Открытая олимпиада НГУ по математике

теоретический экзамен

ММФ, ФИТ, ЭФ (экономика), март 2006, Новосибирск

Реп-06-теор. Вариант Д1

1. Найти все значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - ax + 9} + x + b = 0$$

имеет бесконечно много положительных решений, и указать множество этих решений.

2. Точки M и N выбраны на стороне AC треугольника ABC так, что угол ABM равен углу CBN. Доказать, что

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{CN} \cdot \frac{BN}{BM}.$$

3. Два бегуна, стартовав одновременно, с постоянными скоростями бегут по кольцевой дорожке в противоположных направлениях. Один из них пробегает кольцо за 5 минут, а второй — за 8 минут. Найти число различных точек встречи бегунов на дорожке, если они бегали не менее часа.

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точки M и N — середины ребер SC и AD. Доказать, что каждая точка отрезка MN является серединой некоторого отрезка с концами на ребрах SA и CD.

Реп-06-теор. Вариант Д2

1. Найти все значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\sqrt{4x^2 + ax + 4} + 2x + b = 0$$

имеет бесконечно много положительных решений, и указать множество этих решений.

2. Точки M и N выбраны на стороне BC треугольника ABC так, что угол BAM равен углу CAN. Доказать, что

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CN}{BM}.$$

3. Два велосипедиста, стартовав одновременно, ездят по кольцевому треку в одном направлении с постоянными скоростями. Один из них проезжает кольцо за 25 секунд, а второй — за 36 секунд. Найти число различных точек на треке, в которых один велосипедист обгонял другого, если они ездили не менее получаса.

4. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точки M и N — середины ребер AC и A_1B_1. Доказать, что каждая точка отрезка является серединой некоторого отрезка с концами на отрезках AA_1 и CB_1.