Открытая олимпиада НГУ по математике

(ФЕН, ГГФ), март 2005, Новосибирск

Вариант Б1

1. Винни-Пух отправился в гости к Пятачку, прихватив с собой полный горшочек меда. По дороге он лакомился медом, съедая одинаковое количество меда каждые 100 метров пути. После того, как Винни-Пух прошел половину пути, он сообразил, что меда на весь путь не хватит. Когда горшочек опустеет, непройденной останется $\dfrac{1}{15}$ часть пути. Поэтому Винни-Пух ускорил шаг, за счет чего потребление меда на 100 метров пути уменьшилось на 48 граммов. В результате, когда он пришел к Пятачку, в горшочке осталась $\dfrac{1}{10}$ часть от общего количества меда. Сколько граммов меда съедал за 100 метров пути Винни-Пух первоначально?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 2\sqrt{10}$ угол между медианами AM и BN равен $\operatorname{arctg}\dfrac{9}{20}$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство $y - \sqrt{|y-2| - 1} < 4$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и ребра основания ABC равны 1, точка M — середина ребра A_1C_1. Через точки A и M проводится плоскость α, которая пересекает ребро BC в точке N. Известно, что расстояния от вершин B_1 и C до плоскости α равны. Найти длину отрезка CN.

Вариант Б2

1. Бендер, Балаганов и Козлевич отправились в Черноморск на автомобиле «Антилопа Гну». Перед дорогой они запаслись бензином с тем расчетом, чтобы по прибытию в Черноморск в баке осталась $\dfrac{1}{16}$ часть всего горючего. Однако в середине пути на борт «Антилопы Гну» был экстренно взят Паниковский, из-за чего расход горючего на каждые 100 км пути увеличился на 2 литра. В результате горючее кончилось раньше времени, и оставшуюся $\dfrac{1}{36}$ часть пути до Черноморска им пришлось пройти пешком. Сколько литров бензина на 100 км пути расходовалось первоначально?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(3x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB угол между медианами AM и BN равен $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{17}$. Найти AB, если площадь треугольника ABC равна 8.

4. Решить неравенство $y - \sqrt{|y+1| - 2} < 2$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и ребра основания ABC равны 1, точки K и L — середины ребер AA_1 и BC соответственно. Через точки C_1 и L проводится плоскость α, которая пересекает ребро A_1B_1 в точке N. Известно, что расстояния от точек B_1 и K до плоскости α равны. Найти длину отрезка A_1N.

Вариант Б3

1. Мальчик Вася половину пути до школы прошел пешком, после чего сообразил, что опаздывает к звонку. Если он будет идти в том же темпе, то когда начнется урок, ему останется еще $\dfrac{1}{4}$ часть пути. После этого Вася потуже завязал шнурки, потратив на это $\dfrac{1}{9}$ часть общего времени до звонка, и припустил бегом, увеличив скорость по сравнению с шагом на 8 км/ч. В результате он попал в класс как раз к началу урока. С какой скоростью шел Вася первоначально?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB угол между медианами AM и BN равен $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}$. Найти катеты треугольника ABC, если радиус описанной вокруг него окружности равен 5.

4. Решить неравенство $\sqrt{|y+3|-1} + 1 > y$.

5. В правильной треугольной призме боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и ребра основания ABC равны 1, точки M и K — середины ребер CC_1 и A_1C_1 соответственно. Через точки M и K проводится плоскость α, которая пересекает ребро AB в точке N. Известно, что расстояния от вершин A и B_1 до плоскости α равны. Найти длину отрезка BN.

Вариант Б4

1. Мишка должен съесть тарелку каши до прихода мамы. Сначала он ел быстро, и если бы продолжал есть с такой скоростью, то доел бы кашу за $\dfrac{9}{10}$ от общего количества времени до прихода мамы. Однако, съев половину тарелки, Мишка о чем-то задумался, из-за чего стал есть на 5 ложек в минуту меньше. В результате, когда мама пришла, несъеденной осталась $\dfrac{1}{24}$ часть от общего количества каши. Сколько ложек в минуту съедал Мишка первоначально?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{9\pi}{2} - 5x\right)$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 10$ угол между медианами AM и BN равен $\operatorname{arctg}\dfrac{18}{25}$. Найти периметр треугольника ABC.

4. Решить неравенство $\sqrt{|y+1|-2} + 4 > y$.

5. В правильной треугольной призме боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и ребра основания ABC равны 1, точки K и L — середины ребер CC_1 и AB соответственно. Через точки B_1 и L проводится плоскость α, которая пересекает ребро A_1C_1 в точке N. Известно, что расстояния от точек A и K до плоскости α равны. Найти длину отрезка C_1N.