

**Открытая олимпиада НГУ по математике**  
(ФЕН, ГГФ), март 2006, вне Новосибирска

**Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 1**

1. Два бассейна, объем первого из которых в три раза больше объема второго, начали одновременно заполняться, каждый с помощью своего насоса. Скорость заполнения первого бассейна постоянна, а начальная скорость заполнения второго бассейна, которая в два раза ниже скорости заполнения первого, не менялась, пока второй бассейн не был заполнен наполовину, после чего она из-за неполадок с насосом уменьшилась в три раза. На заполнение какого из бассейнов ушло больше времени, и во сколько раз?

2. Решить уравнение  $\sin 3x = \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

3. В треугольнике  $ABC$  через вершину  $C$  перпендикулярно медиане  $BM$  проводится прямая, пересекающая медиану  $BM$  в точке  $K$ . Известно, что  $AB = 10$ ,  $BK = 6$ ,  $KM = 1$ . Найти длину отрезка  $BC$ .

4. Решить неравенство  $2||x - 1| - 2| \leq 3 - x$ .

5. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2$ ,  $AD = 6$ . Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка  $K$  — середина ребра  $SC$ . На отрезке  $BK$  точка  $M$  выбрана так, что  $BM : MK = 4$ . Найти расстояние от точки  $M$  до плоскости  $SAD$ .

**Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 2**

1. Два землекопа одновременно начали с постоянными скоростями рыть каждый свой котлован, причем первый землекоп работал в полтора раза быстрее второго. Вырыв половину своего котлована, первый землекоп устал и стал работать в три раза медленнее. В результате на весь свой котлован он потратил времени в полтора раза больше, чем второй землекоп на свой. Объем какого из котлованов больше, и во сколько раз?

2. Решить уравнение  $\cos 3x + \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

3. В треугольнике  $ABC$  через вершину  $C$  перпендикулярно медиане  $BM$  проводится прямая, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $N$ . Известно, что  $AN = 5$ ,  $BN = 15$ ,  $BM = 14$ . Найти длину отрезка  $AC$ .

4. Решить неравенство  $2||3 - x| - 2| \leq x - 1$ .

5. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2$ ,  $AD = 8$ . Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка  $K$  — середина ребра  $SA$ . На отрезке  $DK$  точка  $M$  выбрана так, что  $DM : MK = 2 : 3$ . Найти расстояние от точки  $M$  до плоскости  $SBC$ .

### Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 3

1. Из пункта А в пункт Б ведут два пути: один через гору, а второй — по равнине, причем второй путь в два раза длиннее первого. Первый пешеход половину пути из А в Б прошел в гору, а вторую — под гору. Второй пешеход, выйдя одновременно с первым, шел с постоянной скоростью по равнине, причем его скорость была в четыре раза больше, чем скорость первого, когда тот шел в гору, и в полтора раза меньше, чем скорость первого под гору. Кто из пешеходов затратил меньше времени на путь из А в Б, и во сколько раз?

2. Решить уравнение  $\sin 3x = \cos \left( 2x - \frac{5\pi}{6} \right)$ .

3. В треугольнике  $ABC$  через вершину  $C$  перпендикулярно медиане  $BM$  проводится прямая, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $N$  и медиану  $BM$  в точке  $K$ . Известно, что  $AB = 15$ ,  $CK = 9$ ,  $KN = 6$ . Найти длину отрезка  $BC$ .

4. Решить неравенство  $3||1 - x| - 2| \leq x + 1$ .

5. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 6$ ,  $BC = 7$ . Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка  $K$  — середина ребра  $SB$ . На отрезке  $AK$  точка  $M$  выбрана так, что  $AM : MK = 6$ . Найти расстояние от точки  $M$  до плоскости  $SCD$ .

### Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 4

1. Из пункта А в пункт Б ведут две дороги: проселочная и недостроенное шоссе, первая половина которого — шоссе, а вторая — бездорожье. Два велосипедиста одновременно отправились из А в Б, причем первый поехал по проселочной дороге, а второй по недостроенному шоссе. Скорость первого велосипедиста, не менявшаяся на всем протяжении пути, в полтора раза ниже, чем скорость второго на шоссе, и в три раза выше, чем скорость второго по бездорожью. Первый затратил на дорогу в полтора раза меньше времени, чем второй. Какая из двух дорог короче, и во сколько раз?

2. Решить уравнение  $\cos 3x + \sin \left( 2x + \frac{2\pi}{3} \right) = 0$ .

3. В треугольнике  $ABC$  через вершину  $C$  перпендикулярно медиане  $BM$  проводится прямая, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $N$ . Известно, что  $AN = 5$ ,  $BN = 10$ ,  $CN = 15$ . Найти длину отрезка  $AC$ .

4. Решить неравенство  $||x - 3| - 2| \leq 5 - x$ .

5. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 8$ ,  $BC = 4$ . Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка  $K$  — середина ребра  $SD$ . На отрезке  $CK$  точка  $M$  выбрана так, что  $CM : MK = 1 : 4$ . Найти расстояние от точки  $M$  до плоскости  $SAB$ .