

## § 10. Числовые ряды

**10.1.** Пусть дана числовая последовательность  $x_n$ . Если эту последовательность рассматривают с точки зрения нахождения «суммы» всех ее членов, то говорят, что рассматривают *числовой ряд*  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ , а члены последовательности  $x_n$  называют при этом *общим членом* данного ряда.

Суммы  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$  называют *частичными суммами ряда*  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ . Если существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  последовательности частичных сумм, его называют *суммой данного ряда* и обозначают, как и ряд, символом  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ . О самом ряде говорят при этом, что он *сходится*. Если ряд не сходится, то его называют *расходящимся*.

Для доказательства расходимости ряда может оказаться полезным необходимый признак сходимости

**Утверждение 1** (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.*

Важно помнить, что обратное неверно.

**Утверждение 2** (критерий Коши сходимости ряда). *Для сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  необходимо и достаточно следующее свойство:*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0 \forall p \geq 0) \left| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right| \leq \varepsilon. \quad (10.1)$$

**10.2.** Обращаясь к числовому ряду, обычно ставят вопрос о его сходимости. Здесь аналогично несобственному интегралу возникает ситуация, в которой желательно сделать заключение о сходимости какой-то последовательности (частичных сумм) на основе информации о другой последовательности (общего члена). Поэтому для исследования сходимости рядов формулируют специальные утверждения, называемые признаками сходимости.

Сначала коротко опишем перечень вопросов, сопровождающих изучение сходимости ряда, а потом сообщим содержание соответствующих признаков.

В первую очередь смотрим, сходится ли к нулю общий член данного ряда, и если нет, то ряд расходится, если да, то мы продолжаем исследование ряда.

Затем констатируем, знакопостоянен ли общий член ряда, и если да, то обращаемся к признакам сравнения или основанным на них признакам Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса или изучаем асимптотику общего члена ряда с целью возможного сравнения с общим членом сходящегося ряда. Если общий член ряда меняет знак, то смотрим на возможность применения к нему признаков Дирихле и Абеля. Для доказательства расходимости можно использовать критерий Коши.

**10.3.** Напомним формулировки признаков сходимости знакопостоянных рядов.

**Утверждение 1** (признак сравнения). Рассмотрим два ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  с положительными членами. Предположим, что  $x_n \leq y_n$  по крайней мере для всех далеких номеров  $n$ . Тогда если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  сходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  также сходится, а если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  расходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  расходится.

Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = K$  и  $0 < K < \infty$ , то сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  равносильна сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ . Так будет, в частности, если  $x_n \sim y_n$ , т. е. если  $x_n = y_n + o(y_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

На сравнении с геометрической прогрессией (быстро сходящимся рядом) основаны признаки Даламбера и Коши.

**Утверждение 2** (признак Даламбера). Предположим, что  $x_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = d$ . Тогда если  $d < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится, если  $d > 1$ , то расходится, если же  $d = 1$ , то признак не дает информации о сходимости ряда.

**Утверждение 3** (признак Коши). Предположим, что  $x_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = c$ . Тогда если  $c < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится, если  $c > 1$ , то расходится, если же  $c = 1$ , то признак не дает информации о сходимости ряда.

Более тонкими являются признаки, основанные на сравнении с рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \quad (10.2)$$

Напомним, что ряд (10.2) сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ . Тем самым если для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  мы нашли, что  $x_n = \frac{1}{n^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ , то при  $\alpha > 1$  наш ряд сойдется, а при  $\alpha \leq 1$  разойдется.

**Утверждение 4** (признак Раабе). *Предположим, что для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $x_n > 0$ , существует предел*

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right).$$

*Тогда если  $p > 1$ , то исходный ряд сходится, если  $p < 1$ , то расходится, если же  $p = 1$ , то признак не дает информации о сходимости ряда.*

**Утверждение 5** (признак Гаусса). *Если  $x_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и*

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\gamma}},$$

*где  $|\gamma_n| < c$ ,  $\gamma > 0$ , то*

- (a) *при  $\alpha > 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится, при  $\alpha < 1$  расходится;*
- (b) *при  $\alpha = 1$  данный ряд сходится в случае, если  $\beta > 1$ , и расходится в случае, если  $\beta \leq 1$ .*

**10.4. Пример 1.** Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}, \quad (10.3)$$

воспользовавшись разными признаками и проследив, как эти признаки применяются и срабатывают.

Начнем с необходимого признака. Поскольку здесь неочевидно, сходится ли к нулю общий член ряда, можно отказаться от применения необходимого признака и перейти к применению других признаков.

Обратимся к признаку Даламбера. Для этого составим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}n^{n+p}}{(n+1)^{n+1+p}n!e^n} = \frac{en^{n+p}}{(n+1)^{n+p}} = \frac{e}{(1+1/n)^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

так что признак Даламбера информации о сходимости не дает.

Прибегнем к признаку Гаусса. Составим

$$\begin{aligned} p_n &= n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left( \frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} - 1 \right) \\ &= n \left( e^{-1} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 \right) \end{aligned}$$

полагаем  $x = 1/n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x} (e^{-1} (1+x)^{1/x} (1+x)^p - 1) = \frac{1}{x} (e^{-1} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} (1+x)^p - 1) \\ &= \frac{1}{x} (e^{-1} e^{\frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x}} (1+px+o(x)) - 1) \\ &= \frac{1}{x} (e^{-\frac{x}{2}+o(x)} (1+px+o(x)) - 1) \\ &= \frac{1}{x} \left( \left( 1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) (1+px+o(x)) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( 1 + \left( p - \frac{1}{2} \right) x + o(x) - 1 \right) = p - \frac{1}{2} + o(1), \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p - \frac{1}{2},$$

так что исходный ряд сходится при  $p - \frac{1}{2} > 1$ , т. е. при  $p > \frac{3}{2}$ , и расходится при  $p < \frac{3}{2}$ . Для значения  $p = \frac{3}{2}$  признак Раабе информации о сходимости не дает.

Исследуем теперь сходимость этого ряда, используя асимптотику его общего члена. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Имеем

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} = \frac{(2\pi)^{1/2} n^{1/2} n^n e^n}{e^n n^{n+p}} e^{-\frac{\theta}{12n}} = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-\frac{\theta}{12n}}}{n^{p-1/2}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}},$$

так что исходный ряд, как и ряд с общим членом  $\frac{1}{n^{p-1/2}}$ , сходится при  $p > \frac{3}{2}$  и расходится при  $p \leq \frac{3}{2}$ .

Мы получили исчерпывающую информацию о тех  $p$ , при которых ряд сходится, правда, при этом нам пришлось воспользоваться асимптотической формулой для  $n!$ .

Попробуем применить к исследованию сходимости признак Гаусса. Для этого составим отношение  $\frac{x_n}{x_{n+1}}$  и при анализе его асимптотики воспользуемся промежуточными выкладками, сделанными при использовании признака Раабе. Делая, как и выше, замену  $x = \frac{1}{n}$ , проведем вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} \\ &= e^{-1} e^{x-x^2/2+x^3/3+o(x^3)} \left( 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2) \right) \\ &= \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \left( 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2) \right) \\ &= 1 + \left( p - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \end{aligned}$$

где в коэффициент  $\gamma_n$  вошло всё, что собралось при дроби  $\frac{1}{n^2}$  в процессе приведения подобных членов. По признаку Гаусса ряд будет сходиться, если  $p - \frac{1}{2} > 1$ , и расходиться, если  $p - \frac{1}{2} \leq 1$ .

**Пример 2.** Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$$

Ясно, что предел его общего члена равен нулю, так что начнем применение какого-либо признака. Величина показателя степени подсказывает, что для начала стоит обратиться к признаку Коши. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 - \frac{a^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^3}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2(-\frac{a^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1 \end{aligned}$$

при любом  $a \neq 0$ , так что ряд сходится при любом  $a \neq 0$ .

**Пример 3.** Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+k/\ln n}}.$$

Ясно, что предел общего члена этого ряда равен нулю. Исследуем асимптотику общего члена:

$$\frac{1}{n^{1+k/\ln n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+k/\ln n} = e^{(1+\frac{k}{\ln n}) \ln \frac{1}{n}} = e^{\ln \frac{1}{n} - k} = e^{-k} \cdot \frac{1}{n},$$

и ряд расходится, каково бы ни было  $k$

**10.5. Задачи.** Исследовать сходимость следующих рядов:

$$\begin{array}{ll} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, & (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \\ (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n + \frac{1}{n})^n}, & (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}, \\ (5) \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}, & (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}, \\ (7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}, & (8) \sum_{n=1}^{\infty} \left( e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^p, \\ (9) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}, & (10) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}, \end{array}$$

**10.6.** Рассмотрим теперь ряды, у которых общий член может быть знакопеременным. Для исследования сходимости таких рядов применяют формулируемые ниже признаки Дирихле, Абеля или частный случай признака Дирихле — признак Лейбница. Кроме исследования простой сходимости, знакопеременные ряды исследуют также

на абсолютную сходимость. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ . Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. В том случае, когда ряд сходится, но не абсолютно, его называют *условно сходящимся*. Для исследования абсолютной сходимости применяют, разумеется, признаки, приспособленные для изучения сходимости знакопостоянных рядов. Расходимость ряда иногда можно установить с помощью критерия Коши.

**Утверждение 1** (признаки Абеля и Дирихле). Рассмотрим числовые последовательности  $a_n, b_n$  и предположим, что последовательность  $a_n$  монотонна.

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

( $\alpha$ ) имеет место сходимость  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а частичные суммы  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ряда, составленного из  $b_n$ , ограничены, т. е. существует постоянная  $C > 0$  такая, что

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq C$$

при всех  $n \in \mathbb{N}$ ;

( $\beta$ ) последовательность  $a_n$  ограничена, т. е. существует такая постоянная  $K > 0$ , что  $|a_n| \leq K$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

При выполнении условия ( $\alpha$ ) говорят о *признаке Дирихле*, а условия ( $\beta$ ) — о *признаке Абеля*.

**Утверждение 2** (признак Лейбница). Если  $x_n$  — монотонная сходящаяся к нулю последовательность, то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

сходится.

**10.7. Пример 1.** Исследуем сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ .

Заметим, что если  $x = k\pi$ , то  $\sin x = 0$ , и наш ряд нулевой, так что сходится, даже абсолютно. Будем рассматривать теперь  $x \neq k\pi$ .

Если бы общий член ряда сходил к нулю достаточно быстро, можно было бы, воспользовавшись признаком сравнения, доказать абсолютную сходимость и тем самым сходимость данного ряда. Однако здесь общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что признак сравнения не работает. Поэтому обратимся к признакам,

приспособленным для исследования сходимости знакопеременных рядов.

Сначала выделим монотонную составляющую. Это, конечно, последовательность  $\frac{1}{n}$ . Теперь отметим, что она сходится к нулю, тем самым мы ориентируемся на применение признака Дирихле. Согласно этому признаку остается доказать ограниченность частичных сумм  $S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx$ . Найдем сумму  $S_n$ . Умножив равенство

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

на  $2 \sin \frac{x}{2}$  и воспользовавшись (7.30) для произведения синусов, получим

$$\begin{aligned} 2S_n \sin \frac{x}{2} &= 2 \left( \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin nx \cdot \sin \frac{x}{2} \right) \\ &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \dots \\ &\quad \dots + \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x \\ &= \cos \frac{x}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x = 2 \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Значит,  $|S_n| \leq \frac{1}{\sin x/2}$ . Итак, суммы  $S_n$  ограничены, а следовательно,

по признаку Дирихле ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  сходится при любом  $x$ .

Обратимся к изучению абсолютной сходимости, т. е. рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}.$$

Ввиду медленной сходимости к нулю общего члена этого ряда ограничить его сверху общим членом сходящегося ряда не удастся. Поэтому попробуем обосновать гипотезу о его расходимости. Здесь можно воспользоваться критерием Коши. Однако проще применить искусственный прием. Ясно, что  $|\sin nx| \geq \sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$ , поэтому

$$\frac{|\sin nx|}{n} \geq \frac{1}{2n}(1 - \cos 2nx) = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  расходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$  сходится (по признаку Дирихле). Тем самым ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$  расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов. Общий член исследуемого ряда оказался ограниченным снизу общим членом расходящегося ряда, значит, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$  расходится.

**Пример 2.** Исследуем сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$ .

Как и при изучении сходимости несобственных интегралов, обратимся к асимптотике общего члена ряда. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Тогда  $1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$ , откуда

$$(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \frac{\pi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{2n}$$

сходится по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

сходится абсолютно по признаку сравнения, значит, исходный ряд сходится.

**10.8. Задачи. 1.** Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n} + 2}, & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}, \\ (3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + 1}, & (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}, \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n},$$

**Ответы к п. 10.8. 1.** (1) Сходится абсолютно, (2) сходится абсолютно, (3) сходится условно, (4) сходится условно, (5) сходится условно, (6) расходится,