Лекция 2.
Анализ качества математических моделей

Екатерина Вячеславовна Алексеева

Новосибирский Государственный Университет
Факультет Информационных Технологий
http://math.nsc.ru/~alekseeva/

25 февраля, 2012 г.

Содержание лекции

MIP в стандартной форме

$$\min(cx + fy) \tag{1}$$

$$Ax + By \geq b, \tag{2}$$

$$x \geq 0, \tag{3}$$

$$y \geq 0, \text{ целые}, \tag{4}$$

$c = (c_1, \dots, c_n)$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ — строки с вещественными компонентами;
$x = (x_1, \dots, x_n)^T$ — столбец с неотрицательными вещественными значениями;
$y = (y_1, \dots, y_p)^T$ — столбец с неотрицательными целочисленными значениями;
A, B – матрицы $(m \times n)$ и $(m \times p)$ соответственно, с рациональными значениями компонент;
$b = (b_1, \dots, b_m)^T$ — столбец с вещественными компонентами.

Обозначения

- X_{MIP} — множество значений переменных, удовлетворяющих ограничениям (2)–(4), *множество допустимых* решений задачи
- $z^*(X_{MIP})$ — оптимальное значение целевой функции (1) на множестве X_{MIP}.

Линейная релаксация

LR (от англ. relaxation — ослабление) для задачи (1)–(4)

$$\min(cx + fy)$$

$$Ax + By \geq b,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

Свойство линейной релаксации

Множество X_{LR} шире допустимого множества X_{MIP}:

$$X_{MIP} \subset X_{LR}.$$

Оптимальное значение целевой функции задачи линейной релаксации дает нижнюю оценку на оптимум соответствующей задачи MIP:

$$z^*(X_{LR}) \leq z^*(X_{MIP}),$$

если исходная задача на минимум, и дает верхнюю оценку, если исходная задача MIP на максимум.

Разрыв целочисленности

Разрыв целочисленности

Величина отклонения оптимального значения линейной релаксации от оптимального значения целевой функции для задачи смешанного целочисленного программирования.

Абсолютный разрыв целочисленности

$$|z^*(X_{LR}) - z^*(X_{MIP})|$$

Относительный разрыв целочисленности

$$\frac{|z^*(X_{LR}) - z^*(X_{MIP})|}{\max\{|z^*(X_{LR})|, |z^*(X_{MIP})|\}} \cdot 100\%.$$

Разрыв целочисленности

Если оптимальные значения не найдены, но получены хорошие приближенные значения для $z^*(X_{LR})$ и $z^*(X_{MIP})$, то вместо разрыва целочисленности вычисляют:

$$\frac{UB - LB}{UB} \cdot 100\%,$$

где UB, LB — верхняя и нижняя оценка оптимального решения соответственно.
$z^*(X_{MIP}) \in [LB, UB]$

Пример 1

P_1:

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$

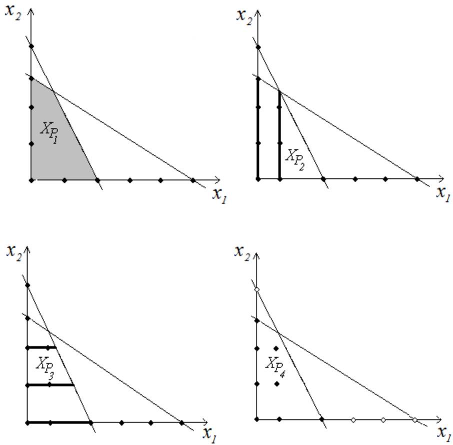
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0, \tag{5}$$

$$x_2 \geq 0. \tag{6}$$

- $P_2 : x_1 \geq 0$, *целые* вместо (5)
- $P_3 : x_2 \geq 0$, *целые* вместо (6)
- $P_4 : x_1 \geq 0$, *целые* и $x_2 \geq 0$, *целые* вместо (5), (6)

Графическое представление допустимых областей для P_1, P_2, P_3 и P_4



Оптимальные решения задач P_1, P_2, P_3 и P_4

$$P_1 : z^*(X_{P_1}) = 3.4211 \quad x^{*P_1} = (1.0526, 2.3684);$$

$$P_2 : z^*(X_{P_2}) = 3.4 \quad x^{*P_2} = (1, 2.4);$$

$$P_3 : z^*(X_{P_3}) = 3.2 \quad x^{*P_3} = (1.2, 2);$$

$$P_4 : z^*(X_{P_4}) = 3 \quad x^{*P_4} = (1, 2).$$

Переходя от решения задачи P_1 с наименее жесткими требованиями к задаче P_4 с более жесткими требованиями, оптимальное значение целевой функции уменьшается:

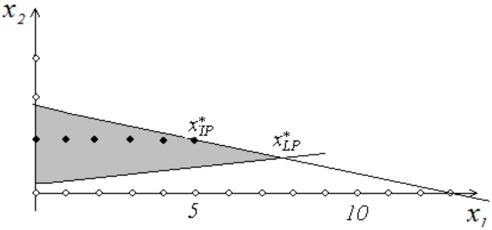
$$z^*(X_{P_4}) < z^*(X_{P_1})$$

Решение x^{*P_4} может быть получено округлением x^{*P_1} вниз.

Пример 2

$$\max(2x_1 + x_2)$$
$$7x_1 + 48x_2 \leq 84,$$
$$-x_1 + 12x_2 \geq 3,$$
$$x_1 \geq 0, \text{ целые},$$
$$x_2 \geq 0, \text{ целые}.$$

Оптимальное решение LP и MIP



$$z^*_{IP} = 11 \quad x^*_{IP} = (5, 1);$$

$$z^*_{LP} = 13.8864 \quad x^*_{LP} = (6.5455, 0.7955);$$

x^*_{IP} нельзя получить простым округлением решения x^*_{LP} Абсолютный разрыв составляет $13.8864 - 11 = 2.8864$,
относительный равен $\frac{2.8864}{13.8864} \cdot 100~\% = 20.79~\%$

Пример 3

$$\max(2x_1 + x_2)$$

$$7x_1 + 48x_2 \leq 84,$$

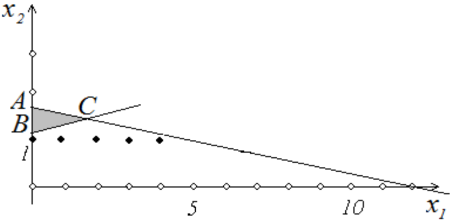
$$-x_1 + 12x_2 \geq 13,$$

$$x_1 \geq 0, \text{ целые},$$

$$x_2 \geq 0, \text{ целые}.$$

Множество допустимых решений

X_{LR} — треугольник ABC
$X_{IP} = \emptyset$



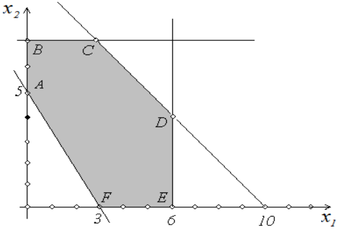
Оптимальное решение задачи LR находится в точке C.
Ни одна целочисленная точка не входит в область ABC.

Пример 4

$$x_1 + x_2 \leq 10,$$
$$5x_1 + 3x_2 \geq 15,$$
$$x_1 \leq 6,$$
$$x_2 \leq 7,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Допустимая область

X_{LP} — многоугольник $ABCDEF$



Оптимальное решение задачи LP лежит в одной из угловых точек $ABCDEF$.
Все угловые точки — целочисленные.
Разрыв целочисленности равен нулю.

Пример. Задача планирования производства

- Дано
  T — промежуток времени,
  d_t — заказ на продукцию в месяц t,
  c_t — затраты на запуск производства в месяц t,
  p_t — удельные затраты на производство в месяц t,
  h_t — удельные затраты на хранение продукции в течение месяца t.
- Найти план производства и хранения продукции так, чтобы выполнить заказ с минимальными затратами.

Пример. Задача планирования производства. Первая модель

Переменные задачи:

y_t — количество продукции, произведенной в месяц t;

s_t — количество продукции, оставленной на складе к концу месяца t;

$$x_t = \begin{cases} 1, & \text{если в месяц } t \text{ было запущено производство,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Задача планирования производства. Первая модель

$$\min \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + p_t y_t + h_t s_t) \tag{7}$$

$$y_1 = d_1 + s_1, \tag{8}$$

$$s_{t-1} + y_t = d_t + s_t,\ \ t = 2, \dots, T, \tag{9}$$

$$y_t \le \sum_{k=1}^{T} d_k x_t,\ \ t = 1, \dots, T, \tag{10}$$

$$s_T = 0, \tag{11}$$

$$y_t \ge 0,\ \ s_t \ge 0,\ \text{целые},\ \ x_t \in \{0, 1\},\ \ t = 1, \dots, T. \tag{12}$$

Пример. Задача планирования производства. Вторая модель

Переменные задачи:
q_{it} — столько продукции производится в месяц i, чтобы выполнить заказ в месяц t, $t \geq i$

$$x_t = \begin{cases} 1, & \text{если в месяц } t \text{ было запущено производство,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Задача планирования производства. Вторая модель

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{t} (p_i + h_i + h_{i+1} + \ldots + h_{t-1}) q_{it} + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{t} q_{it} = d_t, \ t = 1, \ldots, T, \tag{14}$$

$$q_{it} \leq d_t x_i, \ i = 1, \ldots, T, \ t = i, \ldots, T, \tag{15}$$

$$q_{it} \geq 0, \ x_t \in \{0, 1\}, \ t = 1, \ldots, T. \tag{16}$$

Разрыв целочисленности для LR (13)–(16) равен нулю.

Теорема об оценки близости решений IP и соответствующей LR

Пусть A — целочисленная $(m \times n)$-матрица, каждый минор которой по абсолютной величине не превосходит Δ, и пусть даны векторы b и c. Предположим, что оба максимума

$$\max\{cx|Ax \leq b\} \tag{17}$$

и

$$\max\{cx|Ax \leq b, x \in \mathbf{Z}\} \tag{18}$$

конечны. Тогда:
1. Для любого оптимального решения y задачи (17) существует оптимальное решение z задачи (18), для которого $\|y - z\|_\infty \leq n\Delta$.
2. Для любого оптимального решения z задачи (18) существует оптимальное решение y задачи (17), для которого $\|y - z\|_\infty \leq n\Delta$.

Пример. Граница $n\Delta$ не улучшаема

$$A := \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix},$$

$$b := \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$c := (1, \dots, 1)$$

Пример. Граница $n\Delta$ не улучшаема

Следующие векторы являются единственными решениями задач $\max\{cx|Ax \le b\}$ и $\max\{cx|Ax \le b, x \in \mathbf{Z}\}$:

$$y := \begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \\ \vdots \\ n\beta \end{bmatrix}, \; z := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$ и $\|y - z\|_\infty \le n\Delta\beta$, для любого β, $0 \le \beta < 1$

Число ограничений и переменных в модели. Пример

Имеется парк из трех грузовиков и два маршрута, по которым нужно отправить грузовики.
Предполагается, что все грузовики одинаковые.
Требуется назначить грузовики на маршруты.

Пример. Введение переменных. Два способа

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по маршруту } j, \\ 0- & \text{в противном случае,} \end{cases}$ где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$.

В дереве ветвления в худшем случае будет 2^6 вершин.

Пример. Введение переменных. Два способа

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по маршруту } j, \\ 0- & \text{в противном случае,} \end{cases}$ где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$.

  В дереве ветвления в худшем случае будет 2^6 вершин.

- $y_i = \begin{cases} 1, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по 1-му маршруту,} \\ 0, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по 2-му маршруту,} \end{cases}$ где $i \in \{1, 2, 3\}$.

  В дереве ветвления в худшем случае будет 2^3 вершин.

Недостаток: симметрия в решениях

Все грузовики одинаковые, то пара допустимых решений (первый способ)

$$x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{32} = 1 \tag{19}$$

и

$$x_{12} = 1, x_{21} = 1, x_{32} = 1, \tag{20}$$

и пара допустимых решений (второй способ)

$$y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 0 \tag{21}$$

и

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0 \tag{22}$$

по сути, представляют одно и то же назначение грузовиков на маршруты.

Пример. Введение переменных. Третий способ

- n_j — количество грузовиков, отправленных по маршруту j. Решение $n_1 = 1, n_2 = 2$ и решения (19), (20), (21) и (22), по сути — одно и то же назначение грузовиков на маршруты. В модели в три раза меньше переменных.

Многогранники. Правильные неравенства

$$\min fx$$

$$Ax \leq b,$$

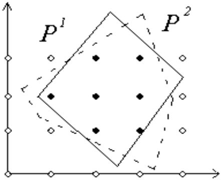
$$x \geq 0, \text{ целые.}$$

X — множество допустимых решений этой задачи.

Определение

Множество точек $P = \{x \in R^n | Ax \leq b\}$, удовлетворяющих конечному числу линейных неравенств называют многогранником.

Многогранники. Два представления



Определение

Многогранник P называют представлением множества допустимых решений X, если X совпадает с целочисленными точками из многогранника, т. е. $X = P \bigcap \boldsymbol{Z}^n$.

Многогранники

Определение

Представление P^1 *лучше* P^2, *если* $P^1 \subset P^2$.

Допустимые целочисленные решения задачи лежат и в P^1, и в P^2.
С точки зрения линейной релаксации допустимая область представления P^2 больше, поэтому разрыв целочисленности с P^1 будет меньше, чем с P^2.
Для задачи на минимум $z^*(X) \geq z^*(P^1) \geq z^*(P^2)$.

Многогранники

Определение

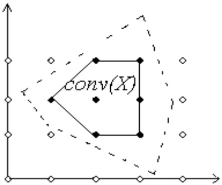
Выпуклой оболочкой множества X *называется множество* $conv(X)$*, состоящее из точек вида* $x = \sum_{i=1}^{T} \lambda_i x^i$*, где* $\sum_{i=1}^{T} \lambda_i = 1$*,* $\lambda_i \geq 0$*,* $i = 1, \ldots, T$*, где* $\{x^1, \ldots, x^T\}$ *все точки из* X*, а* T *— общее число точек в множестве* X*. В этом случае точка* x *является выпуклой комбинацией точек* $\{x^1, \ldots, x^T\}$*.*

Определение

Неравенства, добавление которых не меняет целочисленную допустимую область, называют правильными неравенствами

Многогранники

Выпуклая оболочка $conv(X)$ образует многогранник и является лучшим из возможных представлений для X, разрыв целочисленности равен нулю.



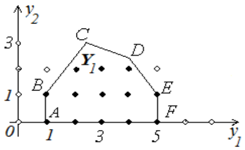
Трудности при поиске переформулировки с $conv(X)$

- заранее неизвестно, как задать $conv(X)$, а ее нахождение является не менее сложной задачей, чем решить исходную задачу MIP;

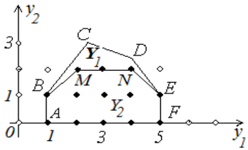
Трудности при поиске переформулировки с $conv(X)$

- заранее неизвестно, как задать $conv(X)$, а ее нахождение является не менее сложной задачей, чем решить исходную задачу MIP;
- для многих задач MIP описание $conv(X)$ требует экспоненциального числа переменных и линейных неравенств, а значит для решения полученной таким образом задачи LP потребуется много времени. С другой стороны, добавление "правильных" ограничений улучшает верхнюю оценку LP и может заметно ускорить время работы алгоритма.

Пример правильных неравенств



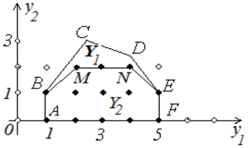
Y_1 :
$y_1 \geq 1,$
$y_1 \leq 5,$
$y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,$
$y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,$
$y_1 + 8y_2 \leq 26,$
$y_1 \geq 0,$ целые,
$y_2 \geq 0,$ целые.



Y_2 :
$y_1 + y_2 \leq 6,$
$y_1 - y_2 \geq 0,$
$y_2 \leq 2,$
$y_1 \geq 0,$
$y_2 \geq 0.$

Пример правильных неравенств

Допустимая область совпадает с $conv(Y_1 \bigcup Y_2)$:



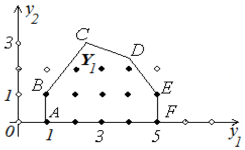
$$
\begin{aligned}
&y_1 \geq 1,\\
&y_1 \leq 5,\\
&y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,\\
&y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,\\
&y_1 + 8y_2 \leq 26,\\
&y_1 + y_2 \leq 6,\\
&y_1 - y_2 \geq 0,\\
&y_2 \leq 2,\\
&y_1 \geq 0, \text{ целые},\\
&y_2 \geq 0, \text{ целые}.
\end{aligned}
$$

Построение правильных неравенств

Под релаксацией множества X понимается любое надмножество Y, такое, что $X \subset Y$.
Тогда любое правильное неравенство для множества Y является правильным неравенством для множества X.
В качестве релаксации можно взять часть неравенств, определяющих область X и ограничения на значения переменных.

Пример построения правильных неравенств

Построить правильное неравенство для:



Y_1 :
$y_1 \geq 1,$
$y_1 \leq 5,$
$y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,$
$y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,$
$y_1 + 8y_2 \leq 26,$
$y_1 \geq 0,$ целые,
$y_2 \geq 0,$ целые.

Пример построения правильных неравенств

Y :

$y_1 \geq 1,$

$y_1 \leq 5,$

$y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,$

$y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,$

$y_1 + 8y_2 \leq 26,$ $\quad \Rightarrow y_2 \leq \lfloor \frac{26}{8} \rfloor = 3$

$y_1 \geq 0,$ целые,

$y_2 \geq 0,$ целые.

$$y_1 + 2.4 \leq 5.8$$
$$\Downarrow$$
$$y_1 \leq \lfloor 3.4 \rfloor$$
$$\Downarrow$$
$$y_1 \leq 3$$
$$\Downarrow$$
$$y_1 + y_2 \leq 6$$

правильное неравенство для Y

$$\Downarrow$$

и для Y_1

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Утверждение

Для любых l и C неравенства

$$\sum_{i \in C} y_i \leq \sum_{i \in C} (\sum_{t=i}^{l} d_t) x_i + s_l, \;\; 1 \leq l \leq T, \;\; C \subseteq \{1, \dots, l\} \qquad (23)$$

являются правильными для задачи (7)–(12).

Доказательство.

Проверим, что добавление неравенств (23) в модель не приводит к потере допустимых решений задачи.

Возьмем допустимое решение (y, s, x) задачи (8) – (12) и покажем, что неравенства (23) выполняются.

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Рассмотрим два случая.

- 1. $x_i = 0$ для любого $i \in C$.
  Тогда $y_i = 0$ для любого $i \in C$ и из (23) получаем, что $s_l \geq 0$.

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Рассмотрим два случая.

- 1. $x_i = 0$ для любого $i \in C$.
  Тогда $y_i = 0$ для любого $i \in C$ и из (23) получаем, что $s_l \geq 0$.
- 2. $x_i = 1$ для некоторого $i \in C$.
  Пусть $k = \min\{i \in C | x_i = 1\}$. Тогда $y_i = 0$ для любого $i < k$
  и $\sum_{i \in C} y_i \leq \sum_{t=k}^{l} y_t = \sum_{t=k}^{l} d_t + s_l - s_{k-1} \leq \sum_{t=k}^{l} d_t + s_l$
  $\leq \sum_{i \in C} (\sum_{t=i}^{l} d_t) x_i + s_l$.

  Что и требовалось доказать.

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Теорема [3]

Выпуклая оболочка множества (8)–(12) задается следующей системой ограничений:

$$y_1 = d_1 + s_1, \tag{24}$$

$$s_{t-1} + y_t = d_t + s_t, \quad t = 2, \dots, T, \tag{25}$$

$$s_T = 0, \tag{26}$$

$$x_t \le 1, \quad t = 1, \dots, T, \tag{27}$$

$$\sum_{i \in C} y_i \le \sum_{i \in C} \Big(\sum_{t=i}^{l} d_t\Big) x_i + s_l \text{ для любого } l, \text{ и } C \ne \emptyset, \tag{28}$$

$$y_t \ge 0, s_t \ge 0, x_t \ge 0, \quad t = 1, \dots, T. \tag{29}$$

Целочисленные решения задачи линейного программирования. Полностью унимодулярная матрица

Определение

Целочисленная матрица $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ называется полностью унимодулярной, если определитель любой ее квадратной подматрицы равен 0 или ± 1.

Является ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

полностью унимодулярной?

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*
- *Матрица (AE), где E — единичная матрица является ПУ.*

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*
- *Матрица (AE), где E — единичная матрица является ПУ.*
- *Матрица, полученная удалением строки (столбца) из матрицы A, является ПУ.*

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица A является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица A^T, является ПУ.*
- *Матрица (AE), где E — единичная матрица является ПУ.*
- *Матрица, полученная удалением строки (столбца) из матрицы A, является ПУ.*
- *Матрица, полученная умножением строки (столбца) матрицы A на (-1), является ПУ.*

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

Следующие утверждения эквиваленты:

- *Матрица* A *является полностью унимодулярной (ПУ).*
- *Матрица* A^T, *является ПУ.*
- *Матрица* (AE), *где* E *— единичная матрица является ПУ.*
- *Матрица, полученная удалением строки (столбца) из матрицы* A, *является ПУ.*
- *Матрица, полученная умножением строки (столбца) матрицы* A *на* (-1), *является ПУ.*
- *Матрица, полученная перестановкой двух строк (столбцов) матрицы* A, *является ПУ.*

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

(продолжение)

- *Матрица, полученная дублированием строк (столбцов) матрицы A, является ПУ.*

Построение полностью унимодулярных матриц

Теорема [3]

(продолжение)

- *Матрица, полученная дублированием строк (столбцов) матрицы A, является ПУ.*
- *Матрица, полученная после выполнения операции замены базисной переменной, является ПУ.*

Достаточное условие того, что матрица A будет ПУ

Утверждение [2]

Матрица A, составленная из 0, 1 или —1, является полностью унимодулярной, если в каждом столбце не более двух ненулевых элементов, и строки матрицы A можно так разбить на два подмножества I_1 и I_2, что для каждого столбца верно следующее:

- *Если два ненулевых элемента имеют одинаковые знаки, то соответствующие им строки лежат в разных множествах.*

Достаточное условие того, что матрица A будет ПУ

Утверждение [2]

Матрица A, составленная из 0, 1 или —1, является полностью унимодулярной, если в каждом столбце не более двух ненулевых элементов, и строки матрицы A можно так разбить на два подмножества I_1 и I_2, что для каждого столбца верно следующее:

- *Если два ненулевых элемента имеют одинаковые знаки, то соответствующие им строки лежат в разных множествах.*
- *Если два ненулевых элемента имеют разные знаки, то соответствующие им строки лежат в одном и том же множестве.*

Пример

Рассмотрим задачу LP в следующем виде:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{30}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \ldots, m \tag{31}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n, m < n. \tag{32}$$

Каким условиям должна удовлетворять матрица $A = (a_{ij})$ и вектор правых частей $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, чтобы все вершины многогранника (31)–(32) были целочисленными?

Пример

Теорема [3]

Пусть целочисленная матрица $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n, m < n$ *имеет ранг* m *и вектор правых частей* $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ *— целочисленный. Для того, чтобы вершины многогранника (31)–(32) лежали в целочисленных точках, необходимо и достаточно, чтобы матрица* A *была ПУ.*

Пример. Транспортная задача.

- Дано:
  m — пунктов производства;
  n — пунктов потребления однородного продукта;
  a_i — объем производства в пункте i, $i = 1, \ldots, m$;
  b_j — объем потребления в пункте j, $j = 1, \ldots, n$;
  $c = (c_{ij})$ — матрица удельных транспортных расходов на перевозку из пункта i в пункт j.
  Производство и потребление сбалансированы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

- Требуется составить план перевозок, который, не нарушая производственные мощности, удовлетворяет все потребности с минимальными суммарными затратами.

Пример. Транспортная задача.

Переменные:
$x_{ij} \geq 0$ — объем перевозок из пункта производства i в пункт потребления j

Пример. Транспортная задача.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

Уточнение значения границ переменных

Пусть $x = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие открыто,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$
$f, f > 0$ — затраты на открытие предприятия.
....
Целевая функция задачи — минимизировать суммарные затраты.

Рассмотрим одно из ограничений:

$y \leq Wx$, *где* $x \in \{0, 1\}$.
Важно ли значение W?

Уточнение значения границ переменных

Пусть $x = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие открыто,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$
$f, f > 0$ — затраты на открытие предприятия.
....
Целевая функция задачи — минимизировать суммарные затраты.

Рассмотрим одно из ограничений:

$y \leq Wx$, *где* $x \in \{0, 1\}$.
Важно ли значение W?

- Если $x \in \{0, 1\}$, то значение W не важно.

Уточнение значения границ переменных

Пусть $x = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие открыто,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$
$f, f > 0$ — затраты на открытие предприятия.
....
Целевая функция задачи — минимизировать суммарные затраты.

Рассмотрим одно из ограничений:

$y \leq Wx$, *где* $x \in \{0, 1\}$.
Важно ли значение W?

- Если $x \in \{0, 1\}$, то значение W не важно.
- Если $x \in [0, 1]$, то значение W важно.

Почему важно значение W:

Пусть W_{max} — максимальное допустимое значение для y, $W_{max} < W$. Если в оптимальном решении $y = W_{max}$, то, учитывая ограничение $y \leq Wx$, получаем, что

$$x = \frac{W_{max}}{W} \text{ и } x < 1.$$

Следовательно, затраты составят $f\frac{W_{max}}{W}$.
Если бы ограничение было записано как $y \leq W_{max}x$, то при $y = W_{max}$ получили бы $x = 1$ и затраты составили бы величину f.

Следовательно, чем грубее значение W по сравнению с W_{max}, тем больше разрыв целочисленности.

Пример. Уточнение границ в задаче планирования производства

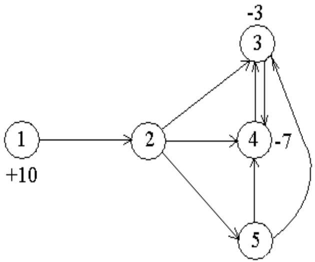
В ограничениях (10) для каждого промежутка времени t вместо грубой оценки

$$\sum_{k=1}^{T} d_k$$

лучше использовать уточненную оценку

$$\sum_{k=t}^{T} d_k.$$

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами



- Дано
  c_{ij} — удельные стоимости перевозки продукции вдоль дуги (i, j),
  h_{ij} — плата за использование дуги (i, j),
  b_i — спрос или предложение в вершине i.
- Требуется доставить 3 и 7 единиц продукции в 3-ю и 4-ю вершины соответственно с минимальными затратами.

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами

Переменные:
$x_{ij} \geq 0$ — величина потока, пропускаемого по дуге (i, j)

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если по дуге } (i,j) \text{ выполняются перевозки,} \\ 0- & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

B — некоторое положительное большое число.

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами

Математическая модель:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij}x_{ij} + h_{ij}y_{ij}),$$

при ограничениях:

$$x_{ij} \leq B y_{ij}, (i,j) \in A,$$

$$\sum_{j\in V} x_{ji} - \sum_{j\in V} x_{ij} = b_i, i \in V,$$

$$x_{ij} \geq 0, (i,j) \in A,$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in A.$$

Пример. Задача о потоке с фиксированными затратами

Вместо

$$x_{ij} \leq By_{ij}, (i, j) \in A,$$

Лучше

$$x_{23} \leq 10y_{23},$$
$$x_{24} \leq 10y_{24},$$
$$x_{25} \leq 10y_{25},$$
$$x_{34} \leq 7y_{34},$$
$$x_{43} \leq 3y_{43},$$
$$x_{54} \leq 10y_{54},$$
$$x_{53} \leq 10y_{53}.$$

Удаление избыточных ограничений

Пусть допустимое множество задается группой линейных неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n.$$

Если $a_j < 0$ для некоторого j, тогда заменой переменной x_j на $(1 - x'_j)$ можно получить эквивалентное ограничение:

$$\sum_{j=1,\ldots,n | a_j > 0} a_j x_j + \sum_{j=1,\ldots,n | a_j < 0} |a_j| x'_j \leq b - \sum_{j=1,\ldots,n | a_j < 0} a_j.$$

Удаление избыточных ограничений

Сведение позволяет без ограничения общности считать, что все $a_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$.
Если $\sum_{j \in N} a_j > b$, для некоторого $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$, то в модель можно ввести дополнительное неравенство

$$\sum_{j \in N} x_j \leq |N| - 1 \qquad (33)$$

или несколько неравенств для каждого $k \in N$, при котором $\sum_{j \in N \setminus \{k\}} a_j \leq b$.

Пример

$$- 3x_2 - 2x_3 \leq -2,$$

$$- 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq -6,$$

$$2x_1 - 2x_2 + 6x_3 \leq 5,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3.$$

Пример

Выполним замену переменных, получим:

$$3x_2' + 2x_3' \leq 3, \tag{34}$$

$$4x_1' + 3x_2' + 3x_3' \leq 4, \tag{35}$$

$$2x_1 + 2x_2' + 6x_3 \leq 7, \tag{36}$$

$$x_1, x_i' \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3. \tag{37}$$

Пример

Из (33) для (34):

$$x_2' + x_3' \leq 1 \text{ или } x_2 + x_3 \geq 1, \tag{38}$$

для (36) получаем

$$x_2' + x_3 \leq 1 \text{ или } x_3 \leq x_2. \tag{39}$$

Объединяя (38) и (39):
$x_2 = 1$ или $x_2' = 0$, и тогда ограничение (62) избыточное, а ограничения (35) и (36) превращаются в

$$4x_1' + 3x_3' \leq 4 \text{ и } 2x_1 + 6x_3 \leq 7.$$

Учитывая (33):

$$x_1' + x_3' \leq 1 \text{ или } x_1 + x_3 \geq 1$$

и

$$x_1 + x_3 \leq 1,$$

следовательно, $x_1 + x_3 = 1$, тогда можно исключить одну из переменных x_1 или x_3.

Таким образом, удается сократить число переменных и ограничений.

Рекомендуемая литература

- Е. В. Алексеева Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи. Учеб. пособие. НГУ: НОВОСИБИРСК, 2012
- Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985
- Nemhauser G. L., Wolsey L. A. Integer and combinatorial optimization. John Wiley & Sons, Inc., 1999