

Открытая олимпиада НГУ по математике

теоретический экзамен

ММФ, ФИТ, ЭФ (экономика), март 2006, вне Новосибирска

Реп-07-МФ выезд. Вариант Т1В

1. Известно, что $a > 0$ и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни, один из которых больше 1, а другой меньше -1 . Доказать, что

$$(a + c)^2 > b^2.$$

2. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC окружность касается прямой AC в точке A , проходит через вершину B и пересекает сторону BC в точке M . Доказать, что треугольник AMC равнобедренный.

3. Доказать, что

$$\frac{\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}}{2} = \cos x \quad \text{при всех } x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right].$$

4. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 точки M и N — середины ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Доказать, что плоскости AB_1N , AC_1M и ABC пересекаются по одной прямой.

Реп-07-МФ выезд. Вариант Т2В

1. Известно, что $p < 0$ и уравнение $px^2 + qx + r = 0$ имеет различные действительные корни, каждый из которых по абсолютной величине меньше 1. Доказать, что

$$(p + r)^2 > q^2.$$

2. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC окружность касается прямой AC в точке A , проходит через вершину B и пересекает продолжение стороны BC в точке M . Доказать, что треугольник AMC равнобедренный.

3. Доказать, что

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}}{2} = \sin x \quad \text{при всех } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right].$$

4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 точки M , N и K — середины ребер A_1B_1 , C_1D_1 и DD_1 соответственно. Доказать, что плоскости AD_1M , ANK и $ABCD$ пересекаются по одной прямой.