

**Открытая олимпиада НГУ (ММФ, ФФ, ФИТ), март 2005, выездная
математика, теоретический экзамен**

Вариант Т1

1. Доказать следующее утверждение: если число $\sin a$ рационально, то число $\sin 3a$ тоже рационально. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.
2. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке M , а продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке N . Доказать, что прямая MN проходит через середины оснований трапеции.
3. На плоскости задана прямоугольная система координат. Доказать, что при каждом значении параметра a уравнение $x^2 - 2(a + 1)x + y^2 - a^2y = 1$ задает окружность и что центры всех таких окружностей лежат на одной параболе. Найти уравнение этой параболы.
4. Доказать, что объем любой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 равен $\frac{1}{2}TH$, где T — площадь грани AA_1B_1B , H — расстояние от точек прямой CC_1 до плоскости AA_1B_1B .

Вариант Т2

1. Доказать следующее утверждение: если число $\cos a$ рационально, то число $\cos 3a$ тоже рационально. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.
2. В трапеции $ABCD$ точки M и N — середины оснований AD и BC . Доказать, что прямая MN проходит через точку пересечения K диагоналей трапеции и точку пересечения L продолжений боковых сторон AB и CD .
3. На плоскости задана прямоугольная система координат. Доказать, что при каждом значении параметра a уравнение $x^2 + 2(a - 1)x + y^2 + a^2y = 4$ задает окружность и что центры всех таких окружностей лежат на одной параболе. Найти уравнение этой параболы.
4. Доказать, что объем любой четырехугольной пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, равен $\frac{2}{3}TH$, где T — площадь грани SBC , H — расстояние от точек прямой AD до плоскости SBC .