Открытая олимпиада НГУ по математике

(ФЕН, ГГФ), март 2006, Новосибирск

Реп-07-ФЕН. Вариант В21

1. Шел Зенон по дороге и встретил сначала черепаху, а затем бежавшего за ней Ахилла. Скорости всех персонажей постоянны. В момент встречи Зенона с черепахой расстояние от них до Ахилла было 20 метров, а когда Ахилл догнал черепаху, Зенон удалился от них на 5 метров. На сколько отставал Ахилл от черепахи в момент его встречи с Зеноном?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = 6 \operatorname{tg} x$.

3. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке M и боковой стороны AB в точке N. Отрезки BM и CN пересекаются в точке K. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AC = 12$ и $BK : KM = 4 : 3$.

4. Решить неравенство $\sqrt{1 - |x|} > \dfrac{1}{2} - x$.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AB = 4$, $CD = 6$, $AC = AD = BC = BD = 7$. Медианы грани BCD пересекаются в точке M. Найти объем пирамиды $MACD$.

Реп-07-ФЕН. Вариант В22

1. С огорода домой шли Дед да Баба. Вдруг мимо них прокатился Колобок. Когда Колобок удалился на 30 метров, Дед с Бабой пустились за ним вдогонку. Колобок был такой маленький, что Дед не заметил его и пробежал мимо, опережая Бабу в этот момент на 10 метров. На какое расстояние он будет опережать Бабу, когда она поравняется с Колобком? Все скорости с момента начала погони считаются постоянными.

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} 3x = 4 \operatorname{ctg} x$.

3. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке M и боковой стороны AB в точке N. Отрезки BM и CN пересекаются в точке K. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если известно, что $AC = 6$ и $CK : KN = 5 : 2$.

4. Решить неравенство $\dfrac{3}{2} - x > \sqrt{2 - |x|}$.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AB = 2$, $BC = 6$, $AB = AC = BD = CD = 4$. Точка M на ребре BD расположена так, что $DM = 1$. Найти объем пирамиды $MABC$.

Реп-07-ФЕН. Вариант B23

1. К кормушке напрямик с постоянными скоростями без остановок бегут цыпленок, за ним курица, а следом петух. Когда курица догнала цыпленка, петух отставал от них на 6 метров, а когда цыпленка догнал петух, курица опережала их на 2 метра. Петух и курица прибежали к кормушке одновременно. На каком расстоянии от кормушки в этот момент был цыпленок?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x = 5$.

3. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке M и боковой стороны AB в точке N. Отрезки BM и CN пересекаются в точке K. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AB = 10$ и $BK : KM = 1 : 2$.

4. Решить неравенство $\sqrt{3 - |x|} > \dfrac{1}{2} - x$.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AC = 2$, $BD = 4$, $AB = AD = BC = DC = 5$. Точка M — середина ребра CD. Найти объем пирамиды $MABD$.

Реп-07-ФЕН. Вариант B24

1. Шарик гонится за зайцем, чтобы отдать ему фотографию, а навстречу Матроскин корову с пастбища ведет. Скорости всех персонажей постоянны. Когда Матроскин встретился с зайцем, тот опережал Шарика на 60 метров, а когда Шарик догнал зайца, Матроскин отдалился от них на 40 метров. На сколько метров Шарик отставал от зайца, когда Матроскин встретил Шарика?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg} x = 7$.

3. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке M и боковой стороны AB в точке N. Отрезки BM и CN пересекаются в точке K. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если известно, что $AB = 5$ и $CK : KN = 5 : 1$.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{3} - x < \sqrt{1 - 2|x|}$.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AC = 2$, $BD = 6$, $AB = AD = BC = DC = 5$. Точка M на ребре AD расположена так, что $AM = 3MD$. Найти объем пирамиды $MBCD$.