Открытая олимпиада НГУ по математике

математика, теоретический экзамен (ММФ, ФИТ)

март 2005, вне Новосибирска

Вариант Т1

1. Доказать следующее утверждение: если число $\sin a$ рационально, то число $\sin 3a$ тоже рационально. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

2. R трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке M, а продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке N. Доказать, что прямая MN проходит через середины оснований трапеции.

3. На плоскости задана прямоугольная система координат. Доказать, что при каждом значении параметра a уравнение $x^2 - 2(a+1)x + y^2 - a^2y = 1$ задает окружность и что центры всех таких окружностей лежат на одной параболе. Найти уравнение этой параболы.

4. Доказать, что объем любой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 равен $\frac{1}{2}TH$, где T — площадь грани AA_1B_1B, H — расстояние от точек прямой CC_1 до плоскости AA_1B_1B.

Вариант Т2

1. Доказать следующее утверждение: если число $\cos a$ рационально, то число $\cos 3a$ тоже рационально. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

2. В трапеции $ABCD$ точки M и N — середины оснований AD и BC. Доказать, что прямая MN проходит через точку пересечения K диагоналей трапеции и точку пересечения L продолжений боковых сторон AB и CD.

3. На плоскости задана прямоугольная система координат. Доказать, что при каждом значении параметра a уравнение $x^2 + 2(a-1)x + y^2 + a^2y = 4$ задает окружность и что центры всех таких окружностей лежат на одной параболе. Найти уравнение этой параболы.

4. Доказать, что объем любой четырехугольной пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, равен $\frac{2}{3}TH$, где T — площадь грани SBC, H — расстояние от точек прямой AD до плоскости SBC.