

## Варианты вступительных экзаменов в НГУ

математика, теоретический экзамен

(ММФ, ФИТ, ЭФ — экономика)

июль 2005, Новосибирск

### Вариант 61

1. Известно, что числа  $\log_3 x$ ,  $\log_9 y$ ,  $\log_{27} z$  являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Доказать, что числа  $\frac{x}{y}$ ,  $\frac{y}{x}$ ,  $z$  являются последовательными членами геометрической прогрессии.

2. В окружность вписан пятиугольник  $ABCDE$ , у которого сторона  $AB$  параллельна диагонали  $CE$ , а сторона  $AE$  параллельна диагонали  $BD$ . Доказать, что касательная к окружности, проведенная в точке  $A$ , параллельна стороне  $CD$ .

3. Найти натуральные числа  $m$  и  $n$  такие, что  $m + 3n = 2005$ , а произведение  $mn$  имеет наибольшее возможное значение.

4. В треугольной пирамиде  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  — середины ребер  $BC$  и  $AD$  соответственно. Известно, что остальные ребра  $AB$ ,  $AC$ ,  $DB$  и  $DC$  имеют одинаковую длину. Точки  $M$  и  $N$  выбраны произвольным образом соответственно на прямых  $BC$  и  $AD$ . Доказать, что скалярное произведение  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{EF}$  векторов  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{EF}$  не зависит от выбора точек  $M$  и  $N$ .

### Вариант 62

1. Известно, что числа  $\log_2 ab$ ,  $\log_4 bc$ ,  $\log_8 ac$  являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии и  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ . Доказать, что числа  $a$ ,  $c$ ,  $ac$  являются последовательными членами геометрической прогрессии.

2. В окружность вписан пятиугольник  $ABCDE$ , у которого сторона  $AB$  параллельна стороне  $DE$ , а сторона  $AE$  параллельна стороне  $BC$ . Доказать, что касательная к окружности, проведенная в точке  $A$ , параллельна стороне  $CD$ .

3. Найти натуральные числа  $m$  и  $n$  такие, что  $m + 4n = 2005$ , а произведение  $mn$  имеет наибольшее возможное значение.

4. В треугольной пирамиде  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  — середины ребер  $BC$  и  $AD$  соответственно. Известно, что остальные ребра  $AB$ ,  $AC$ ,  $DB$  и  $DC$  имеют одинаковую длину. Точки  $M$  и  $N$  выбраны произвольным образом соответственно на прямых  $BC$  и  $AD$ . Доказать, что скалярное произведение  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{EN}$  векторов  $\overrightarrow{FM}$  и  $\overrightarrow{EN}$  не зависит от выбора точек  $M$  и  $N$ .