Открытая олимпиада НГУ по математике

теоретический экзамен

ММФ, ФИТ, ЭФ (экономика), март 2007, Новосибирск

Реп-07-теор. Вариант Т1

1. Доказать, что в бесконечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 5, и разностью 7 содержится число, которое делится на 2006.

2. В квадрате $ABCD$ точка M — середина стороны BC, точка N выбрана па продолжении стороны DC так, что $3CN = CD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K. Доказать, что величина угла AKB равна $45°$.

3. Доказать, что на плоскости (x, y) существует прямая, параллельная оси Oy, относительно которой график функции $y = \sin x + 2\cos x$ симметричен.

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро DA перпендикулярно плоскости ABC и $AD = BC$. Точки M и K расположены соответственно на ребрах AB и CD так, что $AM : MB = DK : KC$. Доказать, что $MK \leq BC$.

Реп-07-теор. Вариант Т2

1. Доказать, что в бесконечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 3, и разностью 5 содержится число, которое делится на 2007.

2. В квадрате $ABCD$ точка M на стороне BC и точка N на продолжении стороны DC выбраны так, что $3BM = BC$ и $2CN = CD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K. Доказать, что величина угла AKB равна $45°$.

3. Доказать, что на плоскости (x, y) существует прямая, параллельная оси Oy, относительно которой график функции $y = 3\sin x + \cos x$ симметричен.

4. Дана треугольная пирамида $ABCD$, у которой $AD = BC$ и $AB = AC = DB = DC$. Точки M и K расположены соответственно на ребрах AB и CD так, что $AM : MB = DK : KC$. Доказать, что $MK \leq BC$.