Открытая олимпиада НГУ по математике

(ФЕН, ГГФ), март 2006, вне Новосибирска

Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 1

1. Два бассейна, объем первого из которых в три раза больше объема второго, начали одновременно заполняться, каждый с помощью своего насоса. Скорость заполнения первого бассейна постоянна, а начальная скорость заполнения второго бассейна, которая в два раза ниже скорости заполнения первого, не менялась, пока второй бассейн не был заполнен наполовину, после чего она из-за неполадок с насосом уменьшилась в три раза. На заполнение какого из бассейнов ушло больше времени, и во сколько раз?

2. Решить уравнение $\sin 3x = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. В треугольнике ABC через вершину C перпендикулярно медиане BM проводится прямая, пересекающая медиану BM в точке K. Известно, что $AB = 10$, $BK = 6$, $KM = 1$. Найти длину отрезка BC.

4. Решить неравенство $2||x-1|-2| \leq 3 - x$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $AD = 6$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка K — середина ребра SC. На отрезке BK точка M выбрана так, что $BM : MK = 4$. Найти расстояние от точки M до плоскости SAD.

Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 2

1. Два землекопа одновременно начали с постоянными скоростями рыть каждый свой котлован, причем первый землекоп работал в полтора раза быстрее второго. Вырыв половину своего котлована, первый землекоп устал и стал работать в три раза медленнее. В результате на весь свой котлован он потратил времени в полтора раза больше, чем второй землекоп на свой. Объем какого из котлованов больше, и во сколько раз?

2. Решить уравнение $\cos 3x + \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

3. В треугольнике ABC через вершину C перпендикулярно медиане BM проводится прямая, пересекающая сторону AB в точке N. Известно, что $AN = 5$, $BN = 15$, $BM = 14$. Найти длину отрезка AC.

4. Решить неравенство $2||3-x|-2| \leq x - 1$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $AD = 8$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка K — середина ребра SA. На отрезке DK точка M выбрана так, что $DM : MK = 2 : 3$. Найти расстояние от точки M до плоскости SBC.

Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 3

1. Из пункта А в пункт Б ведут два пути: один через гору, а второй — по равнине, причем второй путь в два раза длиннее первого. Первый пешеход половину пути из А в Б прошел в гору, а вторую — под гору. Второй пешеход, выйдя одновременно с первым, шел с постоянной скоростью по равнине, причем его скорость была в четыре раза больше, чем скорость первого, когда тот шел в гору, и в полтора раза меньше, чем скорость первого под гору. Кто из пешеходов затратил меньше времени на путь из А в Б, и во сколько раз?

2. Решить уравнение $\sin 3x = \cos\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3. В треугольнике ABC через вершину C перпендикулярно медиане BM проводится прямая, пересекающая сторону AB в точке N и медиану BM в точке K. Известно, что $AB = 15$, $CK = 9$, $KN = 6$. Найти длину отрезка BC.

4. Решить неравенство $3||1 - x| - 2| \leq x + 1$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 7$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка K — середина ребра SB. На отрезке AK точка M выбрана так, что $AM : MK = 6$. Найти расстояние от точки M до плоскости SCD.

Реп-06-ФЕН выезд. Вариант 4

1. Из пункта А в пункт Б ведут две дороги: проселочная и недостроенное шоссе, первая половина которого — шоссе, а вторая — бездорожье. Два велосипедиста одновременно отправились из А в Б, причем первый поехал по проселочной дороге, а второй по недостроенному шоссе. Скорость первого велосипедиста, не менявшаяся на всем протяжении пути, в полтора раза ниже, чем скорость второго на шоссе, и в три раза выше, чем скорость второго по бездорожью. Первый затратил на дорогу в полтора раза меньше времени, чем второй. Какая из двух дорог короче, и во сколько раз?

2. Решить уравнение $\cos 3x + \sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$.

3. В треугольнике ABC через вершину C перпендикулярно медиане BM проводится прямая, пересекающая сторону AB в точке N. Известно, что $AN = 5$, $BN = 10$, $CN = 15$. Найти длину отрезка AC.

4. Решить неравенство $||x - 3| - 2| \leq 5 - x$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$, $BC = 4$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка K — середина ребра SD. На отрезке CK точка M выбрана так, что $CM : MK = 1 : 4$. Найти расстояние от точки M до плоскости SAB.