

Открытая олимпиада НГУ по математике
(ММФ, ФФ, ФИТ), март 2005, вне Новосибирска

Вариант В1

1. Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, проехал мимо дежурной по переезду за 45 секунд. Автомобиль, который ехал с постоянной скоростью 90 км/ч навстречу поезду по шоссе, параллельному железной дороге, миновал поезд за 20 секунд. Определить скорость движения поезда.

Ответ: 72.

2. Решить уравнение $\sqrt{\cos 2x + 2} + \frac{1}{\cos x} = 0$.

Ответ: $\pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает сторону CD в точке M и продолжение основания BC в точке K . Найти длину стороны CD , если известно, что $AB = 8$, $BC = 2$, $AM = 10$ и $MK = 4$.

Ответ: $\frac{7}{2}\sqrt{10}$.

4. Решить неравенство $\frac{1}{\sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}} \geq \frac{5}{2x}$.

Ответ: $[-8, -\frac{5\sqrt{7}}{2}] \cup (0, \frac{5\sqrt{7}}{2}]$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны $2\sqrt{15}$, боковые ребра равны 6. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 30° . Найти расстояние от точки C до плоскости ASM .

Ответ: $\frac{11}{14}\sqrt{35}$.

Вариант В2

1. Колонна грузовиков, двигавшаяся с постоянной скоростью, проехала мимо наблюдателя, стоявшего на обочине, за 1 минуту. Автомобиль, который ехал с постоянной скоростью 90 км/ч в том же направлении, обогнал колонну за 1,5 минуты. Найти длину колонны грузовиков.

Ответ: 900.

2. Решить уравнение $\sqrt{5 - 2\cos 2x} + \frac{1}{\sin x} = 0$.

Ответ: $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает основание BC в точке M и продолжение стороны CD в точке K . Найти длину стороны CD , если известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $AM = 10$ и $MK = 2$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

4. Решить неравенство $\frac{1}{\sqrt{7+x} - \sqrt{7-x}} \leq \frac{2}{x}$.

Ответ: $[-4\sqrt{3}, 0) \cup [4\sqrt{3}, 7]$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 4, боковые ребра равны $4\sqrt{2}$. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 30° . Найти расстояние от точки D до плоскости ASM .

Ответ: $\frac{13}{\sqrt{14}}$.

Вариант В3

1. Плот, двигаясь по течению реки, проплывал под мостом в течение 6 минут. Катер, который плыл с постоянной относительно берегов скоростью 36 км/ч вниз по течению, обогнал плот за 40 секунд. Найти длину плота.

Ответ: 360.

2. Решить уравнение $\sqrt{5 + 2 \cos 2x} + \frac{1}{\cos x} = 0$.

Ответ: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает сторону CD в точке M и продолжение основания BC в точке K . Найти длину стороны CD , если известно, что $AB = 12$, $AD = 24$, $AM = 16$ и $MK = 4$.

Ответ: $10\sqrt{3}$.

4. Решить неравенство $\frac{1}{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}} \geq \frac{2}{x}$.

Ответ: $[-6, -4\sqrt{2}] \cup (0, 4\sqrt{2}]$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 6, боковые ребра равны 4. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 60° . Найти расстояние от точки C до плоскости ASM .

Ответ: $\frac{15}{28}\sqrt{21}$.

Вариант В4

1. Колонна грузовиков, двигавшаяся по шоссе с постоянной скоростью, проехала мимо наблюдателя, стоявшего на обочине, за 1,5 минуты. Автомобиль, который двигался с постоянной скоростью 54 км/ч навстречу, миновал колонну за 36 секунд. Определить скорость движения колонны.

Ответ: 36.

2. Решить уравнение $\sqrt{2 - \cos 2x} + \frac{1}{\sin x} = 0$.

Ответ: $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает основание BC в точке M и продолжение стороны CD в точке K . Найти длину стороны CD , если известно, что $AB = 10$, $AD = 35$, $AM = 18$ и $MK = 3$.

Ответ: $6\sqrt{7}$.

4. Решить неравенство $\frac{1}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}} \leq \frac{5}{2x}$.

Ответ: $[-\frac{5\sqrt{11}}{2}, 0) \cup [\frac{5\sqrt{11}}{2}, 9]$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 2, высота пирамиды равна $\sqrt{6}$. Точка M на ребре CD выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен 60° . Найти расстояние от точки D до плоскости ASM .

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{7}}$.