**Открытая олимпиада НГУ по математике**

(ММФ, ФФ, ФИТ), март 2006, вне Новосибирска

## Реп-06-МФ выезд. Вариант 1

**1.** Два бассейна, объем первого из которых в три раза больше объема второго, начали одновременно заполняться, каждый с помощью своего насоса. Скорость заполнения первого бассейна постоянна, а начальная скорость заполнения второго бассейна, которая в два раза ниже скорости заполнения первого, не менялась, пока второй бассейн не был заполнен наполовину, после чего она из-за неполадок с насосом уменьшилась в три раза. На заполнение какого из бассейнов ушло больше времени, и во сколько раз?

**2.** Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)}=1$.

**3.** В треугольнике $ABC$ через вершину $C$ перпендикулярно медиане $BM$ проводится прямая, пересекающая медиану $BM$ в точке $K$. Известно, что $AB=10$, $BK=6$, $KM=1$. Найти длину отрезка $BC$.

**4.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых один из корней уравнения $ax^2+(2a-6)x+a-7=0$ меньше, чем $-1$, а второй корень не меньше, чем 3.

**5.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=2$, $AD=6$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка $K$ лежит на ребре $AS$ и $AK:KS=2$. На отрезке $BK$ точка $M$ выбрана так, что расстояние от точки $M$ до плоскости $ABCD$ в два раза больше расстояния от $M$ до плоскости $SAD$. Найти отношение $BM:MK$.

## Реп-06-МФ выезд. Вариант 2

**1.** Два землекопа одновременно начали с постоянными скоростями рыть каждый свой котлован, причем первый землекоп работал в полтора раза быстрее второго. Вырыв половину своего котлована, первый землекоп устал и стал работать в три раза медленнее. В результате на весь свой котлован он потратил времени в полтора раза больше, чем второй землекоп на свой. Объем какого из котлованов больше, и во сколько раз?

**2.** Решить уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}=-1$.

**3.** В треугольнике $ABC$ через вершину $C$ перпендикулярно медиане $BM$ проводится прямая, пересекающая сторону $AB$ в точке $N$. Известно, что $AN=5$, $BN=15$, $BM=14$. Найти длину отрезка $AC$.

**4.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых один из корней уравнения $ax^2-(2a-5)x+a-3=0$ больше, чем 3, а второй корень не больше, чем 1.

**5.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=2$, $AD=8$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка $K$ — середина ребра $SC$. На отрезке $DK$ точка $M$ выбрана так, что расстояние от точки $M$ до плоскости $ABCD$ в два раза меньше расстояния от $M$ до плоскости $SBC$. Найти отношение $DM:MK$.

## Реп-06-МФ выезд. Вариант 3

**1.** Из пункта А в пункт Б ведут два пути: один через гору, а второй — по равнине, причем второй путь в два раза длиннее первого. Первый пешеход половину пути из А в Б прошел в гору, а вторую — под гору. Второй пешеход, выйдя одновременно с первым, шел с постоянной скоростью по равнине, причем его скорость была в четыре раза больше, чем скорость первого, когда тот шел в гору, и в полтора раза меньше, чем скорость первого под гору. Кто из пешеходов затратил меньше времени на путь из А в Б, и во сколько раз?

**2.** Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\cos\left(2x-\dfrac{5\pi}{6}\right)}=1.$

**3.** В треугольнике $ABC$ через вершину $C$ перпендикулярно медиане $BM$ проводится прямая, пересекающая сторону $AB$ в точке $N$ и медиану $BM$ в точке $K$. Известно, что $AB=15$, $CK=9$, $KN=6$. Найти длину отрезка $BC$.

**4.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых один из корней уравнения $ax^2-(2a-6)x+a-8=0$ меньше, чем $-2$, а второй корень не меньше, чем 1.

**5.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$, $BC=7$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка $K$ — середина ребра $SD$. На отрезке $AK$ точка $M$ выбрана так, что расстояние от точки $M$ до плоскости $ABCD$ в два раза больше расстояния от $M$ до плоскости $SCD$. Найти отношение $AM:MK$.

## Реп-06-МФ выезд. Вариант 4

**1.** Из пункта А в пункт Б ведут две дороги: проселочная и недостроенное шоссе, первая половина которого — шоссе, а вторая — бездорожье. Два велосипедиста одновременно отправились из А в Б, причем первый поехал по проселочной дороге, а второй по недостроенному шоссе. Скорость первого велосипедиста, не менявшаяся на всем протяжении пути, в полтора раза ниже, чем скорость второго на шоссе, и в три раза выше, чем скорость второго по бездорожью. Первый затратил на дорогу в полтора раза меньше времени, чем второй. Какая из двух дорог короче, и во сколько раз?

**2.** Решить уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)}=-1.$

**3.** В треугольнике $ABC$ через вершину $C$ перпендикулярно медиане $BM$ проводится прямая, пересекающая сторону $AB$ в точке $N$. Известно, что $AN=5$, $BN=10$, $CN=15$. Найти длину отрезка $AC$.

**4.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых один из корней уравнения $ax^2+(2a+5)x+a+6=0$ больше, чем 2, а второй корень не больше, чем $-1$.

**5.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=8$, $BC=4$. Длина боковых ребер пирамиды равна 5. Точка $K$ — середина ребра $SB$. На отрезке $CK$ точка $M$ выбрана так, что расстояние от точки $M$ до плоскости $ABCD$ в два раза меньше расстояния от $M$ до плоскости $SAB$. Найти отношение $CM:MK$.