 1$ *для* $(v, w) \in E$

в виде неравенств:
$1 - y_{vw} \leq 1 - x_v + 1 - x_w, (v, w) \in E$
$y_{vw} \leq x_v, (v, w) \in E$
$y_{vw} \leq x_w, (v, w) \in E$

Линеаризация заменой переменных. Задача размещения с распределенными закупками

- Дано
  I — множество возможных мест для открытия p торговых центров
  J — множество потребителей
  u_{ij} — предпочтение торгового центра i потребителем j
  B_j — бюджет потребителя j
  c_{ij} — удельная прибыль предпринимателя от потраченной потребителем j денежной единицы в магазине i
- Задача предпринимателя — открыть p торговых центров так, чтобы получить максимальную прибыль.

Задача размещения с распределенными закупками

Переменные: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в месте } i \text{ открывается торговый центр} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

$y_{ij} \geq 0$ — сумма, потраченная клиентом j в торговом центре i

Задача размещения с распределенными закупками

Математическая модель

$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}$

$\sum_{i \in I} x_i = p$

$y_{ij} = B_j \frac{u_{ij} x_i}{\sum_{k \in I} u_{kj} x_k}, i \in I, j \in J$

$x_i \in \{0, 1\}, y_{ij} \geq 0, i \in I, j \in J$

Задача размещения с распределенными закупками. Линеаризация модели

Замена переменных
$z_j \geq 0$, $j \in J$

$$z_j = \frac{B_j}{\sum_{k \in I} u_{kj} x_k}$$

Задача размещения с распределенными закупками. Линеаризация модели

Математическая модель

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = p$$

$$y_{ij} \leq B_j x_i, i \in I, j \in J$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = B_j, j \in J$$

$$y_{ij} \leq u_{ij} z_j, i \in I, j \in J$$

$$u_{ij} z_j \leq y_{ij} + B_j(1 - x_i), i \in I, j \in J$$

$$y_{ij} \geq 0, z_j \geq 0, x_i \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J$$

Задача о ценообразовании

- Дано
  I — множество филиалов
  J — множество потребителей
  b_j — бюджет j-го потребителя
  c_{ij} — транспортные затраты от i-го филиала до j-го потребителя
- Задача фирмы назначить такую стоимость продукции в каждом филиале, чтобы получить максимальный суммарный доход от своих филиалов.

Задача о ценообразовании

Переменные:

$p_i \geq 0$ — стоимость продукции в i-м филиале

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый потребитель выбрал } i\text{-ый филиал} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача о ценообразовании

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} p_i \sum_{j\in J} x_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le 1, \quad j \in J$$

$$\sum_{i\in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \ge 0, \quad j \in J$$

$$\sum_{i\in I} (c_{ij} + p_i) x_{ij} \le c_{kj} + p_k, \quad k \in I,\ j \in J$$

$$p_i \ge 0, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J$$

Задача о ценообразовании. Линеаризация модели

Пусть $\overline{p}_i$ — максимально возможная цена в i-ом филиале,
$\overline{p}_i = \max_{j\in J}(b_j - c_{ij})$.
Введем переменные $z_{ij} \geq 0$ — доход, который получает производитель от i-го филиала и j-го потребителя в нем, $z_{ij} = p_i x_{ij}$.

Задача о ценообразовании. Линеаризация модели

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I}(b_j - c_{ij})x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geq 0, \quad j \in J$$

$$c_{kj} + p_k - \sum_{i\in I} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geq 0, \quad k \in I,\ j \in J$$

$$(1 - x_{ij})\overline{p}_i - z_{ij} + p_i \geq 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$(1 - x_{ij})\overline{p}_i + z_{ij} - p_i \geq 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$z_{ij} \leq \overline{p}_i x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leq 1, \quad j \in J$$

$$p_i \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\}, z_{ij} \geq 0, \quad i \in I,\ j \in J$$

Симметрия в математических моделях

Требуется

разбить конечное множество объектов I на p групп. Каждый объект может попасть только в одну группу.

Симметрия в математических моделях

Необходимо отслеживать количество групп, поэтому переменные

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ попадает в группу } k \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $i \in I$, $k = 1, \ldots, p$.
Ограничение каждый объект должен попасть только в одну группу:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = 1$$

Симметрия в математических моделях

В чем же недостаток?

$I = \{a, b, c, d\}$, $p = 3$

Возможное разбиение $\{a\}$, $\{b, d\}$, $\{c\}$

Но эти решения эквивалентны:

группа 1	*группа 2*	*группа 3*
$\{b, d\}$	$\{a\}$	$\{c\}$
$\{b, d\}$	$\{c\}$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{b, d\}$	$\{c\}$
$\{a\}$	$\{c\}$	$\{b, d\}$
$\{c\}$	$\{b, d\}$	$\{a\}$
$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b, d\}$

Каждому разбиению множества объектов соответствует $(p!)$ *эквивалентных решений!*

Нужно избавиться от перестановочной симметрии!!!

Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.*

Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*

Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*
- *в каждой группе найти объект с наименьшим номером,*

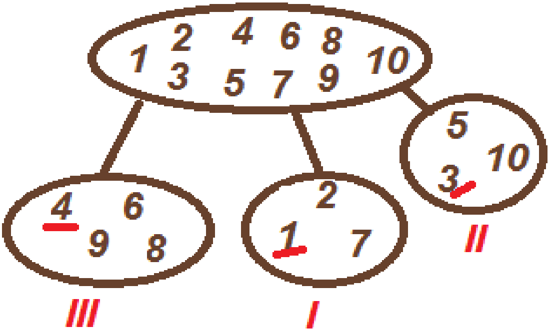
Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- *Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.*
- *Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:*
- *в каждой группе найти объект с наименьшим номером,*
- *упорядочить группы по возрастанию этих номеров и пронумеровать группы от 1 до p согласно полученному порядку.*

*Построенное таким образом решение называется **лексикографически минимальным решением** среди эквивалентных ему решений.*

Симметрия в математических моделях. Пример



Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 1.*
  Объект 1 должен лежать в группе 1, то есть $x_{11} = 1$.
  Заметим, что $x_{1k} = 0$, при $k > 1$.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 1.*
  Объект 1 должен лежать в группе 1, то есть $x_{11} = 1$.
  Заметим, что $x_{1k} = 0$, при $k > 1$.
- *Назначения в группу 2.*
  Если объект 2 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2, то есть

$$\text{если } x_{21} = 0, \text{ то } x_{22} = 1.$$

  В виде неравенства:

$$(1 - x_{22}) \leq x_{21}.$$

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2, то есть
  если $x_{21} = 1$ и $x_{31} = 0$, то $x_{32} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1 - x_{32}) \leq (1 - x_{21}) + x_{31}$.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу 2 (продолжение).*
  Если объект 2 лежит в группе 1 и объект 3 не лежит в группе 1, то он должен лежать в группе 2, то есть
  если $x_{21} = 1$ и $x_{31} = 0$, то $x_{32} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1 - x_{32}) \leq (1 - x_{21}) + x_{31}$.
- Далее, если объекты $2, \ldots, (j-1)$ лежат в группе 1 и объект j не лежит в группе 1, тогда объект j должен быть в группе 2, то есть если $x_{i1} = 1$ для всех $i = 2, \ldots, (j-1)$ и $x_{j1} = 0$, то $x_{j2} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1 - x_{j2}) \leq \sum_{i=2}^{(j-1)} (1 - x_{i1}) + x_{j1}$.

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группы с 3 по* $(p-1)$.
  Объект i может лежать в группе с меньшим номером l $(l < k)$, тогда и только тогда, когда $\sum_{l=1}^{k-1} x_{il} = 1$.
  Чтобы еще неразмещенный ни в одной группе объект j определял следующий номер группы с 3 по $(p-1)$ должно быть выполнено условие:
  если $\sum_{l=1}^{(k-1)} x_{il} = 1$ и $\sum_{l=1}^{(k-1)} x_{jl} = 0$ для всех $i = 2, ..., j-1$,
  то $x_{jk} = 1$.
  В виде неравенства:
  $(1 - x_{jk}) \leq \sum_{i=2}^{j-1}(1 - \sum_{l=1}^{k-1} x_{il}) + \sum_{l=1}^{k-1} x_{jl}, j = k, ..., n, k = 3, ..., (p-1)$
  или
  $\sum_{i=2}^{j-1} \sum_{l=1}^{k-1} x_{il} - \sum_{l=1}^{k} x_{jl} \leq j - 3, j = k, ..., n, k = 3, ..., (p-1).$

Нужны ли переменные x_{ik} с индексами $i < k$?

Симметрия в математических моделях. Назначения в группы

- *Назначения в группу с номером p.*
  Как назначить в последнюю группу? :)

Рекомендуемая литература

- Е. В. Алексеева Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи. Учеб. пособие. НГУ: НОВОСИБИРСК, 2012
- Ю. А. Кочетов Курс лекций по теории принятия решений // `http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/or.html`, 2011
- Х. Пападимитриу, К. Стайглиц Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985
- F. Plastria Formulating logical implications in combinatorial optimization // European journal of Operational Research. N. 140. 2002