Открытая олимпиада НГУ по математике

(ФЕН, ГГФ), март 2005, вне Новосибирска

Вариант Г1

1. Строительный раствор состоит из смеси песка, цемента и воды. Известно, что в растворе песка и воды в 4 раза больше, чем цемента, а песка и цемента в 3 раза больше, чем цемента и воды. Найти процентное содержание песка, цемента и воды в растворе.

Ответ: 50%, 40%, 10%.

2. Решить уравнение $\cos 2x + 2 = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает сторону CD в точке M и продолжение основания BC в точке K. Найти длину основания AD, если известно, что $AB = 8$, $BC = 2$, $AM = 10$ и $MK = 4$.

Ответ: 15.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}} \geq \dfrac{5}{2x}$.

Ответ: $\left[-8, -\frac{5\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left(0, \frac{5\sqrt{7}}{2}\right]$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 2, боковые ребра равны 3. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 30°. Найти расстояние от середины ребра AB до плоскости ASM.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Вариант Г2

1. В школе изучают английский, французский и немецкий языки, причем каждый ученик изучает только один язык. Известно, что английский и французский изучают в 1,4 раза больше учеников, чем французский и немецкий, а английский и немецкий в 4 раза больше, чем французский. Каково процентное соотношение изучавших английский, французский и немецкий языки в этой школе?

Ответ: 50%, 20%, 30%.

2. Решить уравнение $5 - 2\cos 2x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает основание BC в точке M и продолжение стороны CD в точке K. Найти длину основания AD, если известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $AM = 10$ и $MK = 2$.

Ответ: 18.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{7+x} - \sqrt{7-x}} \leq \dfrac{2}{x}$.

Ответ: $[-4\sqrt{3}, 0) \cup [4\sqrt{3}, 7]$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 2, боковые ребра равны 5. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 30°. Найти расстояние от середины ребра SB до плоскости ASM.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

Вариант Г3

1. На участке леса растут березы, осины и сосны. Известно, что берез и осин в 1,8 раза больше, чем осин и сосен, а берез и сосен в 1,5 раза больше, чем осин. Каково процентное соотношение берез, осин и сосен на участке?

Ответ: 50%, 40%, 10%.

2. Решить уравнение $5 + 2\cos 2x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает сторону CD в точке M и продолжение основания BC в точке K. Найти длину основания BC, если известно, что $AB = 12$, $AD = 24$, $AM = 16$ и $MK = 4$.

Ответ: 6.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}} \geq \dfrac{2}{x}$.

Ответ: $[-6, -4\sqrt{2}] \cup (0, 4\sqrt{2}]$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 2, боковые ребра равны 4. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 60°. Найти расстояние от середины ребра AB до плоскости ASM.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{8}$.

Вариант Г4

1. В озере водятся караси, окуни и щуки. Известно, что карасей в 1,5 раза больше, чем окуней и щук, а карасей и щук в 3 раза больше, чем окуней. Каково процентное соотношение карасей, окуней и щук в озере?

Ответ: 60%, 25%, 15%.

2. Решить уравнение $2 - \cos 2x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает основание BC в точке M и продолжение стороны CD в точке K. Найти длину основания BC, если известно, что $AB = 10$, $AD = 35$, $AM = 18$ и $MK = 3$.

Ответ: 15.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}} \leq \dfrac{5}{2x}$.

Ответ: $\left[-\frac{5\sqrt{11}}{2}, 0\right) \cup \left[\frac{5\sqrt{11}}{2}, 9\right]$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 2, боковые ребра равны 7. Точка M на ребре CD выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 60°. Найти расстояние от середины ребра SB до плоскости ASM.

Ответ: $\frac{6}{7}$.