

## § 1. Введение

**1.1.** Мы будем пользоваться теоретико-множественным языком, не обращаясь к аксиоматике теории множеств. Говоря о множестве, мы будем под этим понимать некоторую совокупность объектов, собранных (в множество) по какому-либо признаку и рассматриваемых как единое целое.

Все рассматриваемые объекты связаны между собой отношением принадлежности, и запись  $x \in A$  означает, что  $x$  есть элемент  $A$  (т. е. в этом контексте объект  $A$  — множество, а  $x$  — его элемент). Множество полностью характеризуется составом элементов. О каждом объекте  $x$  и множестве  $A$  можно с определенностью судить, является  $x$  элементом  $A$  или нет. Если  $x$  не элемент  $A$ , то будем писать  $x \notin A$ . Множество, не имеющее элементов, называют *пустым множеством* и обозначают символом  $\emptyset$ .

Говорят, что *множество  $A$  содержится в множестве  $B$*  (или что  $A$  — *подмножество  $B$* ) и пишут  $A \subset B$ , если для любого  $x \in A$  будет  $x \in B$ . Множества  $A, B$  *равны* ( $A = B$ ), если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ . Таким образом, равенство  $A = B$  означает справедливость двух утверждений: если  $x \in A$ , то  $x \in B$ , и если  $x \in B$ , то  $x \in A$ .

Если  $A$  — некоторое множество, а  $P(x)$  — свойство (т. е. повествовательное предложение, истинность которого зависит от выбора элемента  $x$ ), то символом  $\{x \in A : P(x)\}$  обозначают подмножество множества  $A$ , состоящее из всех  $x \in A$ , для которых  $P(x)$  верно.

Если  $A, B$  — множества, то совокупность объектов  $x$  таких, что либо  $x \in A$ , либо  $x \in B$ , образует множество, называемое *объединением* множеств  $A, B$  и обозначаемое через  $A \cup B$ . Совокупность объектов  $x$  таких, что  $x \in A$  и  $x \in B$ , называют *пересечением* множеств  $A$  и  $B$  и обозначают символом  $A \cap B$ . Множество  $\{x \in A : x \notin B\}$  называют *дополнением множества  $B$  до множества  $A$*  (или разностью множеств  $A$  и  $B$ ) и обозначают через  $A \setminus B$ . Множество  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  называют *симметрической разностью множеств  $A$  и  $B$* .

Из двух объектов  $x$  и  $y$  можно составить объект  $(x, y)$ , называемый *упорядоченной парой*, в которой  $x$  — первый элемент, а  $y$  — второй. Характеристическим свойством упорядоченной пары служит такое: равенство  $(x, y) = (s, t)$  равносильно тому, что  $x = s$ ,  $y = t$ . Множество  $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$  называют *прямым произведением множеств  $A, B$* . Можно последовательно определить произведение  $A_1 \times \dots \times A_n$  множеств  $A_1, \dots, A_n$ . Если  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ , то для произведения обычно используют символ  $A^n$ .

### 1.2. Задачи.

1. Приведите пример таких множеств  $A, B, C$ , что  $A \in B$ ,  $B \in C$ , но  $A \notin C$ .

2. Приведите пример множеств  $A, B, C, D, E$ , удовлетворяющих одновременно следующим условиям:  $A \subset B$ ,  $B \in C$ ,  $C \subset D$ ,  $D \subset E$ .

3. Доказать, что для любых множеств  $A, B, C$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C), & A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \\ A \cap (B \setminus C) &= (A \cap B) \setminus (A \cap C), & (A \cup B) \setminus C &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C). \end{aligned}$$

4. Доказать, что для любых множеств  $A, B, C, D$  верно равенство  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

5. Доказать, что множество  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  удовлетворяет условиям, характеризующим упорядоченную пару, т. е.  $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{s\}, \{s, t\}\}$  тогда и только тогда, когда  $x = s$ ,  $y = t$ .

6. Доказать равенства

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

для любых множеств  $A, B, C$ .

1.3. Сформулируем основные понятия, связанные с отображениями.

Отображением, действующим из множества  $X$  в множество  $Y$ , будем называть правило  $f$ , согласно которому каждому элементу  $x$  какого-то подмножества  $X_0$  множества  $X$  сопоставляется один элемент  $y$  множества  $Y$ . При этом будем использовать такие обозначения:  $f(x)$ ,  $y = f(x)$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f : x \mapsto f(x)$ ,  $f : x \mapsto y$ . Множество  $X_0$ , на элементы которого распространяется действие правила (отображения)  $f$ , называют *областью определения*  $f$  и обозначают через  $D(f)$ , множество  $E(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$  называют *множеством значений*  $f$ . Множество

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in D(f), y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

называют *графиком отображения*  $f$ .

Отображение, определенное на числовом множестве и действующее также в числовое множество, называют *функцией*.

Пусть  $f, g$  — отображения. Отображение  $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$  называют *композицией* (или *суперпозицией*) отображений  $f, g$ . Ясно, что  $D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$ .

Множество

$$f[A] = \{f(x) : x \in A \subset D(f)\} = \{y : (\exists x \in A) y = f(x)\}$$

называют *образом множества  $A$* , множество

$$f^{-1}[B] = \{x \in D(f) : f(x) \in B\} = \{x \in D(f) : (\exists y \in B) y = f(x)\}$$

— *прообразом множества  $B$  при отображении  $f$* .

Отображение  $f$  называют *взаимно однозначным (инъективным, различающим, разнозначным)*, если для любых  $x_1, x_2 \in D(f)$  из  $x_1 \neq x_2$  следует, что  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Пусть  $f$  — взаимно однозначное отображение. Отображение  $f^{-1}$ , которое каждому  $v \in E(f)$  сопоставляет такой элемент  $u \in D(f)$ , что  $v = f(u)$ , называют *обратным к  $f$  отображением*.

#### 1.4. Задачи.

**1.** Пусть  $f$  — отображение и  $A, B$  — подмножества  $D(f)$ , а  $C, D$  — подмножества  $E(f)$ . Доказать соотношения

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B], \quad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B],$$

$$f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D], \quad f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$$

$$f^{-1}[f[A]] \supset A, \quad f[f^{-1}[C]] = C.$$

**2.** Пусть  $f, g$  — взаимно однозначные отображения и  $E(f) = D(g)$ . Показать, что  $g \circ f$  взаимно однозначно и  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**3.** Показать, что для любых отображений  $f, g$  и множества  $A \subset E(g \circ f)$  справедливо равенство  $(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]]$ .

**1.5.** Предположим, что некоторое утверждение  $P(n)$ , справедливость которого зависит от натурального  $n$ , верно для первого натурального числа  $n = 1$  и из того, что верно  $P(n)$ , следует, что верно  $P(n + 1)$ . Принцип математической индукции гласит, что в таком случае утверждение  $P(n)$  верно для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.6. Пример.** Доказать равенство

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Действительно, если  $n = 1$ , то сумма слева превращается в одно число 1, и справа имеем  $1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6 = 1$ , так что при

$n = 1$  требуемое равенство верно. Предположим, что оно выполнено при некотором натуральном  $n$ , и докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Используя предположение, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции требуемое равенство будет верным при любом натуральном  $n$ .

### 1.7. Задачи.

#### 1. Доказать равенства

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad (3)$$

#### 2. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

для любого  $n \in \mathbb{N}$ , где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1.$$

#### 3. Доказать неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ , $\alpha > -1$ , $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4. Доказать неравенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \geq 2. \quad (2)$$

**1.8.** Пусть  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  (символом  $\mathbb{R}$  мы обозначаем множество вещественных чисел, а через  $\overline{\mathbb{R}}$  — расширенную числовую прямую, т. е.  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ; для краткости, если нет опасности недоразумений, вместо  $+\infty$  будем писать просто  $\infty$ ).

Число  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  называют *верхней границей* множества  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ , если  $(\forall x \in A) x \leq b$ . Наименьшую из верхних границ множества  $A$  называют его *точной верхней границей* и обозначают через  $\sup A$ . Двойственным образом определяют точную нижнюю границу  $\inf A$  множества  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  как наибольшую из его нижних границ. Если множество  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  имеет верхнюю (нижнюю) границу в  $\mathbb{R}$ , то его называют *ограниченным сверху (снизу)* в  $\mathbb{R}$ . У неограниченного сверху в  $\mathbb{R}$  множества  $A$  будет  $\sup A = +\infty$ .

**1.9. Утверждение.** Каждое подмножество в  $\overline{\mathbb{R}}$  имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Если при этом  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  и  $A$  ограничено сверху (снизу) в  $\mathbb{R}$ , то  $\sup A \in \mathbb{R}$  ( $\inf A \in \mathbb{R}$ ), так что такое множество  $A$  имеет точную верхнюю (нижнюю) границу в  $\mathbb{R}$ .

**1.10. Утверждение.** Для непустого множества  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  равенство  $z = \sup A$  равносильно тому, что

- (а)  $z$  — верхняя граница  $A$ ,
- (б) для любого  $y < z$  существует такое  $x \in A$ , что  $y < x$ .

Если  $\sup A \neq +\infty$ , то условие (б) можно записать в виде: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $x \in A$ , что  $z - \varepsilon < x$ , или что  $z - x < \varepsilon$ .

Двойственное утверждение справедливо и для точных нижних границ.

#### 1.11. Задачи.

**1.** Доказать, что для любого непустого ограниченного множества  $A \subset \mathbb{R}$  и для любого числа  $\lambda \geq 0$  справедливы равенства

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A, \quad \inf \lambda A = \lambda \inf A$$

(здесь  $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ ).

**2.** Доказать, что для любого непустого ограниченного множества  $A \subset \mathbb{R}$  выполнены равенства

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

**3.** Доказать, что для любых непустых ограниченных множеств  $A, B \subset \mathbb{R}$  справедливы равенства

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

(здесь  $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ ).

**4.** Положим  $x^+ = \max\{x, 0\}$ ,  $x^- = \max\{-x, 0\}$ . Показать, что

$$\begin{aligned} \max\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = y + (x - y)^+ = x + (y - x)^+, \\ \min\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = y - (x - y)^- = x - (y - x)^-, \end{aligned}$$

где  $\max\{x, y\}$  и  $\min\{x, y\}$  соответственно наибольшее и наименьшее из чисел  $x, y$ .

**5.** Доказать, что для любого  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$ , существует единственное число  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ , такое, что  $a^2 = x$ .

**1.12. Утверждение** (принцип Архимеда). Пусть  $h > 0$  — произвольное фиксированное вещественное число. Тогда для любого  $x \in \mathbb{R}$  существует единственное  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что  $(k - 1)h \leq x < kh$ .

**1.13. Задача.** Доказать, что для любых  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , в интервале  $(a, b)$  можно указать как рациональное, так и иррациональное число.

**1.14.** Функцию, определенную на множестве  $\mathbb{N}$  натуральных чисел, называют *последовательностью*.

Числовую последовательность  $x_n$  называют *ограниченной сверху* (снизу), если существует такое  $C \in \mathbb{R}$ , что  $x_n \leq C$  ( $x_n \geq C$ ) для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Ограниченную сверху и снизу последовательность называют *ограниченной*.

Коротко ограниченность (сверху и снизу) последовательности  $x_n$  можно записать так:

$$(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) |x_n| \leq C.$$

Неограниченность последовательности  $x_n$  (сверху или снизу) запишется следующим образом:

$$(\forall C > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) |x_n| > C.$$

### 1.15. Задачи.

1. Доказать ограниченность последовательностей

- (1)  $x_n = \frac{2n^2 - 1}{2 + n^2}$ ,      (2)  $x_n = \frac{1 - n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ ,  
(3)  $x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ ,      (4)  $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$ ,  
(5)  $x_n = \sqrt[n]{n}$ ,      (6)  $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x > 0$ .

2. Доказать неограниченность последовательностей

- (1)  $x_n = \sqrt{n^4 + n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - n^3 + 1}$ ,      (2)  $x_n = \sqrt[n]{n!}$ ,  
(3)  $x_n = \frac{2^n}{n^2}$ ,      (4)  $x_n = \frac{a^n}{n^k}, \quad a > 1, k \in \mathbb{R}$ .

**1.16.** Число  $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ( $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ) называют *точной верхней (нижней) границей последовательности*  $x_n$  и обозначают соответственно через  $\sup x_n$  и  $\inf x_n$ .

**1.17. Пример.** Найти точные границы последовательности  $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$ .

Легко заметить, что наша последовательность ограничена сверху единицей, а снизу — нулем. Используя свойства периодичности синуса, можно утверждать, что множитель  $\sin^2 \frac{n\pi}{4}$  принимает значение 0 на номерах вида  $n = 4k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , значение  $1/2$  на номерах вида  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , и значение 1 на номерах вида  $n = 4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Последовательность  $\frac{n}{n+1}$  положительна и возрастает. Из этих наблюдений можно сделать вывод, что найдется такой номер  $n \in \mathbb{N}$ , для которого  $x_n = 0$  (и таких номеров будет много). Нижняя граница, достигаемая на каком-то элементе, очевидно, будет точной, так что  $\inf x_n = 0$ . Займемся точной верхней границей. Умножая близкое к единице значение  $\frac{n}{n+1}$  на единицу (при соответствующих номерах), мы будем получать близкие к единице числа. Это позволяет предположить, что точной верхней границей будет единица. Обоснуем эту гипотезу. Действительно, пусть задано произвольное  $\varepsilon > 0$ . Возьмем номер  $n$  вида  $4k + 2$  и попытаемся подобрать такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $1 - \varepsilon < x_{4k+2}$ , т. е.  $1 - \varepsilon < \frac{4k+2}{4k+3}$ . Решая это неравенство, в котором  $\varepsilon$  считается параметром, а  $k$  — искомой величиной, получим, что при  $\varepsilon \geq 1$  требуемое неравенство выполнится при любом  $k$ , а при  $\varepsilon < 1$  — для  $k > \frac{1-3\varepsilon}{4\varepsilon}$ . Итак, правило выбора по заданному  $\varepsilon > 0$  требуемого номера  $n$  найдено, так что  $\sup x_n = 1$ .

### 1.18. Задачи.

1. Найти точные границы последовательностей

$$(1) x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}, \quad (2) x_n = (-1)^{n-1} \left( 2 + \frac{3}{n} \right),$$

$$(3) x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}, \quad (4) x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}.$$

2. Доказать, что для любых числовых последовательностей  $x_n, y_n$  выполнены неравенства

$$\inf x_n + \inf y_n \leq \inf(x_n + y_n) \leq \inf x_n + \sup y_n \\ \leq \sup(x_n + y_n) \leq \sup x_n + \sup y_n,$$

а для последовательностей  $x_n \geq 0, y_n \geq 0$  — неравенства

$$\inf x_n \cdot \inf y_n \leq \inf(x_n \cdot y_n) \leq \inf x_n \cdot \sup y_n \\ \leq \sup(x_n \cdot y_n) \leq \sup x_n \cdot \sup y_n.$$

Привести примеры последовательностей, для которых неравенства строгие.

**1.19.** Последовательность  $x_n$  называют *возрастающей*, *неубывающей*, *убывающей* и *невозрастающей*, если для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполнено соответственно неравенство  $x_n < x_{n+1}$ ,  $x_n \leq x_{n+1}$ ,  $x_n > x_{n+1}$ ,  $x_n \geq x_{n+1}$ . Последовательность, обладающую одним из указанных свойств, называют *монотонной*. Для доказательства монотонности последовательности обычно исследуют знак разности  $x_{n+1} - x_n$ , а для положительной последовательности можно также попытаться сравнить с 1 отношение  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ .

**1.20. Задача.** Доказать, что последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , возрастает и ограничена сверху, а последовательность  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , убывает и ограничена снизу.

## § 2. Предел последовательности

**2.1.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называют *пределом последовательности*  $x_n$  (и используют при этом обозначения  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $a = \lim x_n$  или  $x_n \rightarrow a$ ), если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Важно понимать, что для обоснования равенства  $a = \lim x_n$  мы должны найти **правило** выбора требуемого номера  $n_0$  в зависимости от заранее заданного  $\varepsilon > 0$ . При доказательстве равенства  $a = \lim x_n$  для конкретных последовательности  $x_n$  и числа  $a$  следует рассуждения начинать «с конца», т. е. с анализа неравенства  $|x_n - a| < \varepsilon$ , и постараться отвечать на вопрос «откуда это неравенство можно получить», «что может обеспечить это неравенство»? Для этого можно, например, упрощая выражение  $|x_n - a|$ , попробовать ограничить его сверху какой-то более простой величиной  $\alpha_n$ , для которой проще подобрать номер  $n_0$  такой, что  $\alpha_n < \varepsilon$  для всех  $n \geq n_0$ . Ясно, что для таких номеров будет и  $|x_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$ . Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока мы не придем к настолько простой ограничивающей сверху последовательности, для которой требуемый номер найти легко (например, к последовательности вида  $1/n$  или  $x^n$ ,  $0 < x < 1$ ).

## 2.2. Примеры.

1. Доказать, что  $\lim \frac{2n}{n^3 + 1} = 0$ . Действительно, пусть задано произвольное  $\varepsilon > 0$ . Оценим последовательность сверху более простой последовательностью, для которой выбор соответствующего номера нетруден:

$$\frac{2n}{n^3 + 1} < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

Решая неравенство  $\frac{2}{n} < \varepsilon$ , находим, что оно выполняется для  $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$ , так что в качестве требуемого номера можно взять какое-либо натуральное число, большее чем  $\frac{2}{\varepsilon}$ , например  $n_0 = [2/\varepsilon] + 1$  (здесь квадратные скобки указывают на целую часть числа).

2. Доказать, что  $\lim \frac{n}{2^n} = 0$ . В самом деле, по индукции легко доказать, что  $n^2 \leq 2^n$  для  $n \geq 4$ , значит,  $\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Подберем  $n_0 \in \mathbb{N}$  так, чтобы  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Тогда для  $n \geq n_0$  будет  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , а значит, и  $\frac{n}{2^n} < \varepsilon$ .

## 2.3. Задачи.

1. Доказать равенства

$$(1) \quad \lim \frac{n}{n+1} = 1, \quad (2) \quad \lim \frac{1}{n!} = 0,$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin n!}{(n+1)^3} = 0, \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = 1.$$

2. Доказать равенства

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0, \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1, \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0, \quad (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \quad |q| < 1,$$

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad (9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

3. Доказать, что если последовательность  $x_n$  сходится, то последовательность средних арифметических  $a_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  также сходится, при этом  $\lim a_n = \lim x_n$ . Обратное неверно.

2.4. Говорят, что предел последовательности  $x_n$  равен  $+\infty$  или  $-\infty$ , или  $\infty$  и пишут соответственно  $\lim x_n = +\infty$ ,  $\lim x_n = -\infty$ ,  $\lim x_n = \infty$ , если

$$(\forall E > 0)(\exists n_0(E))(\forall n \geq n_0) x_n > E \quad (\text{соответственно } x_n < -E, |x_n| > E).$$

О последовательности с бесконечным пределом говорят, что она *бесконечно большая*. Если последовательность имеет конечный предел, ее называют *сходящейся*. Если  $\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ , то говорят, что последовательность *имеет предел* (в  $\overline{\mathbb{R}}$ ).

## 2.5. Задачи.

1. Доказать, что последовательность  $x_n = n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$  неограниченная, но не является бесконечно большой.

2. Доказать, что

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\log_a n)^p = +\infty, \quad a > 1, \quad p \geq 1;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n}) = +\infty;$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (4\sqrt{n} - n) = -\infty; \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \sqrt[n]{n}} = -\infty.$$

2.6. **Утверждение.** Если  $x_n, y_n$  — сходящиеся последовательности и  $x = \lim x_n, y = \lim y_n$ , то последовательности  $x_n + y_n, x_n \cdot y_n, \frac{x_n}{y_n}$  также сходятся (последняя при условии  $y \neq 0$ ), при этом

$$\lim(x_n + y_n) = x + y, \quad \lim x_n y_n = xy, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

## 2.7. Задачи.

1. Пусть последовательность  $x_n$  сходится, а  $y_n$  расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей  $x_n + y_n$ ,  $x_n y_n$ ?

2. Распространить утверждения пункта 2.6 на случай, когда предел лежит в  $\overline{\mathbb{R}}$ , т. е. может быть бесконечным — сформулировать и доказать соответствующие результаты.

2.8. Как можно заметить, в определении предела участвует само значение предела. Однако бывает важно всего лишь знать, сходится последовательность или нет. Сформулированный ниже критерий дает принципиальную возможность судить о сходимости числовой последовательности, не прибегая к значению ее предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность  $x_n$  называют *фундаментальной*, или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall m > n_0 \forall n > n_0) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Условие фундаментальности иногда удобно использовать в следующем виде:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n > n_0 \forall p \geq 0) \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

**Критерий Коши.** Для существования конечного предела числовой последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

## 2.9. Задачи.

1. Используя критерий Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n, \quad |a_k| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, \quad |q| < 1; \quad (1)$$

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}; \quad (2)$$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}; \quad (3)$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}. \quad (4)$$

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

3. Говорят, что последовательность  $x_n$  имеет ограниченное изменение, если существует такое число  $C$ , что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| \leq C$$

для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится. Обратное неверно (построить пример).

**2.10.** Пусть  $x_n$  — последовательность, а  $n_k$  — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т. е.  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Последовательность  $y_k = x_{n_k}$ , т. е. композицию данной последовательности и строго возрастающей последовательности номеров, называют *подпоследовательностью последовательности  $x_n$* .

Если какая-то подпоследовательность последовательности имеет предел, его называют *частичным пределом данной последовательности*.

**Теорема.** Из всякой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел (в  $\mathbb{R}$ ). Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Теорема** (о сходимости монотонной последовательности). Всякая монотонная последовательность имеет предел (в  $\mathbb{R}$ ). Если при этом последовательность возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то она сходится (в  $\mathbb{R}$ ).

### 2.11. Задачи.

1. Доказать, что монотонная последовательность сходится, если сходится некоторая ее подпоследовательность.
2. Найти частичные пределы последовательностей из задачи 1.18.1.
3. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
4. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ .
5. Доказать, что фундаментальная последовательность сходится, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

**2.12.** Пусть  $x_n$  — последовательность вещественных чисел. Составим последовательности

$$y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}, \quad z_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Последовательность  $y_n$  невозрастающая, а  $z_n$  неубывающая. Их пределы называют соответственно *верхним* и *нижним* пределами данной последовательности и обозначают через  $\overline{\lim} x_n$  (или  $\limsup x_n$ ) и  $\underline{\lim} x_n$  (или  $\liminf x_n$ ).

**2.13. Задача.** Показать, что верхний и нижний пределы суть наибольший и наименьший из частичных пределов соответственно.

### 2.14\*. Задачи.

1. Пусть  $\overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ , где  $x_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $\lim x_n = 0$ .
2. Пусть последовательность  $x_n$  такова, что  $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ . Доказать, что  $\frac{x_n}{n} = a$ .
3. Пусть  $x_1 > 0$  и  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , где  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что существует  $\lim x_n$  и найти его.
4. Пусть  $a > 0$ ,  $x_1 = \sqrt{a}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что существует  $\lim x_n$  и найти его.
5. Пусть  $\lim x_n = x$ ,  $\lim y_n = y$ , где  $y \neq 0$  и  $y_1 + y_2 + \dots + y_n \neq 0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{y_1 + y_2 + \dots + y_n} = \frac{x}{y}.$$

6. Пусть  $x_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = x$ . Доказать, что  $\lim \sqrt[n]{x_n} = x$ .

## § 3. Предел функции

**3.1.** Возьмем точку  $p$  в расширенной числовой прямой  $\overline{\mathbb{R}}$  и определим понятие окрестности такой точки. Если  $p \in \mathbb{R}$ , т. е. точка  $p$  конечна, то окрестностью ее будем считать любой промежуток вида  $(p - r, p + r)$ , где  $r > 0$ . Если же  $p = +\infty$ , то окрестностью будет считать любой промежуток  $(r, +\infty)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , для  $p = -\infty$  — промежуток  $(-\infty, r)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , и окрестностями «беззнаковой» бесконечности будем считать множества  $\{x \in \mathbb{R} : |x| > r\}$ ,  $r > 0$ .

Точку  $p$  называют *предельной точкой множества*  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ , если в любой ее окрестности есть точка множества  $X$ , отличная от  $p$ . Говоря о пределе функции в точке, мы всегда, не оговаривая каждый раз, будем предполагать, что эта точка предельная для области определения функции.

Пусть даны функция  $f$  и точка  $a$ , предельная точка области ее определения. Число  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  называют *пределом функции*  $f(x)$  *при*  $x$ , *стремящемся к*  $a$ , если для любой окрестности  $U$  точки  $l$  найдется окрестность  $V$  точки  $a$  такая, что для любого  $x \in V \cap D(f)$ ,  $x \neq a$ , выполнено включение  $f(x) \in U$ . При этом используют такие обозначения:  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ , и говорят, что  $l$  есть *предел*  $f(x)$  *при*  $x$ , *стремящемся к*  $a$ , или что  $f$  *сходится к*  $l$  *при*  $x$ , *стремящемся к*  $a$ .

Используя определение окрестности конечной или бесконечной точки из  $\overline{\mathbb{R}}$ , можно дать символическое описание факта сходимости. Так, если  $a \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{R}$ , то соотношение  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

или

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, |x - a| < \delta, x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

**Теорема** (определение предела функции с использованием предела последовательности). Пусть даны функция  $f$  и точка  $a$ , предельная точка области ее определения. Число  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  является пределом функции  $f$  в точке  $a$  в том и только в том случае, если для любой последовательности  $x_n$  из  $D(f)$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$  и  $x_n \neq a$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l.$$

Сформулированный критерий бывает полезен при доказательстве отсутствия какого-либо предела у функции  $f$  в точке  $a$ : достаточно найти две последовательности  $x'_n, x''_n$ , удовлетворяющие указанным в теореме требованиям и такие, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x''_n)$ .

**3.2. Задача.** Записать в терминах  $\varepsilon - \delta$  следующие соотношения, в которых предполагается, что  $a, l \in \mathbb{R}$ :

- |                                                   |                                                    |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l,$       | (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l,$       |
| (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$       | (4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$       |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty,$ | (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty,$  |
| (7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty,$ | (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$ |

**3.3.** Говорят, что  $l$  есть *предел  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  слева (справа)*, если для любой окрестности  $U$  точки  $l$  можно указать такую окрестность  $V$  точки  $a$ , что для всех  $x \in V$  таких, что  $x < a$  (соответственно  $x > a$ ) выполнено соотношение  $f(x) \in U$ . При этом используют обозначения  $l = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ,  $l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  соответственно. О пределах слева и справа говорят как об *односторонних пределах*.

Для  $a, l \in \mathbb{R}$  в терминах  $\varepsilon - \delta$  понятия пределов слева и справа записываются соответственно так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a - \delta < x < a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a < x < a + \delta) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

**3.4. Задача.** В терминах  $\varepsilon - \delta$  выписать следующие утверждения:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ,      (2)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ ,  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ ,      (4)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ .

**3.5.** Приведем формулировки теорем о пределах, которые будут использованы ниже при нахождении пределов конкретных функций.

**Теорема** (о связи предела с арифметическими операциями). Пусть даны функции  $f, g$ , заданные на множестве  $X$ , и точка  $a$ , предельная точка множества  $X$ . Предположим, что существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Тогда существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ ,

$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$ , а если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , то и предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x)$ , при этом

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

**Теорема** (о пределе композиции, или о замене переменной). Предположим, что существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ,  $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = b$  в расширенной числовой прямой  $\overline{\mathbb{R}}$ . Предположим, что, кроме того, выполняется по крайней мере одно из условий

- (1) для  $x$  из некоторой окрестности точки  $a$ ,  $x \neq a$ , будет  $f(x) \neq l$ ,  
 (2) точка  $l$  входит в область определения функции  $g$  и  $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = g(l)$  (т. е.  $g$  непрерывна в точке  $l$ ).

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = b$ .

В случае выполнения условия (2) теоремы ее результат можно записать в виде  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$ , т. е. знак предела можно внести внутрь функции  $g$ .

Применение теоремы о замене переменной обычно происходит следующим образом. Допустим, нам надо найти предел функции  $h(x)$  при  $x \rightarrow a$ . Допустим, нам удалось так преобразовать данную функцию, что в ней оказался выделенным какой-то блок, который мы могли бы обозначить новой буквой, т. е. нам удастся представить функцию  $h(x)$

в виде композиции  $h(x) = g(f(x))$ . Если мы теперь положим  $y = f(x)$  и найдем, что выполнены условия теоремы о пределе композиции, т. е. существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , существует  $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = b$ , а также выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы, то результат ее гарантирует существование предела  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ , равного  $b$ . Иначе говоря, нахождение предела сложной функции эта теорема позволяет сводить к нахождению пределов более простых функций, ее составляющих.

**Теорема** (о пределе монотонной функции). Пусть функция  $f$  возрастает на множестве  $(a - r, a) \cap D(f)$  или на множестве  $(a, a + r) \cap D(f)$  при некотором  $r > 0$ . Тогда существуют соответственно

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D(f), x \in (a - r, a)\},$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D(f), x \in (a, a + r)\}.$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для убывающей вблизи точки  $a$  функции.

**Теорема** (о пределе произведения бесконечно малой на ограниченную). Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , а функция  $g$  ограничена в некоторой окрестности точки  $a$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ .

**Теорема** (критерий Коши существования конечного предела функции в точке). Пусть даны функция  $f$  и точка  $a$ , предельная точка области ее определения. Для существования конечного предела функции  $f$  в точке  $a$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  можно было указать такую окрестность  $V$  точки  $a$ , что для любых  $x', x'' \in V$  таких, что  $x' \neq a$ ,  $x'' \neq a$ , выполнялось неравенство  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

**3.6.** При нахождении пределов мы будем использовать небольшой набор пределов, называемых обычно *замечательными пределами*. В нем собраны пределы, отражающие предельные свойства основных элементарных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e, \quad (3.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (3.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (3.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \quad (3.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \mu. \quad (3.5)$$

Кроме выписанных мы будем также использовать равенство, отражающее сравнительный рост показательной и степенной функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{для любых } a > 1, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

При нахождении пределов надо пользоваться теоремами о пределах суммы, произведения, отношения, композиции, если выполнены их условия. Однако определенную трудность вызывают ситуации, когда не выполнены условия утверждения, которое следовало бы применить. Так бывает, например, когда рассматривается предел отношения, но пределы знаменателя и числителя равны нулю или бесконечны. В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность соответствующего вида, например, вида  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ , и при нахождении предела такую неопределенность надо «раскрыть», т. е. провести такие преобразования, которые ее исключили бы. Кроме указанных встречаются также неопределенности вида  $0^0$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$  — это значит, что рассматриваются соответственно пределы  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)}$  ( $f(x) > 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot h(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} l(x)^{h(x)}$ , где  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} l(x) = 1$ . Для раскрытия первых двух полезно иметь в виду соотношения

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad f(x)h(x) = \frac{f(x)}{1/h(x)} = \frac{h(x)}{1/f(x)}.$$

В случае неопределенности вида  $1^\infty$  можно обратиться к замечательному пределу (1) либо использовать равенство  $a^b = e^{b \ln a}$ .

При нахождении пределов мы будем использовать следующее легко устанавливаемое равенство:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)},$$

если только  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)$  существует (хотя бы бесконечный). В частности, если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  и  $a^2 + b^2 \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = a^b. \quad (3.6)$$

### 3.7. Примеры.

1. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$ .

Заметим, что мы имеем неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ , так как предел числителя и предел знаменателя равны бесконечности. Преобразуем знаменатель, выделив отдельно стремящуюся к бесконечности переменную:  $(2x-1)^4 = x^4(2-1/x)^4$ . Совершая аналогичное преобразование в числителе и применяя теорему о пределе отношения, получим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{x^4(2-1/x)^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{(2-1/x)^4} = \frac{49}{16}.\end{aligned}$$

**2.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1})$ .

Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида  $\infty - \infty$  (ранее в тексте не отмеченной, ибо такие неопределенности проще раскрывать с помощью преобразований конкретных выражений). Умножив и разделив на сумму корней, а затем применив теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} = 0,$$

ибо знаменатель стремится к  $\infty$ .

Найдем этот предел иначе. Вынося из-под корня переменную  $x$ , получим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-1/x^2} - \sqrt{1+1/x^2}}{1/|x|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1+y^2}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1-y^2)^{1/2} - 1 + (1-(1+y^2)^{1/2})}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1-y^2)^{1/2} - 1}{-y^2} \cdot (-y) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - (1+y^2)^{1/2}}{y^2} \cdot y = 0,\end{aligned}$$

где сделана замена  $y = 1/|x|$  и использованы соответствующие теоремы.

**3.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$ .

Легко заметить, что здесь мы имеем дело с неопределенностью вида  $\frac{0}{0}$ . В числителе стоят кубические корни, т. е. степенные функции,

и нам желательно узнать, можно ли будет применить замечательный предел, связанный со степенной функцией. Для это надо, чтобы предел подкоренного выражения был равен единице (поскольку в соответствующем пределе (3.5) участвует выражение вида  $(1+x)^\mu$ , где  $x \rightarrow 0$ ). У нас требуемое свойство выполняется, ибо  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 1$ . Для того чтобы использовать замечательный предел, надо подкоренное выражение представить в виде  $1+t$ , где  $t \rightarrow 0$ . Это сделать легко, прибавив и отняв под корнем единицу:  $\cos 4x = 1 + (\cos 4x - 1)$ ,  $\cos 5x = 1 + (\cos 5x - 1)$ . Теперь проведем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + (\cos 4x - 1)} - \sqrt[3]{1 + (\cos 5x - 1)}}{1 - \cos 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1) - ((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{1 - \cos 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1) - ((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} - \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} = L. \end{aligned}$$

Для возможности использования замечательного предела умножим и разделим соответствующие дроби на стремящиеся к нулю выражения  $\cos 4x - 1$ ,  $\cos 5x - 1$ , сделаем подходящую группировку и займемся возникшими дробями:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} \cdot \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} \\ &\quad - \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} \end{aligned}$$

Используя теорему о замене переменной и предел (3.5), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} &= \frac{1}{3}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Займемся пределами

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(4x/2)}{2 \sin^2(3x/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(4x/2)}{(4x/2)^2} \cdot \frac{(4x/2)^2}{(3x/2)^2} \cdot \frac{(3x/2)^2}{\sin^2(3x/2)} = -\frac{16}{9}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} = -\frac{25}{9}.$$

Собирая полученные результаты, имеем

$$L = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{25}{9}\right) = \frac{1}{3}.$$

**4.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2}$ .

Заметим, что в этом примере мы имеем дело с неопределенностью вида  $1^\infty$ , которая связана с пределом (3.1). Чтобы воспользоваться указанным пределом, надо в основании степени выделить слагаемое вида  $1 + \alpha$ , где  $\alpha$  — бесконечно малая. Для этого в основании прибавим и отнимем единицу, а затем умножим и разделим показатель степени на получившуюся бесконечно малую величину:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}})^{\frac{\cos x - 1}{-x^2}}.\end{aligned}$$

Ориентируясь на использование равенства (3.6), займемся отдельно пределом  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-x^2}$ . Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(x/2)}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Согласно равенству (3.6)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} = e^{1/2}$ .

### 3.8. Задачи.

**1.** Найти пределы

$$\begin{aligned}(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}, \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}, \quad (6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \\
(7) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}, \\
(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}, \quad (10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}, \\
(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \\
(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \\
(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x), \\
(15) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, \quad (16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}, \\
(17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}, \\
(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}, \\
(19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}, \quad (20) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}), \\
(21) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}, \quad (22) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1}, \\
(23) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x, \quad (24) \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}, \\
(25) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}, \quad (26) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \\
(27) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x), \quad (28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, \\
(29) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \quad a > 0, \quad (30) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, \quad a > 0, \\
(31) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), \quad x > 0, \quad (32) \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n(\pi/4 + 1/n), \\
(33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}, \quad (34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}, \\
(35) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{1/x^2}, \quad (36) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x},
\end{aligned}$$

$$(37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x}, \quad (38) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}},$$

$$(39) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \quad a > 0, b > 0,$$

$$(40) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a+b} \right)^{1/x}, \quad a > 0, b > 0.$$

$$(41) \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x, \quad (42) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - x \cos \sqrt{x}}.$$

**3.9.** Опишем терминологию, связанную с асимптотическим сравнением функций, т. е. сравнением их в пределе при стремлении аргумента к какой-то точке. Нам надо будет договориться о сравнении одной функции относительно другой. Для этого естественно рассматривать их отношение  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , однако при этом надо делать оговорки, связанные с возможностью знаменателя обращаться в нуль. Чтобы не иметь таких неудобств, можно для указанного выше отношения ввести свое обозначение и тем самым рассматривать представление одной из сравниваемых функций, например  $f(x)$ , через другую в виде произведения  $f(x) = g(x)\varphi(x)$ , где в качестве  $\varphi(x)$  может выступать отношение  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  в тех точках, где  $g(x) \neq 0$ .

Две функции асимптотически сравниваются как правило в тех случаях, когда они обе либо бесконечно малые, либо бесконечно большие. Используемые при этом обозначения одинаковы в соответствующих ситуациях, а терминология немного отличается.

Итак, обращаясь к сравнению функций  $f$  и  $g$ , предположим, что  $f$  представлена в виде  $f(x) = g(x)\varphi(x)$ . Пусть  $a$  — предельная точка того множества, на котором эти функции рассматриваются. Если имеет место равенство  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ , то говорят, что  $f$  есть *о-малое относительно  $g$*  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , и используют обозначение  $f(x) = o(g(x))$ . Если при этом  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , то говорят, что  $f$  — *бесконечно малая более высокого порядка, чем  $g$* , или что *порядок малости функции  $f$  выше, чем у  $g$* , или что  $f$  *стремится к нулю быстрее, чем  $g$* . Если же  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , то говорят, что  $f$  *растет медленнее, чем  $g$* , или что  $g$  *растет быстрее, чем  $f$* .

Предположим теперь, что в представлении  $f(x) = g(x)\varphi(x)$  функция  $\varphi$  обладает следующим свойством: существует такая окрестность точки  $a$ , на которой  $\varphi$  ограничена. В этом случае говорят, что  $f$  —

$O$ -большое по сравнению с  $g$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , и используют обозначение  $f(x) = O(g(x))$ . Если при этом  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , то говорят, что  $f$  — бесконечно малая порядка не выше, чем  $g$ , или что порядок малости функции  $f$  не выше, чем у  $g$ . Если же  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , то говорят, что  $f$  растет не быстрее, чем  $g$ .

Если одновременно  $f(x) = O(g(x))$  и  $g(x) = O(f(x))$ , то говорят, что функции  $f$  и  $g$  одного порядка (малости или роста) при  $x \rightarrow a$ .

Если при  $x \rightarrow a$  функция  $f(x)$  представима в виде  $f(x) = g(x) + o(g(x))$ , то говорят, что  $g(x)$  — главная часть функции  $f(x)$ . Полагая  $o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ , тот факт, что  $g$  есть главная часть  $f$ , можно записать в виде  $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ . Если при этом в некоторой окрестности точки  $a$  функция  $g$  отлична от нуля, то последнее соотношение можно записать в виде  $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow a$ , или  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ . Если  $g(x)$  — главная часть  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят также, что функции  $f$  и  $g$  эквивалентны при  $x \rightarrow a$  и используют обозначение  $f(x) \sim g(x)$ .

Чаще всего в качестве бесконечно малых или бесконечно больших, с которыми сравнивают данные функции, берут функции вида  $(x-a)^\alpha$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Если  $f(x) = o(x-a)^\alpha$  при  $x \rightarrow a$  и  $\alpha > 0$ , то говорят, что  $f$  — величина более высокого порядка (малости), чем  $\alpha$ , или что у  $f$  порядок малости более высокий, чем  $\alpha$ . Если же  $f(x) \sim (x-a)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то говорят, что  $f$  имеет порядок  $\alpha$  (малости или роста, в зависимости от знака  $\alpha$ ). Аналогичную терминологию можно описать и в том случае, если сравнивают с функцией вида  $x^\alpha$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Важно понимать, что символами типа  $O(f(x))$ ,  $o(f(x))$ , если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а **класс функций, обладающих отмеченным в символе свойством**, так что если говорят «возьмем функцию  $O(f(x))$  или  $o(f(x))$  при  $x \rightarrow a$ », то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладающая указанным свойством, т. е. некоторая функция  $h(x)$  такая, что  $h(x) = \varphi(x)f(x)$ , где  $\varphi(x)$  ограничена вблизи  $a$  или  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ . В следующих ниже примерах и задачах мы познакомимся с некоторыми правилами обращения с асимптотическими равенствами.

### 3.10. Примеры.

1. Доказать, что  $o(o(f(x))) = o(f(x))$  при  $x \rightarrow a$ .

Написанное равенство означает, что любая функция, обладающая указанным в левой части равенства свойством, будет бесконечно малой по сравнению с  $f$ . Пусть  $h(x)$  — какая-либо функция, обладающая

тем свойством, что  $h(x) = o(o(f(x)))$ , и надо показать, что  $h(x) = o(f(x))$ . Согласно условию существует такая бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  функция  $\theta(x)$ , что  $h(x) = \theta(x)g(x)$ , где  $g(x) = o(f(x))$ . Последнее означает, что  $g(x) = \eta(x)f(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0$ . Собирая, получим  $h(x) = \theta(x)\eta(x)f(x)$ , а так как  $\lim_{x \rightarrow a} \theta(x)\eta(x) = 0$ , по определению  $h(x) = o(f(x))$ . Требуемое равенство установлено.

**2.** Доказать, что  $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$  при  $x \rightarrow a$ .

Действительно, это соотношение означает, что функция, обладающая свойством, указанным в левой части, будет обладать также свойством, указанным в правой. Свойство, указанное в левой части, означает, что рассматривается сумма двух функций  $h(x) + g(x)$ , где  $h(x) = \varphi(x)f(x)$ ,  $g(x) = \psi(x)f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$ . Тогда  $h(x) + g(x) = (\varphi(x) + \psi(x))f(x)$ , а поскольку  $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$ , то  $h(x) + g(x) = o(f(x))$ , что и требовалось.

### 3.11. Задачи.

**1.** Доказать соотношения при  $x \rightarrow a$ :

$$(1) \quad O(o(f(x))) = o(f(x)), \quad (2) \quad O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).$$

**2.** Пусть  $x \rightarrow 0$  и  $\beta > \alpha > 0$ . Показать, что

$$(1) \quad o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\alpha), \quad (2) \quad o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}).$$

**3.** Пусть  $x \rightarrow 0$  и  $\beta > \alpha > 0$ . Показать, что

$$(1) \quad O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\alpha), \quad (2) \quad O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta}).$$

**4.** Пусть  $x \rightarrow \infty$  и  $\beta > \alpha > 0$ . Показать, что

$$(1) \quad O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta), \quad (2) \quad O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta}).$$

**3.12.** Асимптотические равенства удобно использовать при нахождении пределов — они позволяют свести процесс нахождения предела к простым преобразованиям многочленов, раскрытию скобок, приведению подобных членов и выделению главной части. Конечно, для этого надо иметь набор конкретных асимптотических равенств. Поскольку все примеры по нахождению пределов связаны с элементарными функциями, мы ограничимся тем, что основные замечательные пределы перепишем в форме асимптотических равенств, в которых  $x \rightarrow 0$ :

$$\sin x = x + o(x), \quad (3.7)$$

$$a^x = 1 + x \ln a + o(x), \quad (3.8)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad (3.9)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x). \quad (3.10)$$

Во всех этих равенствах бесконечно малые  $o(x)$  можно конкретизировать, т. е. записать более точные приближения функций многочленами. Такие равенства будут обоснованы позже, мы же будем сейчас их использовать при нахождении пределов в случае необходимости. Итак, для любого фиксированного  $n \in \mathbb{N}$  справедливы равенства, в которых  $x \rightarrow 0$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad (3.11)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (3.12)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (3.13)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad (3.14)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^2 + \dots \\ \dots + \frac{\mu(\mu-1) \dots (\mu-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Учитывая теорему о замене переменной, можно гарантировать, что эти равенства останутся верными, если в них на месте переменной  $x$  будет стоять какая-либо функция  $x = \varphi(t)$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = 0$ , и ищется предел соответствующего выражения при  $t \rightarrow a$ .

### 3.13. Примеры.

1. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$ .

Воспользовавшись равенствами (3.12), (3.15), (3.9), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} &= \frac{1 + x \cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - x^2/2 + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) + o(x)}{x + o(x) - x} \\ &= \frac{1 + x - x^3/2 + o(x^3) - 1 - x + o(x)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(x)}, \end{aligned}$$

и никакой пользы проделанные выкладки не несут, ибо мы в итоге пришли к неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ . Это означает, что нами использована

недостаточно глубокая информация об асимптотике имеющихся функций. Простое наблюдение:

$$\ln(1+x) - x = x - x^2/2 + o(x^2) - x = -x^2/2 + o(x^2)$$

показывает, что в знаменателе — величина второго порядка, а тогда и в числителе надо использовать асимптотические равенства, обеспечивающие выделение главного члена второго порядка:

$$\begin{aligned} & \frac{1+x \cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1+x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) - \frac{(1/2) \cdot (-1/2)}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1+x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 - x + \frac{4x^2}{8} + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(x^2)/x^2}{-1/2 + o(x^2)/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $x^3/2 = o(x^2)$  и что  $o(x^2) + o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ .

При нахождении пределов бывает удобно комбинировать использование замечательных пределов и асимптотических равенств.

**2.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} &= \left( \frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - (2x)^2/2 + o(x^2)} \right)^{1/x^2} \\ &= \left( 1 + \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 - o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)} \right)^{1/x^2} = \left( 1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)} \right)^{1/x^2} \\ &= \left( \left( 1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)} \right)^{\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}} \right)^{\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1+o(1)} \cdot \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2}$ , согласно (3.6) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} = e^{3/2}.$$

Решим этот же пример другим способом. Воспользуемся равенством  $a^b = e^{b \ln a}$ ,  $a > 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}.$$

Рассмотрим выражение в показателе степени:

$$\begin{aligned}\frac{\ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}{x^2} &= \frac{\ln \left( \frac{1-x^2/2+o(x^2)}{1-4x^2/2+o(x^2)} \right)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(1-x^2/2+o(x^2)) - \ln(1-2x^2+o(x^2))}{x^2} \\ &= \frac{-x^2/2 + 2x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно, искомый предел равен  $e^{3/2}$ .

### 3.14. Задачи.

1. Используя асимптотические равенства, найти пределы

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}$ .
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{1/x^2}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+\sin x \cos \alpha x}{1+\sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$ ,
- (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ , (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \operatorname{tg} x}{x + \sin x} \right)^{1/(1-\cos x)}$ ,
- (7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$ , (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$ ,
- (9)  $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3-x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}$ ,
- (10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x})$ ,
- (11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x} - (1/2)\ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x}$ ,
- (12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}$ ,
- (13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{\arcsin x - \sin x}$ , (14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x} - \cos x - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} \sin x}$ ,
- (15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x^2/2)}{e^{-x^2/2} - \cos x}$ , (16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}$ ,
- (17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1 - x^2/2} \right)^{1/x^2}$ , (18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ ,

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x} - (1/2)\operatorname{sh} x} \right)^{1/\arcsin x^2},$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln(1+x) + \cos(xe^{-x}))^{1/x^3}.$$

2. Найти пределы

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x^2}{x^2+1} \right),$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

**3.15. Ответы. К п. 3.8.** (1) 10; (2) 1; (3)  $\frac{mn(n-m)}{2}$ ; (4)  $\frac{m}{n}$ ; (5)  $\frac{n(n+1)}{2}$ ; (6)  $\frac{n(n+1)}{2}$ ; (7)  $\frac{m-n}{2}$ ; (8) 1; (9) 3; (10)  $\frac{3}{2}$ ; (11)  $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$ ; (12)  $\frac{n}{m}$ ; (13)  $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$ ; (14)  $\frac{a+b}{2}$ ; (15)  $\cos a$ ; (16)  $\frac{1}{2}$ ; (17)  $-\sin a$ ; (18)  $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ ,  $a \neq (2k+1)\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; (19)  $-\frac{1}{12}$ ; (20) 0; (21) 0; (22) 0; (23)  $e^{2a}$ ; (24)  $e^{-1}$ ; (25)  $e^{\operatorname{ctg} a}$ ,  $a \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; (26) 1; (27) 0; (28)  $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ; (29)  $a^a \ln \frac{a}{e}$ ; (30)  $a^a \ln ae$ ; (31)  $\ln x$ ; (32)  $e^2$ ; (33) 2; (34) 2; (35)  $\frac{e}{\pi}$ ; (36)  $e^{1/e}$ ; (37) 2; (38)  $\sqrt{2}$ ; (39)  $\sqrt{ab}$ ; (40)  $a^{a/(a+b)} b^{b/(a+b)}$ ; (41) 0; (42)  $\frac{1}{2}$ .

**К п. 3.14. 1.** (1) 3; (2) -2; (3)  $\frac{2}{3}$ ; (4)  $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$ ; (5) 1; (6)  $e$ ; (7)  $\frac{1}{2}$ ; (8) -2; (9)  $e^{-1/4}$ ; (10)  $-\frac{3}{16}$ ; (11)  $-\frac{1}{8}$ ; (12)  $-\frac{1}{2}$ ; (13) -1; (14)  $\frac{7}{5}$ ; (15)  $\frac{1}{2}$ ; (16) 1; (17)  $e^{-1/2}$ ; (18)  $e^{2/3}$ ; (19)  $e^{-1/8}$ ; (20)  $e^{2/3}$ .

**К п. 3.14. 2.** (1)  $\frac{1}{1+x^2}$ ; (2) 1; (3) 0; (4) 1.

#### § 4. Непрерывные функции

**4.1.** Рассмотрим функцию  $f$  и точку  $a \in \mathbb{R}$ . Если  $a$  принадлежит области определения  $D(f)$  функции  $f$ , то будем говорить, что функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D(f), |x-a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Если к тому же  $a$  — предельная точка множества  $D(f)$ , то непрерывность  $f$  в  $a$  равносильна тому, что существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  и выполнено равенство  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Если же  $a$  не является предельной точкой  $D(f)$  и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке непрерывна. Договоримся также считать функцию  $f$  непрерывной в предельной точке множества  $D(f)$ , не принадлежащей  $D(f)$ , если существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в область определения, так что такого значения просто нет).

При исследовании непрерывности функции в данной точке сначала надо определить, что это за точка — входит ли она в область определения функции или нет и является ли она предельной точкой области определения. Если это точка из области определения, но не предельная точка, то ответ готов — функция в такой точке непрерывна. Как правило, рассматриваемая точка будет предельной точкой области определения. В этом случае надо найти предел функции в этой точке, используя по возможности теоремы о пределах. Если же использовать теоремы невозможно (например, по причине невыполнения их условий), то надо найти предел по определению, в случае необходимости прибегая к односторонним пределам. Если конечного предела нет, то нет и непрерывности. Если конечный предел есть, то надо посмотреть, определена ли функция в этой точке, и если нет, то она в ней уже непрерывна (только за счет существования предела). Если определена, то надо сравнить значение предела со значением функции, и если они одинаковы, то функция непрерывна, если нет, то разрывна.

**4.2. Утверждение 1.** *Линейная комбинация, произведение и отношение (последнее при условии отличия от нуля знаменателя) непрерывных в точке  $a$  функций непрерывны в этой точке.*

**Утверждение 2.** *Пусть функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , а функция  $g$  непрерывна в точке  $f(a)$ . Тогда композиция  $g \circ f$  непрерывна в точке  $a$ .*

**4.3.** Иногда описание точек разрыва функции сопровождают указанием, какого типа разрыв в данной точке. Напомним, что точку  $a$  называют *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы  $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ,  $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ . Говорят, что разрыв первого рода *устранимый*, если  $f(a+0) = f(a-0)$ . Во всех остальных случаях говорят, что  $a$  — *точка разрыва второго рода*.

**4.4. Пример.** Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x) = [x] \sin \pi x,$$

где квадратные скобки указывают на целую часть числа, т. е.  $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ .

Функция  $f$  определена на всем  $\mathbb{R}$  и представляет собой произведение двух функций, из которых  $\sin \pi x$  непрерывна в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$ . Покажем, что функция  $[x]$  непрерывна в каждой точке  $a \notin \mathbb{Z}$ , и тогда  $f$  будет непрерывной на множестве всех нецелых вещественных

чисел как произведение непрерывных функций. Действительно, если  $a \notin \mathbb{Z}$ , то существует такая окрестность  $(a - r, a + r)$  точки  $a$ , которая не содержит целых чисел, а тогда целая часть  $[x]$  во всех точках такой окрестности принимает одно и то же значение, т. е. совпадает с непрерывной (тождественно постоянной) функцией и, значит, сама непрерывна в  $a$ .

Пусть теперь  $a \in \mathbb{Z}$ . Тогда в любой достаточно малой (настолько малой, чтобы в ней не было отличных от  $a$  целых точек) окрестности точки  $a$  слева от  $a$  будет  $[x] = a - 1$ , а справа от  $a$  оказывается  $[x] = a$ . Отсюда  $\lim_{x \rightarrow a-0} [x] = a - 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} [x] = a$ , и ввиду различия пределов слева и справа заключаем, что предела в этой точке нет, так что  $[x]$  разрывна в произвольной целой точке.

Итак, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций приходим к непрерывности нашей функции во всех нецелых точках. Можно ли утверждать, что в каждой целой точке она будет разрывна? Нет, пока нельзя. Нам только известно, что в таких точках не выполняются условия теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций, но будет ли при этом произведение разрывным — вопрос пока открытый.

Отметим, что  $\lim_{x \rightarrow n} \sin \pi x = 0$  для любого  $n \in \mathbb{Z}$ , а тогда по теореме о пределе произведения ограниченной функции на бесконечно малую будет  $\lim_{x \rightarrow n} [x] \sin \pi x = 0$ , так как целая часть вблизи любой конечной точки ограничена. Вместе с тем имеем  $[n] \sin \pi n = 0$ , если  $n \in \mathbb{Z}$ . Мы получили, что предел функции в любой целочисленной точке совпадает с ее значением в такой точке, следовательно, наша функция непрерывна в каждой целочисленной точке. В итоге приходим к тому, что  $f$  непрерывна в каждой точке области определения.

#### 4.5. Задачи.

1. Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad f(x) = \operatorname{sgn} x &= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} & (6) \quad f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x)), \\
(7) \quad f(x) &= \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} & (8) \quad f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}, \\
(9) \quad f(x) &= x[x], & (10) \quad f(x) = x[1/x], \\
(11) \quad f(x) &= e^{-1/x}, & (12) \quad f(x) = \arcsin(1/x).
\end{aligned}$$

2. Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

$$\begin{aligned}
(1) \quad f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \geq 0, & (2) \quad f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} \\
(3) \quad f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n} x, & (4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+(2 \sin x)^{2n}}.
\end{aligned}$$

3. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m!x)$$

разрывна при каждом  $x \in \mathbb{R}$ .

4. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n} \text{ и } m, n \text{ взаимно просты,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении  $x$  и непрерывна при каждом иррациональном значении  $x$ .

5. Обязательно ли будет разрывной в данной точке  $a$  сумма  $f(x) + g(x)$ , если (а) функция  $f$  непрерывна, а  $g$  разрывна в точке  $a$ ; (б) обе функции  $f, g$  разрывны в точке  $a$ ?

6. Обязательно ли будет разрывным в данной точке  $a$  произведение  $f(x)g(x)$ , если (а) функция  $f$  непрерывна, а  $g$  разрывна в точке  $a$ ; (б) обе функции  $f, g$  разрывны в точке  $a$ ?

7. Исследовать на непрерывность функции  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$ , если (а)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $g(x) = 1 + x^2$ ; (б)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $g(x) = x(1 - x^2)$ ; (в)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $g(x) = 1 + x - [x]$ .

8. Доказать, что если функция  $f(x)$  непрерывна, то и  $|f(x)|$  — непрерывная функция.

9. Доказать, что если функция  $f(x)$  непрерывна, то функция

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{если } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{если } |f(x)| \leq c, \\ c, & \text{если } f(x) > c, \end{cases}$$

где  $c$  — любое (фиксированное) положительное число, также непрерывна.

**10.** Доказать, что если функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  непрерывны, то функции  $\varphi(x) = \max(f(x), g(x))$ ,  $\psi(x) = \min(f(x), g(x))$  непрерывны.

**11\*.** Доказать, что если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то функции  $m(x) = \inf_{a \leq t \leq x} f(t)$ ,  $M(x) = \sup_{a \leq t \leq x} f(t)$  также непрерывны на  $[a, b]$ .

**4.6.** В определении непрерывности функции в точке говорится, что по заданному  $\varepsilon > 0$  требуется найти  $\delta > 0$ , для которого будут выполнены указанные далее в определении свойства. Ясно, что такое  $\delta$  должно зависеть от  $\varepsilon$  и от той точки, в которой рассматривается непрерывность. Отметим эту зависимость явно, записав определение непрерывности функции  $f$  в точке  $a$ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon, a, f) > 0)(\forall x, |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Вместе с тем может оказаться, что по заданному  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta$  так, чтобы оно подходило для всех точек  $a$  из некоторого множества  $X$ , т. е. было бы пригодным при заданном  $\varepsilon$  в равной мере для всех  $a \in X$ . Эта ситуация нашла свое отражение в определении равномерной непрерывности функции на заданном множестве.

Пусть даны функция  $f$  и множество  $X \subset D(f)$ . Говорят, что  $f$  *равномерно непрерывна на  $X$* , если выполнено следующее утверждение:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon, f) > 0)(\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X, |x_1 - x_2| < \delta) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что в отличие от непрерывности свойство равномерной непрерывности содержательно только если его рассматривать на некотором (не конечном) множестве.

Образно говоря, равномерная непрерывность означает, что функция на данном множестве не имеет участков с неограниченно увеличивающейся крутизной.

Обратим внимание на то, что если функция равномерно непрерывна на каком-то множестве, то она будет таковой и на любом его подмножестве.

**Утверждение** (теорема Кантора). *Непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке числовой прямой функция равномерно непрерывна на нем.*

**4.7. Пример.** Покажем, что функция  $f(x) = x^2$  равномерно непрерывна на любом промежутке  $(-l, l)$ ,  $0 < l < +\infty$ , и не будет равномерно непрерывной на  $\mathbb{R}$ .

Действительно, по теореме Кантора функция  $x^2$ , будучи непрерывной, равномерно непрерывна на каждом замкнутом ограниченном промежутке, в частности на  $[-l, l]$ , а тогда она равномерно непрерывна и на  $(-l, l)$ .

Рассмотрим теперь  $f(x) = x^2$  на  $\mathbb{R}$ . Отсутствие равномерной непрерывности связано с увеличением крутизны функции, а это происходит при удалении аргумента. Запишем утверждение, означающее отсутствие равномерной непрерывности  $x^2$  на  $\mathbb{R}$ :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| < \delta) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Так что для доказательства отсутствия равномерной непрерывности мы должны будем подобрать  $\varepsilon, x_1, x_2$  такими, чтобы  $|x_1 - x_2| < \delta$ , но  $|x_1^2 - x_2^2| \geq \varepsilon$ . Нам по заданному  $\delta > 0$  надо будем подобрать пару точек, отличающихся друг от друга меньше, чем на  $\delta$ . Пусть  $x_1 > 0$  — одна из таких точек, тогда вторую возьмем в виде  $x_2 = x_1 + \alpha$ , где  $\alpha$  — какое-либо положительное число такое, что  $\alpha < \delta$  (этим мы обеспечим неравенство  $|x_2 - x_1| < \delta$ ). Рассмотрим теперь разность  $x_2^2 - x_1^2 = (x_1 + \alpha)^2 - x_1^2 = \alpha(2x_1 + \alpha)$ . Зададимся вопросом: как сделать последнее выражение бóльшим какого-то числа, и какое это может быть число? Поскольку мы пока вольны в выборе  $x_1$ , ясно, что разумно взять его таким:  $x_1 = 1/\alpha$ . Тогда для такого  $x_1$  получим  $\alpha(2x_1 + \alpha) = \alpha(2/\alpha + \alpha) = 2 + \alpha^2 > 2$ , откуда видно теперь, что в качестве требуемого  $\varepsilon$  можно взять  $\varepsilon = 2$ , и тогда при заданном  $\delta > 0$  надо взять любое  $x_1$  такое, что  $1/x_1 < \delta$ , а к нему взять  $x_2 = x_1 + \alpha$ , где  $\alpha < \delta$ . Тогда окажется, что  $|x_2 - x_1| < \delta$ , а вместе с тем  $|x_2^2 - x_1^2| \geq 2$ .

#### 4.8. Задачи.

1. Показать, что функция  $f(x) = \sin(\pi/x)$  непрерывна и ограничена в промежутке  $(0, 1)$ , но не является равномерно непрерывной на нем.
2. Показать, что функция  $f(x) = \sin x^2$  непрерывна и ограничена на  $\mathbb{R}$ , однако не является там равномерно непрерывной.
3. Показать, что функция  $f(x) = x + \sin x$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ .
4. Доказать, что если функция  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$  и на  $[b, c]$ , то она равномерно непрерывна на  $[a, c]$ .
5. Говорят, что функция  $f$  удовлетворяет на множестве  $E$  условию Липшица, (с константой  $K$ ), если  $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$  для любых  $x, y \in E$ . Доказать, что если  $f$  удовлетворяет условию Липшица на множестве  $E$ , то она равномерно непрерывна на этом множестве.

## Оглавление

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| § 1. Введение .....                  | 1  |
| § 2. Предел последовательности ..... | 8  |
| § 3. Предел функции .....            | 13 |
| § 4. Непрерывные функции .....       | 28 |