

Открытая олимпиада НГУ по математике
(ММФ, ФФ, ФИТ), март 2006, вне Новосибирска

Реп-07-МФ выезд. Вариант ВВ21

1. Два автомобиля стартовали одновременно из пункта А и двигались прямолинейно параллельными курсами по дороге, проходящей через пункт Б. В пункт Б они прибыли одновременно. Первый автомобиль на протяжении всего пути двигался равноускоренно. Второй автомобиль сначала двигался равноускоренно, а затем — с постоянной скоростью, достигнутой в результате ускорения на первом участке пути. В пункте Б скорость второго автомобиля составляла 70% скорости первого. Какую часть времени, затраченного на путь из пункта А в пункт Б, второй автомобиль двигался равноускоренно?

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} = 1.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC через вершины A и C проведена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 5$, $CE = 13$, а радиус окружности равен $5\sqrt{10}/2$. Найти площадь треугольника ABC .

4. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 4 \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 9 проведена плоскость α параллельно диагонали AB_1 грани $AA_1 B_1 B$. При пересечении плоскости α с кубом получается трапеция с основаниями $8\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$. Найти площадь этой трапеции.

Реп-07-МФ выезд. Вариант ВВ22

1. Два автомобиля двигались прямолинейно параллельными курсами по дороге, проходящей через пункт А, который они проехали одновременно, а затем также одновременно остановились в пункте Б. Первый автомобиль в пункте А начал торможение и двигался равнозамедленно до пункта Б. Второй автомобиль, пройдя пункт А, двигался с постоянной скоростью некоторое время, а потом перешел на равнозамедленное движение. Найти отношение скоростей автомобилей, с которыми они проехали через пункт А, если известно, что на торможение у второго автомобиля ушло 40% времени, затраченного на путь из пункта А в пункт Б.

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x} = 2.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC через вершины A и C проведена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AC = 15$, $DE = 3$, а радиус окружности равен $5\sqrt{2}/2$. Найти площадь треугольника ABC .

4. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 = 6 \\ 3x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $5\sqrt{2}$ проведена плоскость α параллельно диагонали BC_1 грани $BB_1 C_1 C$. При пересечении плоскости α с кубом получается трапеция с основаниями 8 и 6. Найти площадь этой трапеции.

Реп-07-МФ выезд. Вариант ВВ23

1. Два автомобиля стартовали одновременно из пункта А и двигались прямолинейно параллельными курсами по дороге, проходящей через пункт Б. В пункт Б они прибыли одновременно. Первый автомобиль на протяжении всего пути из пункта А в пункт Б двигался равноускоренно. Второй автомобиль 60% времени, затраченного на путь из пункта А в пункт Б, двигался равноускоренно, а оставшееся время — с постоянной скоростью, достигнутой в результате ускорения на первом участке пути. Найти отношение скоростей автомобилей, с которыми они проехали через пункт Б.

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} = 2.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC через вершины A и C проведена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $CE = 22$, $BE = 3$, а радиус окружности равен $5\sqrt{5}$. Найти площадь треугольника ABC .

4. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 9 \\ x - 3y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 8 проведена плоскость α параллельно диагонали CD_1 грани $CC_1 D_1 D$. При пересечении плоскости α с кубом получается трапеция с основаниями $6\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$. Найти площадь этой трапеции.

Реп-07-МФ выезд. Вариант ВВ24

1. Два автомобиля двигались прямолинейно параллельными курсами по дороге, проходящей через пункт А, который они проехали одновременно, а затем также одновременно остановились в пункте Б. Первый автомобиль в пункте А начал торможение и двигался равнозамедленно до пункта Б. Второй автомобиль, пройдя пункт А, двигался с постоянной скоростью некоторое время, а потом перешел на равнозамедленное движение. Какую часть времени, затраченного на путь из пункта А в пункт Б, второй автомобиль двигался равнозамедленно, если известно, что в пункте А скорость второго автомобиля составляла 30% скорости первого?

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x} = 1.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC через вершины A и C проведена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $CE = 22$, $BD = 5$, а радиус окружности равен $5\sqrt{5}$. Найти площадь треугольника ABC .

4. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = 1 \\ y - 2x = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $4\sqrt{2}$ проведена плоскость α параллельно диагонали $A_1 C_1$ грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. При пересечении плоскости α с кубом получается трапеция с основаниями 6 и 4. Найти площадь этой трапеции.