

**Открытая олимпиада НГУ по математике**  
**теоретический экзамен**

ММФ, ФИТ, ЭФ (экономика), март 2007, Новосибирск

**Реп-07-теор. Вариант Т1**

1. Доказать, что в бесконечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 5, и разностью 7 содержится число, которое делится на 2006.
2. В квадрате  $ABCD$  точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точка  $N$  выбрана на продолжении стороны  $DC$  так, что  $3CN = CD$ . Прямые  $AM$  и  $BN$  пересекаются в точке  $K$ . Доказать, что величина угла  $AKB$  равна  $45^\circ$ .
3. Доказать, что на плоскости  $(x, y)$  существует прямая, параллельная оси  $Oy$ , относительно которой график функции  $y = \sin x + 2 \cos x$  симметричен.
4. В треугольной пирамиде  $ABCD$  ребро  $DA$  перпендикулярно плоскости  $ABC$  и  $AD = BC$ . Точки  $M$  и  $K$  расположены соответственно на ребрах  $AB$  и  $CD$  так, что  $AM : MB = DK : KC$ . Доказать, что  $MK \leq BC$ .

**Реп-07-теор. Вариант Т2**

1. Доказать, что в бесконечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 3, и разностью 5 содержится число, которое делится на 2007.
2. В квадрате  $ABCD$  точка  $M$  на стороне  $BC$  и точка  $N$  на продолжении стороны  $DC$  выбраны так, что  $3BM = BC$  и  $2CN = CD$ . Прямые  $AM$  и  $BN$  пересекаются в точке  $K$ . Доказать, что величина угла  $AKB$  равна  $45^\circ$ .
3. Доказать, что на плоскости  $(x, y)$  существует прямая, параллельная оси  $Oy$ , относительно которой график функции  $y = 3 \sin x + \cos x$  симметричен.
4. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ , у которой  $AD = BC$  и  $AB = AC = DB = DC$ . Точки  $M$  и  $K$  расположены соответственно на ребрах  $AB$  и  $CD$  так, что  $AM : MB = DK : KC$ . Доказать, что  $MK \leq BC$ .