

Открытая олимпиада НГУ по математике

(ФЕН, ГГФ), март 2006, Новосибирск

Реп-06-ФЕН. Вариант Б1

1. Абитуриент начал писать экзаменационную работу в 9 часов, а закончил между 13 и 14 часами. Найти точное время, затраченное абитуриентом на выполнение задания, если известно, что в момент окончания его работы часовая и минутная стрелки на циферблате часов были направлены в противоположные стороны.

2. Решить уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK . Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке AC и $AC = 20$, $AK = 19$, $AH = 3$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{3x - 2a - 6}{x + a - 6} \leq 0$$

содержит число 5.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 на ребрах AA_1 , A_1C_1 , BC и AB выбраны соответственно точки M , N , K и L так, что $AM = MA_1$, $A_1N = NC_1$, отрезки MK и NL пересекаются в точке P и $MP = PK$. Найти отношение $NP : PL$.

Реп-06-ФЕН. Вариант Б2

1. Заседание приемной комиссии началось в 13 часов, а закончилось между 16 и 17 часами. Найти точное время длительности заседания, если известно, что в конце заседания часовая и минутная стрелки на циферблате часов были направлены в противоположные стороны.

2. Решить уравнение $\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и AD , длины которых равны 10, из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK . Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке AC и $AH : AK : AC = 5 : 14 : 15$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{3a + 16 - 5x}{x + a - 4} \geq 0$$

содержит число 3.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребрах SA , SC , BC и AB выбраны соответственно точки M , N , K и L так, что $SM = AM$, $CN = 2SN$, отрезки MK и NL пересекаются в точке P и $MP = PK$. Найти отношение $NP : PL$.

Реп-06-ФЕН. Вариант Б3

1. Вечером солнце зашло в 18 часов. На следующее утро рассвело между 7 и 8 часами. Найти точное время от заката до рассвета, если известно, что в момент восхода солнца часовая и минутная стрелки на циферблате часов были направлены в противоположные стороны.

2. Решить уравнение $\cos\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK , причем основания перпендикуляров лежат на отрезке AC . Известно, что $AH = 4$, $AK = 6$, $AC = 7$ и $AB : CD = 2$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{3x - 2a - 1}{x + a - 1} \leq 0$$

содержит число 4.

5. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 на ребрах AA_1 , $A_1 B_1$, CD и AD выбраны соответственно точки M , N , K и L так, что $A_1 M = 2AM$, $A_1 N = NB_1$, отрезки MK и NL пересекаются в точке P и $MP = PK$. Найти отношение $NP : PL$.

Реп-06-ФЕН. Вариант Б4

1. Студент лег спать в 2 часа ночи, а проснулся между 10 и 11 часами утра. Найти точное время, потраченное студентом на сон, если известно, что в момент его пробуждения часовая и минутная стрелки на циферблате часов были направлены в противоположные стороны.

2. Решить уравнение $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

3. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 3$ и $CD = 2$ из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK . Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке AC и $AC : AK : AH = 9 : 8 : 3$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{3a + 7 - 4x}{x + a - 5} \geq 0$$

содержит число 2.

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, основание которой является параллелограммом, на ребрах SB , SC , AD и AB выбраны соответственно точки M , N , K и L так, что $SM = 2BM$, $SN = NC$, отрезки MK и NL пересекаются в точке P и $MP = PK$. Найти отношение $NP : PL$.