

**Открытая олимпиада НГУ по математике**  
(ФЕН, ГГФ), март 2005, вне Новосибирска

**Вариант Г1**

1. Строительный раствор состоит из смеси песка, цемента и воды. Известно, что в растворе песка и воды в 4 раза больше, чем цемента, а песка и цемента в 3 раза больше, чем цемента и воды. Найти процентное содержание песка, цемента и воды в растворе.

Ответ: 50%, 40%, 10%.

2. Решить уравнение  $\cos 2x + 2 = \frac{1}{\cos 2x}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

3. В трапеции  $ABCD$  биссектриса угла  $BAD$  при основании  $AD$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $M$  и продолжение основания  $BC$  в точке  $K$ . Найти длину основания  $AD$ , если известно, что  $AB = 8$ ,  $BC = 2$ ,  $AM = 10$  и  $MK = 4$ .

Ответ: 15.

4. Решить неравенство  $\frac{1}{\sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}} \geq \frac{5}{2x}$ .

Ответ:  $[-8, -\frac{5\sqrt{7}}{2}] \cup (0, \frac{5\sqrt{7}}{2}]$ .

5. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  ребра основания  $ABC$  равны 2, боковые ребра равны 3. Точка  $M$  на ребре  $BC$  выбрана так, что угол между плоскостями  $ASM$  и  $ASB$  равен  $30^\circ$ . Найти расстояние от середины ребра  $AB$  до плоскости  $ASM$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**Вариант Г2**

1. В школе изучают английский, французский и немецкий языки, причем каждый ученик изучает только один язык. Известно, что английский и французский изучают в 1,4 раза больше учеников, чем французский и немецкий, а английский и немецкий в 4 раза больше, чем французский. Каково процентное соотношение изучавших английский, французский и немецкий языки в этой школе?

Ответ: 50%, 20%, 30%.

2. Решить уравнение  $5 - 2 \cos 2x = \frac{1}{\sin^2 x}$ .

Ответ:  $\pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3. В трапеции  $ABCD$  биссектриса угла  $BAD$  при основании  $AD$  пересекает основание  $BC$  в точке  $M$  и продолжение стороны  $CD$  в точке  $K$ . Найти длину основания  $AD$ , если известно, что  $AB = 6$ ,  $BC = 9$ ,  $AM = 10$  и  $MK = 2$ .

Ответ: 18.

4. Решить неравенство  $\frac{1}{\sqrt{7+x} - \sqrt{7-x}} \leq \frac{2}{x}$ .

Ответ:  $[-4\sqrt{3}, 0) \cup [4\sqrt{3}, 7]$ .

5. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  ребра основания  $ABCD$  равны 2, боковые ребра равны 5. Точка  $M$  на ребре  $BC$  выбрана так, что угол между плоскостями  $ASM$  и  $ASB$  равен  $30^\circ$ . Найти расстояние от середины ребра  $SB$  до плоскости  $ASM$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{6}}{5}$ .

### Вариант Г3

1. На участке леса растут березы, осины и сосны. Известно, что берез и осин в 1,8 раза больше, чем осин и сосен, а берез и сосен в 1,5 раза больше, чем осин. Каково процентное соотношение берез, осин и сосен на участке?

Ответ: 50%, 40%, 10%.

2. Решить уравнение  $5 + 2 \cos 2x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

Ответ:  $\pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

3. В трапеции  $ABCD$  биссектриса угла  $BAD$  при основании  $AD$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $M$  и продолжение основания  $BC$  в точке  $K$ . Найти длину основания  $BC$ , если известно, что  $AB = 12$ ,  $AD = 24$ ,  $AM = 16$  и  $MK = 4$ .

Ответ: 6.

4. Решить неравенство  $\frac{1}{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}} \geq \frac{2}{x}$ .

Ответ:  $[-6, -4\sqrt{2}] \cup (0, 4\sqrt{2}]$ .

5. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  ребра основания  $ABC$  равны 2, боковые ребра равны 4. Точка  $M$  на ребре  $BC$  выбрана так, что угол между плоскостями  $ASM$  и  $ASB$  равен  $60^\circ$ . Найти расстояние от середины ребра  $AB$  до плоскости  $ASM$ .

Ответ:  $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ .

### Вариант Г4

1. В озере водятся караси, окуни и щуки. Известно, что карасей в 1,5 раза больше, чем окуней и щук, а карасей и щук в 3 раза больше, чем окуней. Каково процентное соотношение карасей, окуней и щук в озере?

Ответ: 60%, 25%, 15%.

2. Решить уравнение  $2 - \cos 2x = \frac{1}{\sin^2 x}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ .

3. В трапеции  $ABCD$  биссектриса угла  $BAD$  при основании  $AD$  пересекает основание  $BC$  в точке  $M$  и продолжение стороны  $CD$  в точке  $K$ . Найти длину основания  $BC$ , если известно, что  $AB = 10$ ,  $AD = 35$ ,  $AM = 18$  и  $MK = 3$ .

Ответ: 15.

4. Решить неравенство  $\frac{1}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}} \leq \frac{5}{2x}$ .

Ответ:  $[-\frac{5\sqrt{11}}{2}, 0) \cup [\frac{5\sqrt{11}}{2}, 9]$ .

5. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  ребра основания  $ABCD$  равны 2, боковые ребра равны 7. Точка  $M$  на ребре  $CD$  выбрана так, что угол между плоскостями  $ASM$  и  $ASB$  равен  $60^\circ$ . Найти расстояние от середины ребра  $SB$  до плоскости  $ASM$ .

Ответ:  $\frac{6}{7}$ .