

**Открытая олимпиада НГУ по математике**  
(ФЕН, ГГФ), март 2005, Новосибирск

**Вариант Б1**

1. Винни-Пух отправился в гости к Пятачку, прихватив с собой полный горшочек меда. По дороге он лакомился медом, съедая одинаковое количество меда каждые 100 метров пути. После того, как Винни-Пух прошел половину пути, он сообразил, что меда на весь путь не хватит. Когда горшочек опустеет, непройденной останется  $\frac{1}{15}$  часть пути. Поэтому Винни-Пух ускорил шаг, за счет чего потребление меда на 100 метров пути уменьшилось на 48 граммов. В результате, когда он пришел к Пятачку, в горшочке осталась  $\frac{1}{10}$  часть от общего количества меда. Сколько граммов меда съедал за 100 метров пути Винни-Пух первоначально?

2. Решить уравнение  $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg} \left( \frac{5\pi}{2} - x \right)$ .

3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с гипотенузой  $AB = 2\sqrt{10}$  угол между медианами  $AM$  и  $BN$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{9}{20}$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ .

4. Решить неравенство  $y - \sqrt{|y - 2| - 1} < 4$ .

5. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и ребра основания  $ABC$  равны 1, точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ . Через точки  $A$  и  $M$  проводится плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребро  $BC$  в точке  $N$ . Известно, что расстояния от вершин  $B_1$  и  $C$  до плоскости  $\alpha$  равны. Найти длину отрезка  $CN$ .

**Вариант Б2**

1. Бендер, Балаганов и Козлевич отправились в Черноморск на автомобиле «Антилопа Гну». Перед дорогой они запаслись бензином с тем расчетом, чтобы по прибытию в Черноморск в баке осталась  $\frac{1}{16}$  часть всего горючего. Однако в середине пути на борт «Антилопы Гну» был экстренно взят Паниковский, из-за чего расход горючего на каждые 100 км пути увеличился на 2 литра. В результате горючее кончилось раньше времени, и оставшуюся  $\frac{1}{36}$  часть пути до Черноморска им пришлось пройти пешком. Сколько литров бензина на 100 км пути расходовалось первоначально?

2. Решить уравнение  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \left( 3x - \frac{7\pi}{2} \right)$ .

3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с гипотенузой  $AB$  угол между медианами  $AM$  и  $BN$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{3}{17}$ . Найти  $AB$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 8.

4. Решить неравенство  $y - \sqrt{|y + 1| - 2} < 2$ .

5. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и ребра основания  $ABC$  равны 1, точки  $K$  и  $L$  — середины ребер  $AA_1$  и  $BC$  соответственно. Через точки  $C_1$  и  $L$  проводится плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребро  $A_1B_1$  в точке  $N$ . Известно, что расстояния от точек  $B_1$  и  $K$  до плоскости  $\alpha$  равны. Найти длину отрезка  $A_1N$ .

### Вариант Б3

1. Мальчик Вася половину пути до школы прошел пешком, после чего сообразил, что опаздывает к звонку. Если он будет идти в том же темпе, то когда начнется урок, ему останется еще  $\frac{1}{4}$  часть пути. После этого Вася потуже завязал шнурки, потратив на это  $\frac{1}{9}$  часть общего времени до звонка, и припустил бегом, увеличив скорость по сравнению с шагом на 8 км/ч. В результате он попал в класс как раз к началу урока. С какой скоростью шел Вася первоначально?

2. Решить уравнение  $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} \left( x - \frac{3\pi}{2} \right)$ .

3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с гипотенузой  $AB$  угол между медианами  $AM$  и  $BN$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{3}{5}$ . Найти катеты треугольника  $ABC$ , если радиус описанной вокруг него окружности равен 5.

4. Решить неравенство  $\sqrt{|y+3|} - 1 + 1 > y$ .

5. В правильной треугольной призме боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и ребра основания  $ABC$  равны 1, точки  $M$  и  $K$  — середины ребер  $CC_1$  и  $A_1C_1$  соответственно. Через точки  $M$  и  $K$  проводится плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребро  $AB$  в точке  $N$ . Известно, что расстояния от вершин  $A$  и  $B_1$  до плоскости  $\alpha$  равны. Найти длину отрезка  $BN$ .

### Вариант Б4

1. Мишка должен съесть тарелку каши до прихода мамы. Сначала он ел быстро, и если бы продолжал есть с такой скоростью, то доел бы кашу за  $\frac{9}{10}$  от общего количества времени до прихода мамы. Однако, съев половину тарелки, Мишка о чем-то задумался, из-за чего стал есть на 5 ложек в минуту меньше. В результате, когда мама пришла, несъеденной осталась  $\frac{1}{24}$  часть от общего количества каши. Сколько ложек в минуту съедал Мишка первоначально?

2. Решить уравнение  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \left( \frac{9\pi}{2} - 5x \right)$ .

3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с гипотенузой  $AB = 10$  угол между медианами  $AM$  и  $BN$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{18}{25}$ . Найти периметр треугольника  $ABC$ .

4. Решить неравенство  $\sqrt{|y+1|} - 2 + 4 > y$ .

5. В правильной треугольной призме боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и ребра основания  $ABC$  равны 1, точки  $K$  и  $L$  — середины ребер  $CC_1$  и  $AB$  соответственно. Через точки  $B_1$  и  $L$  проводится плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребро  $A_1C_1$  в точке  $N$ . Известно, что расстояния от точек  $A$  и  $K$  до плоскости  $\alpha$  равны. Найти длину отрезка  $C_1N$ .