

Лекции 3, 4. Матроиды. Пересечение матроидов

Екатерина Вячеславовна Алексеева

Новосибирский Государственный Университет
Факультет Информационных Технологий
<http://math.nsc.ru/~alekseeva/>

10, 24 марта, 2012 г.

Содержание лекции

Основные определения

Эквивалентные определения

Параметры матроидов

Примеры матроидов

Свойства матроидов

Пересечение двух матроидов

Рекомендуемая литература

Основные определения

Системой подмножеств $S = (E, \mathfrak{F})$ называется пара конечное множество E вместе с семейством \mathfrak{F} подмножеств множества E , замкнутым относительно включения, т.е. если $A \in \mathfrak{F}$ и $A' \subseteq A$, то $A' \in \mathfrak{F}$.

*Элементы семейства \mathfrak{F} называются **независимыми**.*

*Подмножество $D \subseteq E$ не входящее в \mathfrak{F} , называется **зависимым**.*

Комбинаторная задача оптимизации для системы подмножеств $S = (E, \mathfrak{F})$:

Для каждого $e \in E$ задан вес $w(e) \geq 0$.

Требуется найти независимое подмножество, имеющее наибольший общий вес.

"Жадный" алгоритм для матроидов

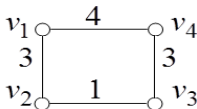
```
begin  
   $I := \emptyset$ ;  
  while  $E \neq \emptyset$  do  
    begin  
      пусть  $e$  — элемент из  $E$  с наибольшим весом;  
      удалить  $e$  из  $E$ ;  
      if  $(I + e) \in \mathfrak{F}$  then  $I := I + e$ ;  
    end;  
  end;
```

Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?

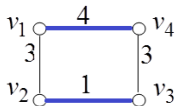
Пример 1.

- ▶ Дано: граф $G = (V, E)$, веса $w(e) \geq 0, \forall e \in E$
- ▶ Найти максимальное взвешенное паросочетание, т.е. подмножество $B \subseteq E$ наибольшего веса так, чтобы никакие два ребра не имели общей вершины.

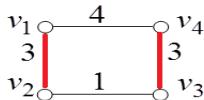
Рис.: Какое оптимальное решение? Какое решение жадного алгоритма?



Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?



Решение жадного алгоритма

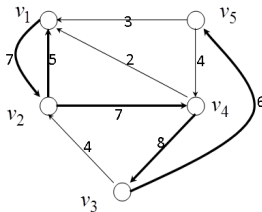


Оптимальное решение

Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?

Пример 2.

- ▶ Дано: оргграф $D = (V, A)$, веса $w(a) \geq 0, \forall a \in A$
- ▶ Найти подмножество $B \subseteq A$ наибольшего веса так, чтобы никакие две дуги из B не имели общего конца.



Оптимальное решение, найденное жадным алгоритмом

Всегда ли жадный алгоритм решает комбинаторную задачу оптимизации?

Пример 3.

- Дано: множество E столбцов матрицы A , \mathfrak{F} — семейство линейно независимых множеств столбцов матрицы A

3	1	3	0	2	1	1	1
0	2	1	1	0	0	1	2
1	1	2	0	1	0	0	0
2	0	0	-1	0	2	1	0
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \in \mathfrak{F}$, $\{e_1, e_4, e_5, e_6\} \notin \mathfrak{F}$

Определение

Система подмножеств $M = (E, \mathfrak{F})$ называется **матроидом**, если жадный алгоритм корректно решает любую индивидуальную комбинаторную задачу оптимизации для системы M .

Эквивалентные определения

Теорема 1

Пусть $M = (E, \mathfrak{F})$ — система подмножеств. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. M — матроид;
2. если $I_p, I_{p+1} \in \mathfrak{F}$, где $|I_p| = p$ и $|I_{p+1}| = p + 1$, то существует такой элемент $e \in I_{p+1} \setminus I_p$, что $I_p \cup e \in \mathfrak{F}$;

Эквивалентные определения

Теорема 1

Пусть $M = (E, \mathfrak{F})$ — система подмножеств. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. M — матроид;
2. если $I_p, I_{p+1} \in \mathfrak{F}$, где $|I_p| = p$ и $|I_{p+1}| = p + 1$, то существует такой элемент $e \in I_{p+1} \setminus I_p$, что $I_p \cup e \in \mathfrak{F}$;
3. если $A \subseteq E$ и I, I' — максимальные по включению подмножества множества A , то $|I| = |I'|$.

Эквивалентные определения

Доказательство

(1) \implies (2):

пусть (2) не выполняется, т.е. \exists множества $I_p, I_{p+1} \in \mathfrak{F}$

$|I_p| = p$ и $|I_{p+1}| = p + 1$ и ни для какого $e \in I_{p+1} \setminus I_p$ подмножество $I_p \cup e \notin \mathfrak{F}$.

Выберем следующие веса на E :

$$w(e) = \begin{cases} p + 2, & e \in I_p \\ p + 1, & e \in I_{p+1} \setminus I_p \\ 0 & e \notin I_{p+1} \cup I_p. \end{cases}$$

Заметим, что I_p не оптимально: жадный алгоритм выберет сначала все элементы I_p , а далее не сможет улучшить вес, т.к. для остальных элементов e либо $I_p \cup e \notin \mathfrak{F}$, либо $w(e) = 0$. Таким образом $w(I_{p+1}) \geq (p + 1)^2 > p(p + 2) = w(I_p)$. Следовательно, M — не матроид, противоречие.

Эквивалентные определения

Доказательство (продолжение)

(2) \implies (3):

пусть (2) выполняется, и пусть I, I' — два максимальных по включению независимых подмножества множества $A \subseteq E$.

Допустим $|I| < |I'|$.

Отбрасывая $|I'| - |I| - 1$ элементов из $|I'|$ можно получить такое $I'' \subseteq I'$, что $|I''| = |I| + 1$.

По (2) можно найти элемент $e \in I'' \setminus I$, что $I \cup e \in \mathfrak{F}$.

Следовательно, I не максимальное по включению независимое подмножество множества A . Противоречие.

Эквивалентные определения

Доказательство (продолжение)

(3) \implies (1):

пусть (3) справедливо для M , покажем, что жадный алгоритм решает для M .

Предположим противное:

для некоторого множества весов $w(e), e \in E$ жадный алгоритм получает

$I = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$,

но \exists множество $J = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_j\} \in \mathfrak{F} \mid w(J) > w(I)$.

Пусть $w(e_1) \geq w(e_2) \dots \geq w(e_i)$ и $w(e'_1) \geq w(e'_2) \dots \geq w(e'_j)$.

J — максимальное по включению независимое подмножество в E ,

I — максимальное по включению независимое подмножество в E (по построению).

Из (3) (при $E = A$) $i = j$.

Покажем, что $\forall m = 1, 2, \dots, i$, выполняется $w(e_m) \geq w(e'_m)$, чтобы получить противоречие с предположением, что $w(J) > w(I)$.

Эквивалентные определения

Доказательство (продолжение)

Индукция по m .

Для $m = 1$ верно. Пусть $w(e_m) < w(e'_m)$ для некоторого $m > 1$ и $w(e_s) \geq w(e'_s)$ для $s = 1, \dots, m-1$.

Рассмотрим $A = \{e \in E, w(e) \geq w(e'_m)\}$.

Множество $\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}$ — максимальное по включению независимое подмножество в A , т.к.

если $\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e\} \in \mathfrak{F}$ и $w(e) \geq w(e'_m) > w(e_m)$, то жадный алгоритм должен был бы вместо e_m выбрать e в качестве следующего элемента множества I , это противоречит (3), т.к. $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ — другое независимое подмножество в A большей мощности. Доказали.

Параметры матроидов

Пусть $M = (E, \mathfrak{F})$ — матроид и $A \subseteq E$.

Ранг $r(A)$ множества A в M

мощность максимальных по включению независимых подмножеств множества A

Базис (база матроида)

максимальные по включению независимые подмножества множества E

Цикл C

минимальное по включению зависимое подмножество C в E

Оболочка множества A , $sp(A)$

максимальное по включению множество S , содержащее A и удовлетворяющее условию $r(S) = r(A)$

Вопросы:

► $\emptyset \in \mathfrak{F}$?

Вопросы:

- ▶ $\emptyset \in \mathfrak{F}$?
- ▶ Пусть B_1, B_2 — базы матроида, что можно сказать про их мощность?

Вопросы:

- ▶ $\emptyset \in \mathfrak{F}$?
- ▶ Пусть B_1, B_2 — базы матроида, что можно сказать про их мощность?
- ▶ Правда ли, что любое максимальное по включению независимое множество в матроиде является также максимальным по числу элементов?

Примеры матроидов

Графический матроид

Граф $G = (V, E)$, \mathfrak{F} — множество лесов графа

$M = (E, \mathfrak{F})$

$E' \subseteq E$

- ▶ Ранг $r(E') = |V| - c(E')$, где $c(E')$ — число связных компонент графа $G' = (V, E')$

Примеры матроидов

Графический матроид

Граф $G = (V, E)$, \mathfrak{F} — множество лесов графа

$M = (E, \mathfrak{F})$

$E' \subseteq E$

- ▶ Ранг $r(E') = |V| - c(E')$, где $c(E')$ — число связных компонент графа $G' = (V, E')$
- ▶ Циклы — циклы графа G

Примеры матроидов

Графический матроид

Граф $G = (V, E)$, \mathfrak{F} — множество лесов графа

$M = (E, \mathfrak{F})$

$E' \subseteq E$

- ▶ Ранг $r(E') = |V| - c(E')$, где $c(E')$ — число связных компонент графа $G' = (V, E')$
- ▶ Циклы — циклы графа G
- ▶ Оболочка $sp(E') = \{[v, u] \in E : v \text{ и } u \text{ лежат в одной и той же компоненте графа } G' = (V, E')\}$

Примеры матроидов

Матроид разбиения

E — конечное множество, $\Pi = \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ — разбиение множества E
 $\cup_{i=1, \dots, p} E_i = E$ и $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$

$I \subseteq E$ — независимое подмножество \iff никакие два элемента из I не
лежат в одном и том же множестве разбиения Π : $I \subseteq E, I \in \mathfrak{F} \iff$

$$|I \cap E_j| \leq 1, j = 1, 2, \dots, p$$

$$M = (E, \mathfrak{F})$$

- ▶ Ранг $r(A) = |J(A)|$, где $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \emptyset\}$

Примеры матроидов

Матроид разбиения

E — конечное множество, $\Pi = \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ — разбиение множества E
 $\cup_{i=1, \dots, p} E_i = E$ и $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$

$I \subseteq E$ — независимое подмножество \iff никакие два элемента из I не лежат в одном и том же множестве разбиения Π : $I \subseteq E, I \in \mathfrak{F} \iff$

$$|I \cap E_j| \leq 1, j = 1, 2, \dots, p$$

$$M = (E, \mathfrak{F})$$

- ▶ Ранг $r(A) = |J(A)|$, где $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \emptyset\}$
- ▶ Цикл — любое множество, состоящее из двух элементов одного и того же E_j

Примеры матроидов

Матроид разбиения

E — конечное множество, $\Pi = \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ — разбиение множества E
 $\cup_{i=1, \dots, p} E_i = E$ и $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$

$I \subseteq E$ — независимое подмножество \iff никакие два элемента из I не лежат в одном и том же множестве разбиения Π : $I \subseteq E, I \in \mathfrak{F} \iff$

$$|I \cap E_j| \leq 1, j = 1, 2, \dots, p$$

$$M = (E, \mathfrak{F})$$

- ▶ Ранг $r(A) = |J(A)|$, где $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \emptyset\}$
- ▶ Цикл — любое множество, состоящее из двух элементов одного и того же E_j
- ▶ Оболочка $sp(A) = \cup_{j \in J(A)} E_j$

Свойства матроидов

Теорема 2

Пусть $I \in \mathfrak{F}$ и $e \in E$. Тогда либо $(I \cup e) \in \mathfrak{F}$, либо $(I \cup e)$ содержит единственный цикл.

Доказательство

- Предположим, что $(I \cup e) \notin \mathfrak{F}$.
Пусть $C = \{c : (I \cup e) \setminus c \in \mathfrak{F}\}$. $C \subseteq (I \cup e)$.
 C — цикл, т.к. C — зависимое подмножество, иначе его можно было бы увеличить до базиса в $(I \cup e)$, мощностью $|I|$ и имел бы вид $(I \cup e) \setminus d$, но тогда $d \in C$;
 C — минимально, т.к. при удалении любого его элемента c , получается подмножество $C \setminus c$, содержащееся в независимом подмножестве $(I \cup e) \setminus c$.

Свойства матроидов

Теорема 2

Пусть $I \in \mathfrak{F}$ и $e \in E$. Тогда либо $(I \cup e) \in \mathfrak{F}$, либо $(I \cup e)$ содержит единственный цикл.

Доказательство

- Предположим, что $(I \cup e) \notin \mathfrak{F}$.
Пусть $C = \{c : (I \cup e) \setminus c \in \mathfrak{F}\}$. $C \subseteq (I \cup e)$.
 C — цикл, т.к. C — зависимое подмножество, иначе его можно было бы увеличить до базиса в $(I \cup e)$, мощностью $|I|$ и имел бы вид $(I \cup e) \setminus d$, но тогда $d \in C$;
 C — минимально, т.к. при удалении любого его элемента c , получается подмножество $C \setminus c$, содержащееся в независимом подмножестве $(I \cup e) \setminus c$.
- Единственность. Пусть D — другой цикл в $(I \cup e)$ и в $C \setminus D$ имеется некоторый элемент c . Тогда $D \subseteq (I \cup e) \setminus c \Rightarrow D$ независимо.

Свойства матроидов

Теорема 3

Любое подмножество $A \subseteq E$ имеет единственную оболочку $sp(A) = \{e : r(A \cup e) = r(A)\}$.

Доказательство

Если S — оболочка подмножества A и $e \in S$, то $r(A \cup e) = r(A)$. Иначе если $r(A \cup e) > r(A)$, то $r(S) \geq r(A \cup e) > r(A)$, противоречие. Следовательно, $S \subseteq sp(A)$. Покажем, что $r(sp(A)) = r(A)$. Общий базис двух множеств является базисом их объединения, поэтому базис множества A — базис в $sp(A)$, т.к. он — базис в $(A \cup e)$ для каждого $e \in sp(A)$.

Свойства матроидов

Следствие 1

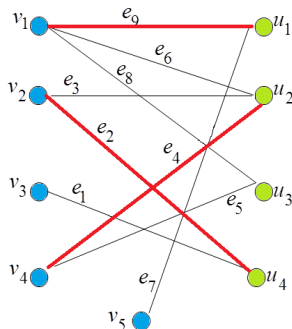
$sp(A)$ является объединением A и всех циклов, все элементы которых, кроме одного, содержатся в A .

Следствие 2

Если $I \in \mathfrak{F}$, $(I \cup e) \notin \mathfrak{F}$, и c принадлежит циклу в $(I \cup e)$, то $sp(I) = sp((I \cup e) \setminus c)$.

Поиск паросочетания в двудольном графе

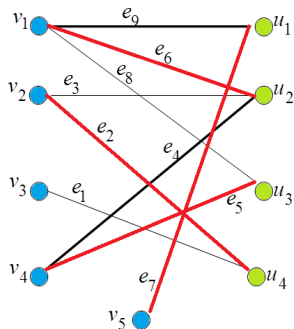
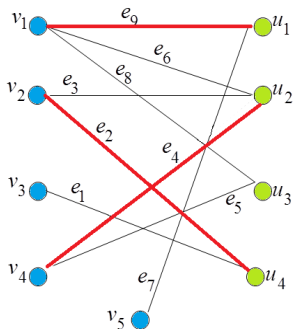
- Дано: двудольный граф $B = (V, U, E)$, веса $w(e) \geq 0, \forall e \in E$.
 Множество \mathfrak{F} паросочетаний в B .



- Является ли пара (E, \mathfrak{F}) матроидом ?

Поиск паросочетания в двудольном графе

- ▶ Не матроид: паросочетание слева максимальное по включению, но не максимальное по числу элементов



Пересечение двух матроидов. Пример

- Но является **пересечением** двух матроидов разбиения $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}$

$$M = (E, \mathfrak{F})$$

определяется разбиением Π_v

$$\Pi_v = \{\{e_9, e_6, e_8\}, \{e_3, e_2\}, \{e_1\}, \\ \{e_4, e_5\}, \{e_7\}\}$$

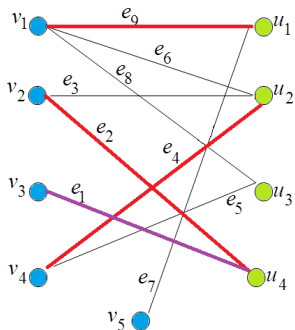
$$N = (E, \mathfrak{K})$$

определяется разбиением Π_u

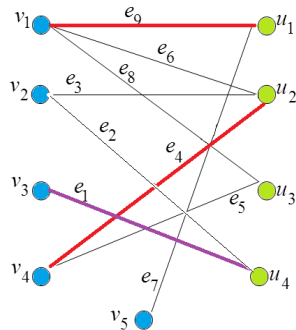
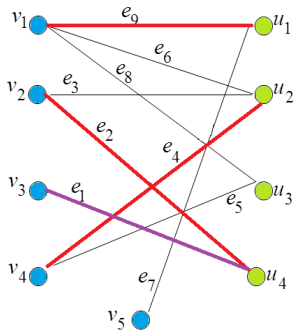
$$\Pi_u = \{\{e_9, e_7\}, \{e_6, e_3, e_4\}, \{e_8, e_5\}, \\ \{e_1, e_2\}\}$$

Подмножество $I \in E$ является паросочетанием \Leftrightarrow независимо в M и в N

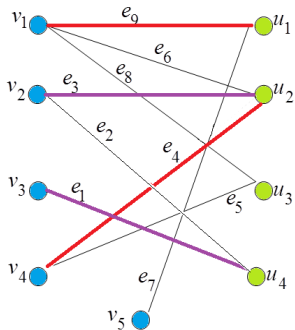
Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь



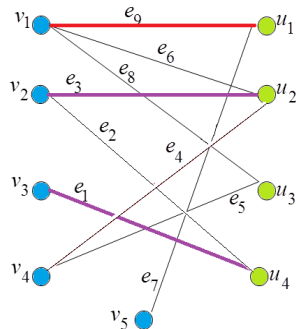
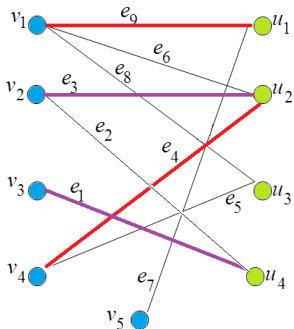
Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь



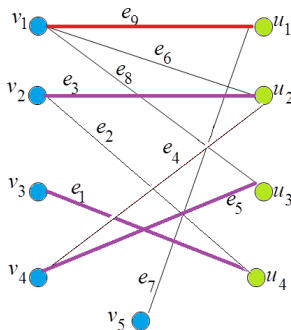
Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь



Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь



Пересечение двух матроидов. Увеличивающий путь



$S = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$ увеличивающий путь для $I = \{e_2, e_4, e_6\}$

$$I \oplus S = I + e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5$$

Увеличивающий путь. Чередующаяся последовательность

Пусть $S = [e_1, e_2, \dots, e_m]$ — последовательность элементов из E
 S_{ij} , $(i \leq j)$ — последовательность $[e_i, e_{i+1}, \dots, e_j]$
 $sp_M(A)(sp_N(A))$ — оболочка множества $A \subseteq E$ в матроиде M (N)
 $r_M(A)(r_N(A))$ — ранг множества $A \subseteq E$ в матроиде M (N)

Последовательность $S = [e_1, e_2, \dots, e_m]$ **чередующаяся** относительно $I \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}$

если выполнены условия

Чер1. $I + e_1 \in \mathfrak{F}$ и $e_1 \notin I$

Чер2. Для любого четного i , $2 \leq i \leq m$ справедливо $e_i \in I$ и $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$

Чер3. Для любого нечетного i , $3 \leq i \leq m$ справедливо $e_i \notin I$ и $sp_M(I \oplus S_{1i}) = sp_M(I + e_1)$

Кроме того, если m нечетно, то $I \oplus S \in \mathfrak{K}$, то S называется **увеличивающей** последовательностью

Увеличивающий путь. Чередующаяся последовательность

Лемма 1

Пусть S — чередующаяся последовательность, тогда

1. $I \oplus S_{1i} \in \mathcal{K}$ для четных i ;
2. $I \oplus S_{1i} \in \mathcal{F}$ для нечетных i .

Доказательство

1. Т.к. $e_i \notin I$ для нечетных i , то $I \oplus S_{1i} \neq I$ для четных i . Т.к. $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$, то I и $I \oplus S_{1i}$ имеют одинаковый ранг в N . Т.к. I независимо, т.е. имеет полный ранг в N , то $I \oplus S_{1i}$ тоже независимо.
2. Аналогично.

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Последовательность $S = [e_1, e_2, \dots, e_m]$ **правильная** относительно $I \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}$

если выполнены условия

Пр1. $I + e_1 \in \mathfrak{F}$ и $e_1 \notin I$

Пр2. Для любого четного i , $2 \leq i \leq m$ справедливо $e_i \in I$ и $e_i \in D_{i-1}$.
 Кроме того, $e_i \notin D_{k-1}$ для любого четного $k < i$.

Пр3. Для любого нечетного i , $3 \leq i \leq m$ справедливо $e_i \notin I$ и $e_{i-1} \in C_i$.
 Кроме того, если m нечетно и $I \oplus S \in \mathfrak{K}$, то S называется **правильной увеличивающей** последовательностью

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Лемма 2

Правильные последовательности являются чередующимися.

Доказательство

Пр.1 \Rightarrow Чер.1 — очевидно.

Пр.3 \Rightarrow Чер.3.

Представим $I \oplus S_{1i}$ для нечетного i в виде $I + e_1 + (e_3 - e_2) + \dots + (e_i - e_{i-1})$. Слагаемым $(e_j - e_{j-1})$ соответствует добавление некоторого элемента к $I \oplus S_{1,j-2}$ (образуется цикл C_j , т.к. $e_{k-1} \notin C_j$ для нечетных $k < j$) и удаление некоторого элемента из этого цикла. По следствию 2 оболочка не изменится, следовательно, $sp_M(I \oplus S_{1i}) = sp_M(I + e_1)$.

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Доказательство (продолжение)

Пр.2 \Rightarrow Чер.2.

для четного i : $I \oplus S_{1i} = I + (e_{i-1} - e_i) + (e_{i-3} - e_{i-2}) + \dots + (e_1 - e_2)$.

Каждая скобка $(e_{j-1} - e_j)$ содержит:

добавление e_{j-1} к $I \oplus S_{j+1,i}$, получается цикл D_{j-1} . $e_k \notin D_{j-1}$ для четных $k > j$;

удаление e_j из D_{j-1} .

В результате $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$.

Причины определения правильных чередующихся последовательностей

- ▶ их можно находить поиском в «статическом» вспомогательном графе;
- ▶ при их использовании сохраняется гарантия, что будет достигнута оптимальность.

Построение вспомогательного орграфа (E, A)

- ▶ множество вершин — множество E ;
для каждого $e_i \in E \setminus I$
- ▶ если $I \cup e_i \notin \mathfrak{F}$, то находим C_i и добавляем к A дугу (e_j, e_i) для каждого $e_j \in C_i \setminus e_i$ в соответствии с Пр.3
- ▶ если $I \cup e_i \notin \mathfrak{K}$, то для каждого e_j из $D_i \setminus e_i$ добавляем к A дугу (e_i, e_j) в соответствии с Пр.2

Построение последовательности по орграфу

- ▶ каждый элемент $e_i \in E \setminus I$ — кандидат на нечет. позиции в правильной чередующейся послед-ти S ;
- ▶ $I \cup e_i \in \mathfrak{F}$, то e_i может быть первым элементом в S
- ▶ любой элемент из $E \setminus I$, такой что $I \cup e_i \in \mathfrak{K}$ может быть последним элементом в S

Достижение любого из этих элементов означает, что найден правильный увеличивающийся путь. (поиском в ширину)

Увеличивающий путь. Правильная последовательность

Лемма 3

$r(E_1, E_2) \geq |J|$, где $E_1 \cup E_2 = E$, $r(E_1, E_2) = r_M(E_1) + r_N(E_2)$, J — произвольное подмножество из $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$.

Доказательство

Пусть $J_1 = E_1 \cap J$, $J_2 = E_2 \cap J$. Так как J_1, J_2 — независимые в E_1, E_2 , то $r(E_1, E_2) = r_M(E_1) + r_N(E_2) \geq |J_1| + |J_2| \geq |J|$.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathcal{R})$, $N = (E, \mathcal{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathcal{R}}$, $A_{\mathcal{F}}$.

Выход. Множество $I \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ максимальной мощности.

- ▶ Begin
- ▶ $I := \emptyset$

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.

Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- ▶ Begin
- ▶ $I := \emptyset$
- ▶ label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.

Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- ▶ Begin
- ▶ $I := \emptyset$
- ▶ label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- ▶ for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
begin

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.

Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- ▶ Begin
- ▶ $I := \emptyset$
- ▶ label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- ▶ for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
 begin
- ▶ if $I + e_i \in \mathfrak{F}, \mathfrak{K}$ then $I := I + e_i$ go to label;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathcal{R})$, $N = (E, \mathcal{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathcal{R}}$, $A_{\mathcal{F}}$.

Выход. Множество $I \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ максимальной мощности.

- ▶ Begin
- ▶ $I := \emptyset$
- ▶ label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- ▶ for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
 begin
- ▶ if $I + e_i \in \mathcal{F}, \mathcal{R}$ then $I := I + e_i$ go to label;
- ▶ if $I + e_i \in \mathcal{F}$ then $Q := Q \cup \{e_i\}$, пометка[e_i] := 0
 else for all $e_j \in C_i - e_i$ do $A := A \cup \{(e_j, e_i)\}$;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathcal{R})$, $N = (E, \mathcal{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathcal{R}}$, $A_{\mathcal{F}}$.

Выход. Множество $I \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ максимальной мощности.

- ▶ Begin
- ▶ $I := \emptyset$
- ▶ label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- ▶ for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
 begin
 - ▶ if $I + e_i \in \mathcal{F}, \mathcal{R}$ then $I := I + e_i$ go to label;
 - ▶ if $I + e_i \in \mathcal{F}$ then $Q := Q \cup \{e_i\}$, пометка[e_i] := 0
 else for all $e_j \in C_i - e_i$ do $A := A \cup \{(e_j, e_i)\}$;
 - ▶ if $I + e_i \in \mathcal{R}$ then $T := T \cup \{e_i\}$
 else for all $e_j \in D_i - e_i$ do $A := A \cup \{(e_i, e_j)\}$;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход. Матроиды $M = (E, \mathfrak{K})$, $N = (E, \mathfrak{F})$ заданные алгоритмами $A_{\mathfrak{K}}$, $A_{\mathfrak{F}}$.

Выход. Множество $I \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}$ максимальной мощности.

- ▶ Begin
- ▶ $I := \emptyset$
- ▶ label: $A := \emptyset$, $Q := \emptyset$, $T := \emptyset$;
- ▶ for all $e_i \in (E \setminus I)$ do
 - begin
 - ▶ if $I + e_i \in \mathfrak{F}, \mathfrak{K}$ then $I := I + e_i$ go to label;
 - ▶ if $I + e_i \in \mathfrak{F}$ then $Q := Q \cup \{e_i\}$, пометка[e_i] := 0
 - else for all $e_j \in C_i - e_i$ do $A := A \cup \{(e_j, e_i)\}$;
 - ▶ if $I + e_i \in \mathfrak{K}$ then $T := T \cup \{e_i\}$
 - else for all $e_j \in D_i - e_i$ do $A := A \cup \{(e_i, e_j)\}$;
- ▶ end;

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- ▶ while $Q \neq \emptyset$ do
- ▶ begin
 - пусть $e \in Q$

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- ▶ while $Q \neq \emptyset$ do
- ▶ begin
- ▶ пусть $e \in Q$
- ▶ удалить e из Q (Q — очередь);

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- ▶ while $Q \neq \emptyset$ do
- ▶ begin
- ▶ пусть $e \in Q$
- ▶ удалить e из Q (Q — очередь);
- ▶ for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- ▶ while $Q \neq \emptyset$ do
- ▶ begin
- ▶ пусть $e \in Q$
- ▶ удалить e из Q (Q — очередь);
- ▶ for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do
- ▶ begin

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- ▶ while $Q \neq \emptyset$ do
- ▶ begin
- ▶ пусть $e \in Q$
- ▶ удалить e из Q (Q — очередь);
- ▶ for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do
- ▶ begin
- ▶ пометка $[e'] := e, Q := Q \cup \{e'\};$

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

- ▶ while $Q \neq \emptyset$ do
- ▶ begin
- ▶ пусть $e \in Q$
- ▶ удалить e из Q (Q — очередь);
- ▶ for all непомеченных $e' \in E$ таких, что $(e, e') \in A$ do
- ▶ begin
- ▶ пометка $[e'] := e, Q := Q \cup \{e'\}$;
- ▶ if $e' \in T$ then $I := I \oplus \text{ПУТЬ}(e')$ go to label;
- ▶ end
- ▶ end

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

```

▶ while  $Q \neq \emptyset$  do
▶   begin
▶     пусть  $e \in Q$ 
▶     удалить  $e$  из  $Q$  ( $Q$  — очередь);
▶     for all непомеченных  $e' \in E$  таких, что  $(e, e') \in A$  do
▶       begin
▶         пометка  $[e'] := e, Q := Q \cup \{e'\}$ ;
▶         if  $e' \in T$  then  $I := I \oplus \text{ПУТЬ}(e')$  go to label;
▶       end;
▶     end;
▶   end;
End;
```

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

поиск правильной увеличивающейся последовательности от некоторого элемента множества S до e

- ▶ procedure ПУТЬ(e)

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

поиск правильной увеличивающейся последовательности от некоторого элемента множества S до e

- ▶ procedure ПУТЬ(e)
- ▶ if пометка[e] = 0 then return [e]
 else return ПУТЬ(пометка[e])

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Теорема 4

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов корректно решает задачу за время $O(|E|^3 C(|E|))$, где $C(|E|)$ — верхняя оценка сложности алгоритмов $A_{\mathfrak{R}}$, $A_{\mathfrak{F}}$ при работе с задачами размера $|E|$.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Доказательство

Последовательность $S = [e_1, e_2, \dots, e_m]$ — правильная.

Пр.1 — очевидно.

Пр.2 — т.к. вспомогательный граф — двудольный, то элементы из S на четных местах входят в I .

По построению $e_i \in D_{i-1}$ для четных i . Пусть $e_i \in D_{k-1}$ для некоторого $k < i$. Тогда дуга (e_k, e_i) содержится во вспомогательном графе. Это противоречит, что Q — очередь. Следовательно, алгоритм находит кратчайшие пути.

Пр.3 — аналогично.

Т.к. $e_m \in T$, то m — нечетно и $I + e_m \in \mathfrak{K}$. Таким образом $I \oplus S \in \mathfrak{K}$ и S — увеличивающая последовательность.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Доказательство (продолжение)

Алгоритм не останавливается, пока I не станет максимально возможным. Пусть L — множество помеченных и U — множество непомеченных элементов из I в конце алгоритма.

Рассмотрим $E_1 = sp_M(U)$, $E_2 = sp_N(L)$.

Каждый элемент множества I принадлежит E_1 или E_2 .

Рассмотрим любой элемент e_i из $E \setminus I$. Он принадлежит одному из E_1 или E_2 .

Если e_i помечен, значит во время поиска помечали все элементы соответствующего D_i . Поэтому, если e_i добавить к L , то образуется N -цикл, D_i . Т.о. $e_i \in sp_N(L)$.

Если e_i не помечен, тогда должно быть $I + e_i \notin \mathfrak{F}$, иначе была бы пометка 0. Следовательно, $I + e_i$ содержит M -цикл C_i . Но никакой элемент e_j из C_i не мог помечаться, т.к. иначе e_i был бы помечен на следующем шаге по дуге (e_j, e_i) . Поэтому при добавлении e_i к U образуется M -цикл. Следовательно, $e_i \in sp_M(U)$.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Доказательство (продолжение)

$E_1 \cup E_2 = E$, поэтому $r(E_1, E_2) \geq |J|$ для всех $J \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}$.

$r(E_1, E_2) = |L| + |U| = |I|$, поэтому $|I| \geq |J|$ для всех $J \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}$.

Следовательно, I — максимальное пересечение.

Временная оценка.

Возможно не более $|E|$ увеличений.

При каждом увеличении время уходит на построение D_i или/и C_i . Это можно сделать, применяя алгоритмы $A_{\mathcal{K}}$, $A_{\mathcal{F}}$ к $I + e_i - e_j$ для каждого $e_j \in E$.

Построение вспомогательного орграфа Q и множества T : $O(|E|^2 C(|E|))$.

Поиск по орграфу: $O(|E|^2)$.

Рекомендуемая литература



Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985



Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы построение и анализ, 2-е издание. М.: Изд. дом «Вильямс», 2009