Открытая олимпиада НГУ (ММФ, ФФ, ФИТ), март 2005, Новосибирск

Вариант A1

1. Для постройки амбара поп нанял несколько одинаково работоспособных и одинаково прожорливых работников, уговорившись, что в качестве платы будет их кормить. После того, как половина амбара была построена, поп сообразил, что ему не хватит запаса провизии. Когда она закончится, $\frac{1}{10}$ часть амбара останется недостроенной. Поэтому поп нанял дополнительно Балду, который ест за четверых, а работает за семерых. В результате амбар был построен, да еще и $\frac{1}{36}$ часть провизии осталась несъеденной. Сколько работников было у попа без Балды? Ответ: 5.

2. Решить уравнение $\dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\sin 3x + \sin^3 x} = \operatorname{tg} 5x$. Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 3 : 1$, а прямые AN и MC параллельны. Известно, что площадь трапеции $AMCN$ составляет 65% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $CN : ND$. Ответ: $3 : 2$.

4. Решить неравенство $\sqrt{|x^2 - 6x + 5| - 4} \geqslant \sqrt{2}(1-x)$. Ответ: $\{-1\} \cup \{3\} \cup [3+2\sqrt{2}, +\infty)$.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точка M — середина ребра A_1C_1. Через точки A и M проводится плоскость α, которая пересекает ребро BC в точке N. Известно, что расстояния от вершин B и C до плоскости α равны. В каком отношении точка N делит ребро BC? Ответ: $BN : NC = 1 : 2$.

Вариант A2

1. Змей Горыныч решил благоустроить свою пещеру. Поймав несколько леших в ближайшем лесу, он приказал им произвести ремонт, пообещав кормить по ходу выполнения работ. Один из леших оказался страшным обжорой. Работая наравне с каждым из остальных, он ел за пятерых. Когда половина ремонта была завершена, Змей Горыныч сообразил, что ему не хватит запаса еды до окончания работ. Запас закончится, когда неотремонтированной останется $\frac{1}{10}$ часть пещеры. Недолго думая, он съел обжору, а оставшуюся часть ремонта остальные лешие делали без него. В результате, когда ремонт был завершен, у Змея Горыныча осталась еще $\frac{1}{21}$ часть от обшего запаса еды. Сколько леших поймал Змей Горыныч перед началом ремонта?

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x + \sin^3 x}{\cos^3 x - \cos 3x} = \operatorname{ctg} 5x$.

3. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 3 : 2$, а прямые AN и MC параллельны. Известно, что площади трапеции $AMCN$ составляет 54% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $AD : BC$.

4. Решить неравенство $\sqrt{|x^2 + 2x - 2| - 3} \geqslant \sqrt{3}(x - 1)$.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точки K и L — середины ребер AA_1 и BC соответственно. Через точки C_1 и L проводится плоскость α, которая пересекает ребро A_1B_1 в точке N. Известно, что расстояния от точек B_1 и K до плоскости о равны. В каком отношении точка N делит ребро A_1B_1?

Вариант А3

1. Царь задумал построить новые палаты и призвал несколько богатырей, предложив им в качестве платы по ходу строительства пить мед из его кладовой. После того, как половина работы была сделана, царь зашел в кладовые и обнаружил, что меда недостаточно. Когда он закончится, $\dfrac{1}{16}$ часть палат останется недостроенной. Поэтому царь обратился за помощью к Илье Муромцу, который хоть и пьет в три раза больше каждого богатыря, но и работает за пятерых. В результате, когда совместными усилиями Ильи Муромца и ранее призванных богатырей строительство было завершено, в кладовой осталась невыпитой $\dfrac{1}{45}$ часть имевшегося там меда. Сколько богатырей призвал царь в самом начале?

2. Решить уравнение $\quad \dfrac{\cos 3x - \cos^3 x}{\sin 3x + \sin^3 x} = \operatorname{tg} 7x.$

3. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что $AM : MB = DN : NC$, а прямые AN и MC параллельны. Известно, что площадь трапеции $AMCN$ составляет 40% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $AD : BC$.

4. Решить неравенство $\sqrt{|x^2 - 4x + 3| - 1} \geqslant \sqrt{2}(x - 3)$.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точки M и K — середины ребер CC_1 и A_1C_1 соответственно. Через точки M и K проводится плоскость α, которая пересекает ребро AB в точке N. Известно, что расстояния от вершин A и B_1 до плоскости α равны. В каком отношении точка N делит ребро AB?

Вариант А4

1. Соловей-Разбойник решил построить склад для хранения награбленного добра. Поймав несколько путников, он приказал им построить склад, пообещав в качестве вознаграждения поить их по ходу выполнения работ пивом из имевшейся у него бочки. На его беду, одним из пойманных путников оказался Иван Разгуляев, который хоть и работал в два раза быстрее каждого из остальных, но и пил за троих. После того, как половина склада была построена, Соловей-Разбойник сообразил, что пива недостаточно. Когда бочка полностью опустеет, $\dfrac{1}{16}$ часть склада останется недостроенной. Тогда Соловей-Разбойник выгнал Разгуляева, а оставшуюся часть склада достраивали остальные путники. В результате, когда склад был построен, в бочке осталась $\dfrac{1}{25}$ часть от первоначального количества пива. Сколько путников поймал Соловей-Разбойник?

2. Решить уравнение $\quad \dfrac{\sin 3x + \sin^3 x}{\cos 3x - \cos^3 x} = \operatorname{ctg} 7x.$

3. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что прямые AN и MC параллельны. Известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь трапеции $AMCN$ составляет 70% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $AM : MB$.

4. Решить неравенство $\sqrt{|x^2 - 6x + 6| - 3} \geqslant \sqrt{3}(1 - x)$.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точки K а L середины ребер CC_1 и AB соответственно. Через точки B_1 и L проводится плоскость α, которая пересекает ребро A_1C_1 в точке N. Известно, что расстояния от точек A и K до плоскости α равны. В каком отношении точка N делит ребро A_1C_1?