Открытая олимпиада НГУ (ММФ, ФФ, ФИТ), март 2005, Новосибирск

математика, теоретический экзамен

Вариант Д1

1. Известно, что для некоторого положительного числа a уравнение $\cos 5x = a$ имеет два корня, разность которых равна $\frac{7\pi}{4}$. Найти все корни этого уравнения.

2. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AMNK$ равной площади с общей вершиной A. Точка M лежит на отрезке AB, а точка D — на отрезке AK. Доказать, что четырехугольник $DMCN$ — трапеция.

3. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, 1]$, ее значения вычисляются по формуле $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Доказать, что функция $f(x)$ строго возрастает на указанном промежутке, и найти обратную к ней функцию.

4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, никакие две стороны которого не параллельны. Доказать, что медианы AM и BN граней SAD и SBC лежат на скрещивающихся прямых.

Вариант Д2

1. Известно, что для некоторого положительного числа a уравнение $\sin 4x = a$ имеет два корня, разность которых равна $\frac{7\pi}{5}$. Найти все корни этого уравнения.

2. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AMNK$ с общей вершиной A. Точка M лежит на отрезке AB, а точка D — на отрезке AK. Известно, что прямые CN и MD параллельны. Доказать, что площади параллелограммов $ABCD$ и $AMNK$ равны.

3. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(0, 1]$, ее значения вычисляются по формуле $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Доказать, что функция $f(x)$ строго убывает на указанном промежутке, и найти обратную к ней функцию.

4. В четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 основанием является четырехугольник $ABCD$, никакие две стороны которого не параллельны. Доказать, что диагонали AD_1 и BC_1 граней AA_1D_1D и BB_1C_1C лежат на скрещивающихся прямых.