§ 11. Конечномерные арифметические пространства и их отображения

11.1. Пусть X — произвольное множество. Функцию $\rho(x, y)$, определенную на произведении $X \times X$ и действующую в $\mathbb{R}$, называют *метрикой на* X, если выполнены условия:

1) $\rho(x, y) \geq 0$ для любых $x, y \in X$ и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$ (симметричность);

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Значение $\rho(x, y)$ называют *расстоянием между* x *и* y или *от* x *до* y.

Множество X с заданной на нем метрикой ρ, т. е. упорядоченную пару (X, ρ), называют *метрическим пространством*. Обычно если ясно, о какой метрике идет речь, ее указание опускают и говорят просто о метрическом пространстве X. Элементы метрического пространства называют часто его *точками*.

Для заданных $x \in X$ и числа $r > 0$ множество $B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ называют *открытым*, а $B_c(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$ — *замкнутым шаром радиусом* r (или *радиуса* r) с центром в x. Множество U называют *окрестностью точки* x, если существует такое $r > 0$, что $B(x, r) \subset U$.

11.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $A \subset X$. Точку $x \in X$ называют:

— *внутренней точкой множества* A, если существует окрестность точки x, содержащаяся в A;

— *предельной точкой множества* A, если в любой окрестности точки x есть хотя бы одна точка множества A, отличная от x;

— *точкой прикосновения множества* A, если в любой окрестности точки x есть хотя бы одна точка множества A;

— *граничной точкой множества* A, если в любой окрестности точки x есть как точки множества A, так и точки дополнения $X \setminus A$ множества A.

— *внешней точкой множества* A, если она внутренняя точка дополнения $X \setminus A$ множества A.

Множество всех внутренних точек множества A называют его *внутренностью* и обозначают одним из символов A° или $\operatorname{int} A$.

Множество всех точек прикосновения множества A называют его *замыканием* и обозначают одним из символов $\overline{A}$ или $\operatorname{cl} A$.

Множество всех граничных точек множества A называют его *границей* и обозначают символом ∂A.

11.3. Множество A в метрическом пространстве X называют *открытым*, если оно совпадает со своей внутренностью, и *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием. Напомним, что множество замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда его дополнение открыто (замкнуто).

Пусть $A \subset X$. Семейство A_ξ, $\xi \in \Xi$, называют *покрытием множества* A, если $A \subset \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} A_\xi$ (напомним, что семейство множеств — это совокупность «множеств с индексами», а точнее — отображение $\xi \mapsto A_\xi$ некоторого множества Ξ в множество всех подмножеств данного множества). Покрытие называют *открытым*, если все составляющие его множества A_ξ открыты.

Множество $A \subset X$ называют *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т. е. для любого покрытия A_ξ, $\xi \in \Xi$, множества A открытыми множествами существует такое конечное подмножество $\Xi_0 \subset \Xi$ множества индексов Ξ, что $A \subset \bigcup\limits_{\xi\in\Xi_0} A_\xi$.

Напомним, что каждое компактное множество в X замкнуто и ограничено. Последнее означает, что *диаметр*

$$d(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$$

множества A конечен.

11.4. Отображение множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел в метрическое пространство X называют *последовательностью* точек пространства X и для обозначения последовательности используют символ типа x_n, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность x_n называют *сходящейся к точке* $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ имеет место неравенство $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Если x_n сходится к x, то точку x называют *пределом последовательности* x_n и используют при этом обозначение $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ясно, что сходимость x_n к x равносильна тому, что для любой окрестности U точки x найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ имеет место включение $x_n \in U$.

В терминах сходящихся последовательностей можно сформулировать следующие полезные критерии замкнутости и компактности множества в метрическом пространстве.

Утверждение 1. *Множество A в метрическом пространстве X замкнуто тогда и только тогда, когда предел любой сходящейся последовательности элементов множества A принадлежит этому множеству.*

Утверждение 2. *Множество A в метрическом пространстве X компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества A.*

11.5. Пусть (X, ρ) и (Y, σ) — метрические пространства и f — отображение, действующее из X в Y. Пусть a — предельная точка области определения $D(f)$ отображения f. Элемент $b \in Y$ называют *пределом отображения f в точке a*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $\rho(x, a) < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $\sigma(f(x), b) < \varepsilon$, и для предела используют обозначение $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Запишем это же свойство в терминах шаров и включений множеств: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $f[B(a, \delta) \setminus \{a\}] \subset B(b, \varepsilon)$. Ясно, что здесь вместо шаров можно использовать произвольные окрестности точек a и b с соответствующей переформулировкой.

Отображение f из X в Y называют *непрерывным в точке $a \in D(f)$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $f[B(a, \delta)] \subset B(b, \varepsilon)$. Ясно, что если a — предельная точка области определения отображения f, то непрерывность f в точке a равносильна существованию предела f в точке a и выполнению равенства $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Отображение f, непрерывное в каждой точке множества $X \subset D(f)$, называют *непрерывным на множестве X*.

Утверждение (теорема о пределе композиции). *Пусть даны метрические пространства X, Y, Z и отображения $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ такие, что определена композиция $f \circ g : X \to Z$, область определения которой имеет предельную точку x_0, а точка $y_0 = g(x_0)$ при этом является предельной точкой $D(f)$. Если отображение g непрерывно в точке x_0 и существует предел A отображения f в точке y_0, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, также равный A.*

11.6. Если в множестве X задана структура векторного пространства, т. е. определены операции суммы и умножения на скаляр с соответствующими свойствами, то метрика на нем чаще всего определяется посредством нормы.

Отображение $p(x)$, действующее из векторного пространства X над полем вещественных чисел в $\mathbb{R}$, называют *нормой на* X, а само X называют при этом *нормированным пространством*, если выполнены следующие условия:

1) $p(x) \geq 0$ для любого $x \in X$ и равенство $p(x) = 0$ равносильно тому, что $x = 0$;

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для любых $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (положительная однородность):

3) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ для любых $x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Обычно для обозначения нормы элемента $x \in X$ используют обозначение $\|x\|$, помещая справа нижний индекс в том случае, если на одном и том же векторном пространстве рассматриваются разные нормы.

Если X — нормированное пространство, то на нем посредством нормы определяется метрика ρ равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Одним из самых простых нормированных пространств является векторное пространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех вещественных функций, определенных на конечном множестве $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Его называют *$n$-мерным арифметическим пространством*. Элементы $x \in \mathbb{R}^n$ обозначают обычно символом $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где индекс — это аргумент отображения, а $x_1, \ldots, x_n$ — его значения, так что в данном случае отображение задается указанием всех его значений. На $\mathbb{R}^n$ рассматривают одну из следующих норм:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

называя первую из них *евклидовой*, а последнюю *равномерной*. Если никакого индекса у нормы не поставлено, имеется в виду евклидова норма.

Две нормы $p(x)$ и $q(x)$ на векторном пространстве X называют *эквивалентными*, если существуют такие положительные вещественные числа C_1, C_2, что $p(x) \leq C_1 q(x)$, $q(x) \leq C_2 p(x)$. Если нормы p, q эквивалентны, то сходимость по одной из них равносильна сходимости по другой. Известно, что *в пространстве $\mathbb{R}^n$ любые две нормы эквивалентны*.

11.7. Задачи. 1. Верно ли утверждение: «внутренность пересечения двух множеств равна пересечению их внутренностей»? Верно ли аналогичное утверждение для бесконечной совокупности множеств?

2. Верно ли утверждение: «внутренность объединения двух множеств равна объединению их внутренностей»? Если нет, то имеется ли включение в какую-либо сторону?

3. Доказать, что граница объединения двух множеств содержится в объединении их границ. Показать на примере, что аналогичное утверждение для бесконечной совокупности множеств не всегда верно.

4. Доказать, что граница каждого множества замкнута.

5. Пусть f — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция и $\alpha \in \mathbb{R}$. Доказать, что множество $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$ замкнуто, а множество $G_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ открыто.

6. Доказать, что замыкание множества A совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A.

7. Доказать, что внутренность множества A совпадает с объединением всех открытых множеств, содержащихся в A.

8. Для точки $x \in X$ и множества $A \subset X$ число

$$d(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$$

называют *расстоянием от точки x до множества A*, а для множеств $A, B \subset X$ число $d(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ — *расстоянием между множествами A и B*.

Верно ли, что для любой точки $x \in X$ и любого множества $A \subset X$ выполнены равенства

$$d(x, A) = d(x, \overline{A}), \quad d(x, A) = d(x, A^\circ)?$$

9. Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y и F — произвольное замкнутое множество в Y, а G — произвольное открытое множество в Y. Доказать, что прообраз $f^{-1}[F]$ — замкнутое, а $f^{-1}[G]$ — открытое множество в X.

10. Показать, что образ замкнутого (открытого) множества при непрерывном отображении может не быть замкнутым (открытым) множеством.

11. Доказать, что образ компактного множества при непрерывном отображении будет компактным множеством.

12. Может ли прообраз компактного множества при непрерывном отображении быть неограниченным?

13. Пусть x_0 — фиксированная точка в метрическом пространстве X. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x, x_0)$ непрерывна на X.

14. Пусть $E \subset X$ — фиксированное непустое подмножество в метрическом пространстве X. Доказать, что функция $f(x) = d(x, E)$ непрерывна на X.

15. Пусть E — компактное множество в X и x_0 — фиксированная точка в X. Доказать, что существует такая точка $x_1 \in E$, что $\rho(x_0, x_1) = d(x_0, E)$, иначе говоря, расстояние от точки до компактного множества достигается в некоторой точке этого множества.

16. Пусть E, F — компактные множества в метрическом пространстве X. Доказать, что существуют такие точки $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, что $\rho(x_0, y_0) = \delta(E, F)$, т. е. расстояние между компактными множествами достигается в точках этих множеств. Показать, что требование компактности существенно.

11.8. При обсуждении и предварительном анализе вопросов, связанных с отображениями конечномерных арифметических пространств для малых размерностей $n = 2$ и $n = 3$, полезно обращаться к их геометрической интерпретации. Напомним относящиеся к такой интерпретации средства.

Если $n = 2$, то для обозначения аргументов вместо (x_1, x_2) обычно используют (x, y), а при $n = 3$ вместо (x_1, x_2, x_3) пишут (x, y, z). При $n = 2$ одним из распространенных средств визуализации является *график функции* $f(x, y)$, т. е. множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\}.$$

Кроме графика для наблюдения функции двух переменных можно использовать такой прием: фиксировать одну из переменных и рассматривать график этой функции как функции от второй переменной. Построив такие графики при разных фиксированных значениях первой переменной, можно представить себе поведение функции двух переменных. При этом способе мы как бы рассекаем поверхность, являющуюся графиком функции, вертикальными плоскостями, параллельными одной из первых двух координатных линий в пространстве, и смотрим, что происходит в сечении. В частности, полезно просмотреть, что будет при пересечении графика вертикальными координатными плоскостями, т. е. плоскостями $x = 0$ и $y = 0$.

Информацию о строении функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ могут дать множества ее постоянства, называемые *множествами уровня*, т. е. множества $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = C\}$, где C — константа. Для функции $f(x, y)$ двух переменных такие множества называют *линиями уровня*, а для функции $f(x, y, z)$ трех переменных — *поверхностями*

уровня. Линии уровня, изображенные в $\mathbb{R}^3$ на соответствующей высоте, дают разрезы графика горизонтальными плоскостями.

Иногда полезно посмотреть поведение функции вдоль каких-либо линий, лежащих в области ее определения, например, вдоль прямых или окружностей.

11.9. Пример. Рассмотрим функцию $z = x^2 - y^2$ и обсудим, что получится при различных способах ее изображения.

Во-первых, ее график — это известная «седловая» поверхность (гиперболический параболоид) (рис. 1).

Горизонтальные разрезы графика этой функции, т. е. линии уровня $x^2 - y^2 = C$, при $C = 0$ суть биссекториальные прямые координатных углов, а при различных ненулевых C это гиперболы на плоскости xOy (рис. 2).

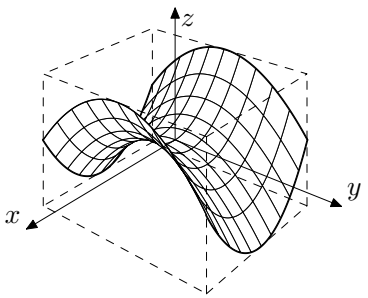

Рис. 1

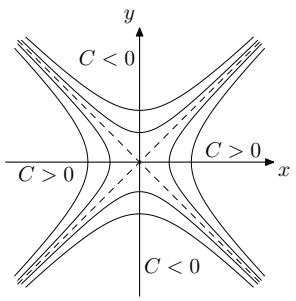

Рис. 2

Отметим еще, что вдоль прямых $y = 0$, $x = 0$ разрезы графика функции являются параболами с ветвями вверх и вниз соответственно.

11.10. Задачи. Воспользовавшись различными средствами, описать функции:

(1) $z = xy$; **(2)** $z = x^2 + y^2$; **(3)** $z = (x + y)^2$;

(4) $z = x^3 + xy$; **(5)** $z = \sqrt{xy}$; **(6)** $z = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

11.11. Наличие многих переменных позволяет переходить к пределу «поочередно», т. е. можно считать переменной одну из координат, другие оставив постоянными, перейти по ней к пределу, получив тем самым функцию, число переменных у которой на единицу меньше, затем поступить так же с полученной функцией и продолжить до конца. Получаем в результате так называемые повторные пределы. Рассмотрим их подробнее для функции двух переменных.

Пусть дана функция $f(x,y)$, и пусть (a,b) — предельная точка области ее определения. Фиксировав y, перейдем к пределу по x при $x \to a$, предполагая, естественно, что таковой существует при каждом y из некоторой окрестности точки b. В результате получаем функцию $g(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. Если существует ее предел в точке b, его называют *повторным пределом функции f при $x \to a$, $y \to b$* и обозначают символом $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$. Предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ функции f как функции двух переменнных в точке (a,b), т. е. предел функции f как отображения из $\mathbb{R}^2$, снабженного какой-либо нормой, в $\mathbb{R}$ (см. п. 11.5), в отличие от повторного, называют *двойным*. Известно, что *если существует двойной предел и внутренний предел в повторном, то существует и повторный предел, равный двойному*. Повторные пределы, как и двойной, помогают изучать функции двух переменных. Предложенные ниже задачи предостерегают от неосмотрительных заключений о связи двойного и повторных пределов.

Обратим внимание на то, что для доказательства отсутствия двойного предела удобно пользоваться теоремой о пределе композиции (см. утверждение из п. 11.5). А именно, если нам надо доказать отсутствие предела отображения $f(x,y)$ в точке (a,b), достаточно предложить два отображения, например $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$, $t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, таких, что $a = x_1(t_0) = x_2(t_0)$, $b = y_1(t_0) = y_2(t_0)$, непрерывных в точке t_0, и для которых пределы $\lim\limits_{t\to t_0} f(x_1(t), y_1(t))$, $\lim\limits_{t\to t_0} f(x_2(t), y_2(t))$ различны. Теорема о пределе композиции гарантирует отсутствие предела в точке (a,b). Образно говоря, если при прохождении через точку (a,b) по двум непрерывным кривым мы получим разные значения пределов функции вдоль этих кривых, то двойного предела функции в данной точке нет.

11.12. Задачи. 1. Показать, что для функции $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ существуют повторные пределы в точке $(0,0)$, в то время как двойного предела в этой точке нет.

2. Показать, что для функции $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ оба повторных предела в точке $(0,0)$ равны нулю, однако двойного предела в этой точке не существует.

3. Показать, что для функции $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ повторных пределов в точке $(0,0)$ нет, тем не менее существует и равен нулю двойной предел в этой точке.

11.13. Для нахождения двойного предела можно использовать теоремы о пределе суммы, произведения, отношения, композиции функций, теорему о пределе произведения ограниченной на бесконечно малую. Однако здесь, в отличие от функций одной переменной, нет техники, связанной с асимптотикой, и это обстоятельство делает задачу нахождения предела не столь популярной. Разумеется, замечательными пределами для функций одной переменной можно в подходящих случаях пользоваться и здесь.

11.14. Задачи. Найти следующие двойные пределы:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; **(2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$; **(4)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

§ 12. Дифференцирование функций многих переменных

12.1. Одним из самых распространенных средств локального изучения функций многих переменных является характеристика ее поведения вдоль координатных прямых или каких-либо прямых, проходящих через фиксированную точку.

Рассмотрим функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)}{h},$$

его называют *частной производной функции f в точке $x=(x_1,\dots,x_n)$ по переменной x_k* и обозначают одним из символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x), \quad f'_{x_k}(x), \quad f'_k(x), \quad D_k f(x), \quad \partial_k f(x).$$

Указатель точки x в очевидных ситуациях опускают.

Для нахождения частной производной по какой-то переменной считают эту переменную изменяющейся, а все остальные фиксированными

и находят частную производную как производную функции одной переменной, а именно той, по которой ищется производная.

12.2. Задачи. Найти частные производные следующих функций:

(1) $f(x,y) = x\sin(x+y)$; **(2)** $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

(3) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; **(4)** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$;

(5) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0; \end{cases}$ **(6)** $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

12.3. Кроме анализа изменения функции вдоль координатных прямых, отраженного в понятии частных производных, для изучения функций многих переменных используют (полный) дифференциал, связанный с ее (полным) изменением вблизи данной точки. Дадим определение дифференцируемости для общего случая отображений конечномерных арифметических пространств, а потом будем ограничиваться рассмотрением только вещественных функций, т. е. отображений, действующих в $\mathbb{R}$.

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k, n \in \mathbb{N}$, называют *дифференцируемым в точке* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ открытого множества $\Omega \subset D(f)$, если существует такой линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, что

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha(h)\|h\|, \tag{12.1}$$

где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, $h \in \mathbb{R}^n$. Оператор A называют *дифференциалом отображения f в точке x* и обозначают через $df(x)$. Если отождествить оператор A с его матрицей относительно стандартных базисов, то Ah — это произведение матрицы A на приращение h. Матрицу дифференциала $df(x)$ называют *матрицей Якóби* и обозначают одним из символов $df(x)$, $Df(x)$, $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)$, где $f_1, \ldots, f_k$ — координатные функции отображения f. Дифференцируемое в точке x отображение имеет частные производные по всем переменным в данной точке, при этом матрица Якоби состоит из частных производных:

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots x_n)}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Однако наличие частных производных в данной точке по всем переменным не гарантирует дифференцируемости отображения в этой точке.

Если $k = n$, то матрица Якоби квадратная и ее определитель $\det \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)$ называют *якобианом* отображения f в точке x.

Обсудим подробнее случай отображения из $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$, т. е. случай функции $f(x, y)$ двух переменных. Матрица Якоби такой функции состоит из одной строки и двух столбцов, т. е. представляет собой двумерный вектор. Таким образом, условие, определяющее дифференцируемость функции $f(x, y)$ выглядит так: дифференцируемость f в точке (x, y) означает существование такого вектора $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, что

$$f(x + k, y + l) = f(x, y) + ak + bl + \alpha(k, l) \cdot \sqrt{k^2 + l^2}, \qquad (12.2)$$

где $\lim\limits_{\substack{k \to 0 \\ l \to 0}} \alpha(k, l) = 0$. В этом соотношении использована евклидова норма, но ее можно заменить любой другой нормой ввиду эквивалентности всех норм в конечномерном арифметическом пространстве.

Поскольку для дифференцируемости необходимо существование частных производных, отсутствие в данной точке какой-либо из частных производных сразу приводит к недифференцируемости функции в такой точке. Если же частные производные по обеим переменным есть, то никакие другие числа, кроме этих частных производных, не подойдут на роль компонент вектора (a, b) для анализа равенства (12.2), т. е. с необходимостью $a = f'_x(x, y)$, $b = f'_y(x, y)$. Остается составить равенство типа (12.2), выразить в нем

$$\alpha(k, l) = \frac{f(x + k, y + l) - f(x, y) - f'_x(x, y)k - f'_y(x, y)l}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

и установить, сходится ли $\alpha(k, l)$ к нулю при $k \to 0$, $l \to 0$. Если да, то f дифференцируема в точке (x, y), если нет, то недифференцируема.

Для обоснования дифференцируемости функции в данной точке можно обращаться к следующему удобному критерию, правда, использующему существование частных производных не только в данной точке, но и в точках из некоторой ее окрестности.

Теорема. *Пусть f имеет производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точках (x, y) из некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и функции $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда f дифференцируема в точке (x_0, y_0).*

12.4. Пример. Исследуем на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. Найдем

$$f'_x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}},\ x\neq 0,\quad f'_y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}},\ y\neq 0.$$

В точке $(0,0)$ указанным способом частные производные не находятся. Воспользуемся определением:

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

аналогично $f'_y(0,0)=0$. Поскольку, очевидно, частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ определены не во всех точках вблизи нуля, для исследования дифференцируемости f в $(0,0)$ остается определение, согласно которому дифференцируемость f в $(0,0)$ равносильна выполнению равенства

$$f(k,l)=f'_x(0,0)k+f'_y(0,0)l+\alpha(k,l)\sqrt{k^2+l^2}=\alpha(k,l)\sqrt{k^2+l^2},$$

где $\lim\limits_{(k,l)\to(0,0)}\alpha(k,l)=0$, или

$$\sqrt[3]{kl}=\alpha(k,l)\sqrt{k^2+l^2}.$$

Остается выяснить, будет ли

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ l\to 0}}\alpha(k,l)=\lim_{\substack{k\to 0\\ l\to 0}}\frac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2+l^2}}=0.$$

Рассмотрев функцию $\dfrac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2+l^2}}$ вдоль направлений $k=0$ и $k=l$, находим, что пределы вдоль этих направлений различны, следовательно, требуемого равенства нет и $\sqrt[3]{xy}$ недифференцируема в точке $(0,0)$.

12.5. Задачи. 1. Исследовать дифференцируемость функций:

(1) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$; **(2)** $f(x,y)=\cos\sqrt[3]{xy}$;

(3) $f(x,y)=e^{-1/(x^2+y^2)}$, если $x^2+y^2>0$, и $f(0,0)=0$;

(4) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

в окрестности точки $(0,0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные, однако недифференцируема в точке $(0,0)$.

3. Показать, что функция $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0,0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

4. Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{если } x=0,\ y=0, \end{cases}$$

имеет в окрестности точки $(0,0)$ частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, которые разрывны в точке $(0,0)$ и неограниченны в любой окрестности ее, и тем не менее функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

5. Доказать, что функция $f(x,y) = \min(x,y)$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Будет ли она дифференцируемой в точках $(1,1)$ и $(1,2)$?

6. Найти якобиан отображения

$$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

определенного в полуполосе $r>0$, $0<\varphi<2\pi$.

7. Найти якобиан отображения

$$(r,\varphi,\psi) \mapsto (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi),$$

определенного на множестве $r>0$, $0<\varphi<2\pi$, $-\pi/2<\psi<\pi/2$.

12.6. Предположим, что в каждой точке $x=(x_1,\ldots,x_n)$ некоторой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ существует частная производная $f'_{x_i}(x)$ и функция $g(x)=f'_{x_i}(x)$ имеет частную производную $g'_{x_k}(x)$ в точке $x\in\Omega$. Тогда эту производную называют *производной второго порядка функции* f *по переменным* x_i, x_k и обозначают одним из символов $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x)$, $f''_{x_k x_i}(x)$, $f''_{ki}(x)$. В этом обозначении имеется в виду, что сначала берется производная по переменной x_i, а затем — по x_k, хотя, как мы вскоре узнаем, часто порядок следования переменных значения не имеет. Если переменные x_i, x_k различны, то производную по ним называют *смешанной*, если же одинаковы, то *чистой*, и вторую производную по x_i дважды обозначают одним из символов $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$, $f''_{x_i^2}(x)$, $f''_{ii}(x)$.

Индуктивно определяются производные более высоких порядков.

Утверждение. *Предположим, что существуют производные по различным переменным x_i, x_k функции f в точках из некоторой окрестности данной точки x. Если эти производные непрерывны в точке x, то они равны, так что в таком случае порядок взятия производных безразличен.*

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие независимость смешанных производных от порядка следования переменных.

12.7. Задачи.

1. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, если

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 8xy^3}{x+2y}$, **(2)** $f(x,y) = \sin(x + \cos y)$.

2. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если

(1) $f(x,y,z) = \sqrt{xy^3z^5}$, **(2)** $f(x,y,z) = e^{xyz}$.

12.8. Утверждение. *Рассмотрим отображения $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ такие, что определена их композиция $f \circ g$. Предположим, что она определена на некоторой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Если g дифференцируема в точке x, а f дифференцируема в точке $g(x)$, то композиция $f \circ g$ дифференцируема в точке x и имеет место равенство*

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x). \tag{12.3}$$

Правило дифференцирования композиции в терминах матриц Якоби означает, что матрица Якоби композиции равна произведению матриц Якоби отображений, составляющих композицию. Исходя из правила умножения матриц, выпишем правило дифференцирования в терминах частных производных, считая, что f действует из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x))\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x))\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) \\ &= \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_l}(g(x))\frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{12.4}$$

где символами $y_1, \ldots, y_k$ обозначены переменные, представляющие аргументы функции f.

Выпишем подробно формулы для нахождения частных производных в том случае, если g действует из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, а f — из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, пусть $z = f(x, y)$ и $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Кстати, в последних двух равенствах буквами x, y обозначены разные объекты: с одной стороны, это символы переменных, а с другой — обозначения функций. Так поступают довольно часто и в конце концов привыкают понимать, в каком месте о каком статусе буквы идет речь. Итак, для функции $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ имеем

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v). \tag{12.5}$$

При нахождении производных первого порядка от композиции функций, если не требуется находить производные второго порядка, чаще всего не выписывают точки, в которых эти производные находятся. Однако если требуется найти производные второго или более высоких порядков, то лучше писать точки, в которых берутся соответствующие производные для того, чтобы учитывать имеющиеся зависимости и не ошибаться, забывая учесть те или иные переменные. Конечно, при нахождении производных последнего из требуемых порядков аргументы можно не писать.

12.9. Пример. Убедимся в том, что функция

$$z(x, y) = yf(x^2 - y^2),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $y^2 z'_x + xyz'_y = xz$.

Отметим сразу, что функция f зависит от одной переменной, поэтому при ее дифференцировании не требуется указывать, по какой переменной берется производная — переменная всего одна. Итак, имеем

$$z'_x = yf' \cdot 2x, \quad z'_y = f + yf' \cdot (-2y),$$

где производная f' берется в точке $x^2 - y^2$. Подставив выражения для z'_x, z'_y в уравнение, получим

$$y^2 \cdot (2xyf') + xy(f - 2y^2 f') = xyf = xz.$$

12.10. Пример. Найдем вторую смешанную производную функции $f(x, y) = g(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$, где g — функция, имеющая непрерывные производные второго порядка. При описании производных функции g цифрами внизу будем обозначать номер того аргумента,

по которому берется в данный момент производная, дабы не вводить дополнительных букв для обозначения аргументов функции g. Итак,

$$f'_x(x,y) = g'_1(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)\cdot 2x + g'_2(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)\cdot 2x + g'_3(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)\cdot 2y,$$

$$\begin{aligned} f''_{xy} &= (g''_{11}\cdot 2y + g''_{12}\cdot(-2y) + g''_{13}\cdot 2x)\cdot 2x \\ &\quad + (g''_{21}\cdot 2y + g''_{22}\cdot(-2y) + g''_{23}\cdot 2x)\cdot 2x \\ &\quad + (g''_{31}\cdot 2y + g''_{32}\cdot(-2y) + g''_{33}\cdot 2x)\cdot 2y + 2g'_3 \\ &= 4\big(xyg''_{11} - xyg''_{12} + x^2 g''_{13} + xyg''_{21} - xyg''_{22} \\ &\quad + x^2 g''_{23} + y^2 g''_{31} - y^2 g''_{32} + xyg''_{33}\big) + 2g'_3 \\ &= 4\big(xy\big(g''_{11} - g''_{12} + g''_{21} - g''_{22} + g''_{33}\big) \\ &\quad + x^2\big(g''_{13} + g''_{23}\big) + y^2\big(g''_{31} - g''_{32}\big)\big) + 2g'_3. \end{aligned}$$

12.11. Задачи. Предполагая, что функции φ, ψ имеют непрерывные частные производные до соответствующего порядка, проверить равенства:

(1) $yz'_x - xz'_y = 0$, если $z = \varphi(x^2+y^2)$;

(2) $x^2 z'_x - xyz'_y + y^2 = 0$, если $z = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$;

(3) $xu'_x + yu'_y + zu'_z = u + \dfrac{xy}{z}$, если $u = \dfrac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$;

(4) $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, если $u = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$;

(5) $u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$, если $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$;

(6) $x^2 u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} = 0$, если $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

(7) $u'_x u''_{xy} = u'_y u''_{xx}$, если $u = \varphi(x + \psi(y))$.

12.12. Мы определили дифференциал как линейный оператор. Займемся выработкой удобной формы представления дифференциала. Поскольку всякий линейный оператор, действующий между арифметическими конечномерными пространствами, описывается матрицей такого оператора, для нахождения дифференциала можно найти частные производные координатных функций данного отображения и записать его матрицу Якоби. Однако для отображений, действующих в $\mathbb{R}$, т. е. для функций многих переменных, используют другой способ описания.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$ функция. Возьмем вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$, выражающий приращение аргумента в точке x, и запишем действие дифференциала на вектор v:

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i. \tag{12.6}$$

Пусть $\pi_i : x \to x_i$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, — проектор на i-ю координату. Тогда дифференциал $d\pi_i(x)(v)$, который, естественно, обозначают через $dx_i(v)$, очевидно, находится так: $dx_i(v) = v_i$. Тогда, заменяя в (12.6) компоненты v_i выражениями $dx_i(v)$, приходим к записи

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(v), \tag{12.7}$$

или, опуская для краткости указание аргумента v, получаем такую (функциональную) форму выражения дифференциала:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \tag{12.8}$$

которую обычно и используют для записи дифференциала. Если опустить еще и указание точки x, в которой рассматривается дифференциал, то получается совсем коротко:

$$df = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\, dx_i. \tag{12.9}$$

12.13. Пример. Найдем дифференциал функции $u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$. Имеем $u'_x = f' \cdot 2x$, $u'_y = f' \cdot 2y$, $u_z = f' \cdot 2z$, так что

$$du = 2xf'dx + 2yf'dy + 2zf'dz.$$

12.14. Задачи. Найти дифференциалы функций u (здесь f — заданная дифференцируемая функция):

(1) $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$; **(2)** $u(x, y) = f(xy, x/y)$;

(3) $u(x, y, z) = f(x+y, z)$; **(4)** $u(x, y, z) = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$;

(5) $u = f(x, y, z)$; где $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$;

(6) $u(x, y, z) = f(x/y, y/z)$;

(7) $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

12.15. Рассмотрим функцию f, действующую из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Фиксируем вектор $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Если существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \tag{12.10}$$

его называют *производной функции f по вектору v в точке x* и обозначают одним из символов $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$, $f'_v(x)$, $\partial_v f(x)$. Если $\|v\| = 1$, то вектор v называют *направлением*, а производную $f'_v(x)$ по вектору v — *производной по направлению v* или по направлению l, где l — определяемая вектором v прямая.

Если функция f дифференцируема в точке x, то она имеет в этой точке производную по любому вектору и выполнено равенство

$$df(x)(v) = f'_v(x), \tag{12.11}$$

так что можно указать простой способ нахождения производной по вектору v дифференцируемой в точке x функции:

$$f'_v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i = \langle \operatorname{grad} f(x) \mid v \rangle, \tag{12.12}$$

где использован *градиент*

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

функции f в точке x, обозначаемый также символом $\nabla f(x)$, а через $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Надо иметь в виду, что наличие производной по любому вектору еще не гарантирует дифференцируемость f в точке x. Кстати, частные производные суть производные по направлениям векторов канонического базиса.

Очевидно, что координаты единичного вектора v равны косинусам углов между этим вектором и векторами канонического базиса. Их называют *направляющими косинусами вектора v*. В частности, для функции $f(x, y, z)$ трех переменных и направления $v = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ с направляющими косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ производная f по направлению v равна

$$f'_v(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\cos\alpha + f'_y(x, y, z)\cos\beta + f'_z(x, y, z)\cos\gamma.$$

Относительно градиента можно напомнить, что среди всех направлений, т. е. нормированных векторов, производная f в точке x в направлении, определяемом градиентом, наибольшая. Кроме того, вектор $\operatorname{grad} f(x)$ в точке x из множества уровня $\{x : f(x) = \text{const}\}$, ортогонален этому множеству уровня и направлен в сторону роста функции f. Так, для функции $f(x, y)$ (соответственно $f(x, y, z)$) градиент

$\operatorname{grad} f(x,y)$ направлен перпендикулярно линии (поверхности) уровня, проходящей через эту точку.

12.16. Пример. Найдем производную функции

$$z(x,y) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

в точке $M(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

В первую очередь найдем вектор внутренней нормали. Градиент функции $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, т. е. вектор $\operatorname{grad}\varphi(x,y) = \left(\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{2y}{b^2}\right)$, дает вектор нормали к множеству $\varphi(x,y) = 1$ в точке (x,y) и направлен в сторону роста функции φ, т. е. наружу от эллипса $\varphi(x,y) = 1$. В точке M имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(M) = \left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{b}\right), \quad \|\operatorname{grad}\varphi(M)\| = \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|},$$

и требуемый единичный вектор внутренней нормали — это вектор

$$-\frac{\operatorname{grad}\varphi(M)}{\|\operatorname{grad}\varphi(M)\|} = \left(-\frac{|b|\operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{|a|\operatorname{sign} b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Производная функции z по направлению внутренней нормали в точке M равна

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial z}{\partial x}(M)\frac{|b|\operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\partial z}{\partial y}(M)\frac{|a|\operatorname{sign} b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &\qquad = \left(\frac{\sqrt{2}|b|\operatorname{sign} a}{a} + \frac{\sqrt{2}|a|\operatorname{sign} b}{b}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{|ab|}. \end{aligned}$$

12.17. Задачи. Найти производную функции f в точке M по данному направлению, если

(1) $f = x^2 - y^2$, $M = (1,1)$, по направлению l, составляющему угол $\pi/3$ с положительным направлением оси Ox;

(2) $f = x^2 - xy + y^2$, $M(1,1)$, по направлению l, составляющему угол α с положительным направлением оси Ox;

(3) $f = \ln(x^2+y^2)$, $M(x_0, y_0)$, по направлению l, перпендикулярному линии уровня, проходящей через эту точку, и направленному в сторону роста функции f;

(4) $f = \operatorname{arctg}(y/x)$, $M(1/2, \sqrt{3}/2)$ по направлению внешней нормали к окружности $x^2 + y^2 = 2x$ в точке M;

(5) $f = x^2 - 3yz + 4$, $M(1, 2, -1)$, по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями;

(6) $f = \ln(e^x + e^y + e^z)$, $M(0, 0, 0)$, по направлению луча, образующего с осями координат x, y, z углы соответственно $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/3$.

12.18. *Касательной плоскостью к поверхности* в некоторой ее точке называют плоскость, содержащую все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку (точку касания). Вектор, ортогональный касательной плоскости, называют *вектором нормали*.

Если гладкая поверхность задана в явном виде, т. е. как график некоторой гладкой функции $z = f(x, y)$, то уравнение плоскости, касательной к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$, таково:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{12.13}$$

Вектор $(z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1)$ является вектором нормали к графику функции z в точке (x_0, y_0, z_0).

Если гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ (т. е. представляет собой множество решений данного уравнения), то уравнение плоскости, касательной к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), где $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{12.14}$$

а вектор нормали совпадает с градиентом функции F в точке (x_0, y_0, z_0).

Если гладкая поверхность задана параметрически, т. е. как образ открытой области в $\mathbb{R}^2$ при некотором невырожденном отображении $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то уравнение касательной к такой поверхности в точке $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$ задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{12.15}$$

Канонический вид уравнения плоскости получается при разложении определителя по первой строке. Вектор нормали равен

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}, \tag{12.16}$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы канонического базиса и имеется в виду разложение определителя по первой строке.

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, т. е. отображение, действующее из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$, то $(x'(t), y'(t), z'(t))$ — вектор, касательный к кривой $(x(t), y(t), z(t))$ в точке $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Уравнение касательной прямой можно записать так:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}, \tag{12.17}$$

или, в параметрическом виде, так:

$$x = x_0 + x'(t_0)t, \quad y = y_0 + y'(t_0)t, \quad z = z_0 + z'(t_0)t, \quad t \in \mathbb{R},$$

а уравнение нормальной плоскости — так:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

12.19. Задачи. 1. Написать уравнения касательной плоскости в указанных точках к поверхностям:

(1) $z = x^2 + y^2$, $x = 1$, $y = 2$; **(2)** $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $x = 1$, $y = 1$;

(3) $z = x^3 - 3xy + y^3$, $x = 1$, $y = 1$; **(4)** $z = e^{x \cos y}$, $x = 1$, $y = 0$;

(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $(3, 4, -12)$; **(6)** $xy^2 + z^3 = 12$, $(1, 2, 2)$;

(7) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $(1, 2, -1)$;

(8) $xyz(z^2 - x^2) = 5 + y^2$, $(1, 1, 2)$;

(9) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, $(3, 5, 9)$;

(10) $x = u$, $y = u^2 - 2uv$, $z = u^3 - 3u^2v$, $(1, 3, 4)$.

2. Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей в данных точках к кривым:

(1) $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$ при $t = \pi/4$;

(2) $y = x$, $z = x^2$ при $x = 1$.

3. Доказать, что касательная к винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ образует постоянный угол с осью Oz.

4. Доказать, что кривая $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

12.20. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При каждом фиксированном $v \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим функцию $\varphi : x \to df(x)(v)$. Если эта функция дифференцируема

в точке $x \in \Omega$, то значение ее дифференциала $d\varphi(x)(v)$ на векторе v называют *вторым дифференциалом функции f в точке x* (на векторе v) и обозначают символом $d^2 f(x)(v)$ Легко найти, что

$$d^2 f(x)(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) v_i v_j,$$

или, в функциональной записи,

$$d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx_i dx_j. \tag{12.18}$$

Считая функцию f такой, что смешанные производные второго порядка не зависят от порядка следования переменных дифференцирования, для функции $f(x, y)$ двух переменных (опуская даже указание точки (x, y)) имеем

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2, \tag{12.19}$$

а для функции $f(x, y, z)$ трех переменных будет

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2 f''_{xy} dx dy + 2 f''_{xz} dx dz + 2 f''_{yz} dy dz. \tag{12.20}$$

Индуктивно определяются дифференциалы более высоких порядков. Символической формулой дифференциал порядка k выражается так:

$$d^k f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^k f(x), \tag{12.21}$$

которую надо воспринимать так: мы раскрываем скобки в правой части, однако то, что относится к взятию производных, понимается как порядок и перечень переменных, по которым берутся производные (а не степень), а множители dx_i возводятся в соответствующие степени и перемножаются. После этого к открытым операциям взятия частных производных ставится функция $f(x)$, в результате чего получается конкретное равенство, выражающее дифференциал порядка k функции f в точке x. Проделав сказанное, запишем формулу (12.21) для функции $f(x, y)$ двух переменных в виде

$$d^k f(x, y) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x, y) dx^{k-i} dy^i. \tag{12.22}$$

Для нахождения дифференциала второго порядка надо найти все частные производные второго порядка и сделать одну из записей вида (12.18)–(12.20) соответственно числу переменных у функции.

12.21. Задачи. Найти вторые дифференциалы следующих функций:

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; **(2)** $f(x,y,z)=xy+yz+zx$;

(3) $u(x,y)=f(x+y,x-y)$; **(4)** $u(x,y,z)=f(x+y,z)$.

12.22. Пусть функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ в каждой точке области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ имеет непрерывные частные производные до порядка m. Пусть x — фиксированная точка области Ω. Тогда справедлива *формула Тейлора с локальным остаточным членом в форме Пеано* (*локальная формула Тейлора*)

$$f(x+h)=f(x)+df(x)(h)+\frac{1}{2!}d^2f(x)(h)+\cdots+\frac{1}{m!}d^mf(x)(h)+\alpha(h)\|h\|^m, \tag{12.23}$$

где $\alpha(h)\to 0$ при $\|h\|\to 0$, выражающая разложение функции f по степеням приращения h аргумента функции вблизи точки x. Если $x=0$, то формулу Тейлора называют *формулой Маклорена*.

Запишем формулу (12.23) в другом виде. Пусть теперь $x_0\in\Omega$ — фиксированная точка, а $x\in\Omega$ — переменная точка. В этом случае приращение выражается так: $h=x-x_0$, и мы, переписав равенство (12.23), получим вид формулы Тейлора, выражающий *разложение* $f(x)$ *по степеням* $x-x_0$ для функции f в точках x, близких к фиксированной точке x_0:

$$f(x)=f(x_0)+df(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)(x-x_0)+\ldots \\ +\frac{1}{m!}d^mf(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)\|x-x_0\|^m, \tag{12.24}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

Перепишем формулу (12.24) для функции двух переменных с использованием формулы (12.22):

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(x-x_0)^{k-i}(y-y_0)^i+o(\rho^m), \tag{12.25}$$

где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $x\to x_0$, $y\to y_0$.

Запишем формулу Тейлора для функции $f(x,y)$ двух переменных, ограничившись третьим порядком, но повысив степень подробности записи и выделяя группы, соответствующие каждой степени переменных:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0))$$

$$+\frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2)$$
$$+\frac{1}{6}(f'''_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3+3f'''_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)$$
$$+3f'''_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2+f'''_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3)$$
$$+o\big(\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^3}\big),\quad x\to x_0,\ y\to y_0,\quad (12.26)$$

где $o\big(\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^3}\big)=\alpha(x,y)\cdot\big(\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^3}\big)$ с $\alpha(x,y)\to 0$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$.

12.23. Пример. Разложим по формуле Тейлора до второго порядка включительно функцию $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x/y)$ в окрестности точки $(1,1)$. Для решения поставленной задачи надо найти частные производные до второго порядка в точке $(1,1)$ и записать в нашем конкретном случае формулу (12.25) (или часть формулы (12.26) до второго порядка). Займемся производными:

$$f'_x(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},\quad f'_y(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},\quad f''_{xx}(x,y)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad f''_{yy}(x,y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$f'_x(1,1)=\frac{1}{2}$, $f'_y(1,1)=-\frac{1}{2}$, $f''_{xx}(1,1)=-\frac{1}{2}$, $f''_{xy}(1,1)=0$, $f''_{yy}(1,1)=\frac{1}{2}$, а теперь запишем разложение:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$$
$$+o((x-1)^2+(y-1)^2).$$

12.24. Задачи. 1. Разложить по формуле Тейлора функцию f в окрестности заданной точки:

(1) $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$, $(1,2)$;

(2) $f(x,y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y$, $(2,-1)$;

(3) $f(x,y,z)=xyz$, $(1,2,3)$;

(4) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, $(1,0,1)$.

2. Выписать формулу Тейлора до второго порядка включительно для функции f в окрестности заданной точки:

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$, $(2,1)$; **(2)** $f(x,y)=\sin x\cos y$, (x_0,y_0).

3. Разложить по формуле Маклорена до второго порядка функцию f:

(1) $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$; **(2)** $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1+y}$.

4. Разложить по формуле Маклорена до второго порядка функцию $f(x,y,z)=\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z)$.

5. Разложить $f(x+h,y+k,z+l)$ по целым положительным степеням h,k,l, если

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz.$$

6. Разложить по степеням h,k функцию

$$\Delta_{xy}f(h,k)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)$$

до второго порядка.

12.25. Ответы. 12.2. (1) $f'_x=\sin((x+y)+x\cos(x+y)$, $f'_y=x\cos(x+y)$; (2) $f'_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$; (3) $f'_x=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $f'_y=-\frac{x\operatorname{sign}y}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\ne0$; (4) $\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $\frac{3y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $x^2+y^2\ne0$; (5) $f'_x=\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, $f'_y=\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2\ne0$, $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$; (6) $f'_x=\frac{y\operatorname{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}}$, $f'_y=\frac{x\operatorname{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}}$, $x^2+y^2\ne0$.

12.5. 1. (1) Недифференцируема при $y=-x$; (2) недифференцируема при $xy=0$; (3) дифференцируема всюду; (4) недифференцируема в точке $(0,0)$. **5.** Недифференцируема в точке $(1,1)$, дифференцируема в точке $(1,2)$. **6.** r. **7.** $r^2\cos\psi$.

12.7. 1. (1) -4, (2) $\sin y\cos(x+\cos y)$. **2.** (1) $\frac{15}{8}\sqrt{\frac{yz^3}{x}}$; (2) $(1+3xyz+x^2y^2z^2)e^{xyz}$.

12.14. (1) $du=f'\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2) $du=\left(yf'_1+\frac{1}{y}f'_2\right)dx+\left(xf'_1-\frac{x}{y^2}f'_2\right)dy$; (3) $du=f'_1\,dx+f'_1\,dy+f'_2\,dz$; (4) $du=(f'_1+2xf'_2)\,dx+(f'_1+2yf'_2)\,dy+(f'_1+2zf'_2)\,dz$; (5) $du=(f'_1+2tf'_2+3t^2f'_3)\,dt$; (6) $du=\frac{1}{y}f'_1\,dx-\left(\frac{x}{y^2}f'_1-\frac{1}{z}f'_2\right)dy-\frac{y}{z^2}f'_2\,dz$; (7) $du=2(x(f'_1+f'_2)+yf'_3)\,dx+2(y(f'_1-f'_2)+xf'_3)\,dy$.

12.17. (1) $1-\sqrt{3}$; (2) $\cos\alpha+\sin\alpha$; (3) $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$; (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (5) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (6) $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$.

12.19. 1. (1) $2x+4y-z-5=0$; (2) $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$; (3) $z=-1$; (4) $ex-z=0$; (5) $3x+4y-12z=169$; (6) $x+y+3z=9$; (7) $x+11y+5z=$

18; (8) $2x+y+11z=25$; (9) $12x-9y+2z=9$; (10) $6x+3y-2z=7$. **2.** (1) $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $y=\frac{b}{2}$; $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$; (2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$, $x+y+2z=4$.

12.21. (1) $d^2u=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; (2) $d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$; (3) $d^2u=f''_{11}(dx+dy)^2+2f''_{12}(dx^2-dy^2)+f''_{22}(dx-dy)^2$; (4) $d^2u=f''_{11}(dx+dy)^2+2f''_{12}(dx+dy)dz+f''_{22}dz^2$.

12.24. 1. (1) $f(x,y)=-9+9(x-1)-21(y-2)+3(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-12(y-2)^2+(x-1)^3-2(y-2)^3$; (2) $f(x,y)=6+3(x-2)+(y+1)+(x-2)^2-(x-2)(y+1)+(y+1)^2+(x-2)^3$; (3) $f(x,y,z)=6+6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)+3(x-1)(y-2)+2(x-1)(z-3)+(y-2)(z-3)+(x-1)(y-2)(z-3)$; (4) $f(x,y,z)=2+3(x-1)-3y+3(z-1)+3(x-1)^2+3(z-1)^2-3(x-1)y-3y(z-1)+(x-1)^3+y^3+(z-1)^3-3(x-1)y(z-1)$. **2.** (1) $f(x,y)=1-(x-2)+(y-1)+(x-2)^2-2(x-2)(y-1)+(y-1)^2$; (2) $f(x,y)=\sin x_0\cos y_0+\cos x_0\cos y_0(x-x_0)-\sin x_0\sin y_0(y-y_0)-\frac{1}{2}\sin x_0\cos y_0(x-x_0)^2-\cos x_0\sin y_0(x-x_0)(y-y_0)-\frac{1}{2}\sin x_0\cos y_0(y-y_0)^2$. **3.** (1) $f(x,y)=1-\frac{x^2-y^2}{2}+o(x^2+y^2)$; (2) $f(x,y)=\frac{\pi}{4}+\frac{x-y}{2}-\frac{x^2-y^2}{4}+o(x^2+y^2)$. **4.** $f(x,y,z)=xy+yz+zx+o(x^2+y^2)$. **5.** $f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+2((Ax+Dy+Ez)h+(Dx+By+Fz)k+(Ex+Fy+Cz)l)+f(h,k,l)$. **6.** $\Delta_{xy}f(h,k)=f''_{12}(x,y)hk$.

§ 13. Теоремы о неявном отображении и об обратном отображении

13.1. Теорема 1 (о неявном отображении). *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^{m+n}$, $m,n\in\mathbb{N}$, и F — действующее в $\mathbb{R}^n$ отображение класса $C^1(G,\mathbb{R}^n)$, т. е. имеющее непрерывные частные производные первого порядка в точках из G. Пусть точка*

$$(x_0,y_0)\in G,\quad x_0=\big(x_1^0,\dots,x_m^0\big),\quad y_0=\big(y_1^0,\dots,y_n^0\big),$$

такова, что $F(x_0,y_0)=0$. Предположим, что F невырожденное в точке (x_0,y_0), при этом якобиан $\det\dfrac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}(x_0,y_0)$ отличен от нуля. Тогда существуют такие открытые окрестности U точки x_0 и V точки y_0, что $U\times V\subset G$ и для любого $x\in U$ существует единственное $y\in V$, обладающее свойством $F(x,y)=0$. Тем самым, сопоставляя каждому $x\in U$ соответствующее ему $y\in V$, получаем отображение $y=\varphi(x)$, о котором говорят, что оно вблизи точки (x_0,y_0) неявно задается отображением F. При этом $\varphi\in C^1(U,V)$, а если $F\in C^r(G,\mathbb{R}^n)$, то $\varphi\in C^r(U,V)$.

Обратим внимание на то, что функция φ характеризуется тождеством

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \in U. \tag{13.1}$$

Производные функции φ находятся в результате дифференцирования этого равенства по координатам точки x и выражения из получаемых равенств требуемых производных. При выражении производных отображения φ в знаменателе оказывается тот самый якобиан, отличие от нуля которого предусмотрено в условии теоремы.

Отметим еще, что неявная функция φ действует в точности в те переменные, якобиан исходного отображения по которым отличен от нуля.

Важно иметь в виду, что отображение φ в теореме о неявном отображении задается локально и его производные вычисляются вблизи данной точки.

Теорема 2 (об обратном отображении). *Пусть f — гладкое отображение из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$, x — внутренняя точка области определения $D(f)$. Тогда если f регулярно в x, т. е.* $\det \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$, *то существуют такие окрестности V точки x и W точки $f(x)$, что f — диффеоморфизм V на W, т. е. гладкое взаимно однозначное отображение множества V на W, обратное к которому гладкое.*

13.2. Пример. Найдем производные y', y'' функции $y(x)$, определяемой уравнением $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Функция $y(x)$ определяется тождеством $y(x) - \varepsilon \sin y(x) = x$, которое продифференцируем по x:

$$y'(x) - \varepsilon \cos y(x) \cdot y'(x) = 1, \tag{13.2}$$

откуда

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)}$$

(поскольку нам предстоит дифференцировать еще раз, сохраняем указание аргумента у функции и производной). Продифференцируем равенство (13.2) еще раз:

$$y'' + \varepsilon \sin y \cdot (y')^2 - \varepsilon \cos y \cdot y'' = 0,$$

откуда

$$y'' = \frac{\varepsilon (y')^2 \sin y}{\varepsilon \cos y - 1} = \frac{\varepsilon \sin y}{(\varepsilon \cos y - 1)^3}.$$

Отметим, что производные в данной точке x зависят не только от аргумента x, но и от значения $y(x)$.

13.3. Пример. Найдем производную z'_x функции $z(x,y)$, определяемой системой равенств

$$x = u + \ln v, \quad y = v - \ln u, \quad z = 2u + v,$$

в точке (x,y), соответствующей значениям $u = 1$, $v = 1$.

Первые два уравнения при соответствующих условиях определяют функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, подставляя которые в третье, получаем равенство

$$z(x,y) = 2u(x,y) + v(x,y).$$

Отсюда $z'_x = 2u'_x + v'_x$. Производные u'_x, v'_x найдем из тождеств

$$x = u(x,y) + \ln v(x,y), \quad y = v(x,y) - \ln u(x,y)$$

путем их дифференцирования:

$$1 = u'_x + \frac{1}{v}v'_x, \quad 0 = v'_x - \frac{1}{u}u'_x,$$

откуда

$$u'_x = \frac{uv}{1+uv}, \quad v'_x = \frac{v}{1+uv}$$

и, в частности, при $u = v = 1$ будет $u'_x = v'_x = 1/2$ и $z'_x = 2u'_x + v'_x = 3/2$.

13.4. Пример. Найдем производную u' функции $u = u(x)$, определяемой системой равенств

$$u = f(x,y,z), \quad g(x,y,z) = 0, \quad h(x,y,z) = 0.$$

Последние два равенства выражают обращение в нуль отображения F из $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, где $F(x,y,z) = (g(x,y,z), h(x,y,z))$. Согласно теореме о неявном отображении этими равенствами определяется отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ с некоторыми координатными функциями $y(x)$, $z(x)$. Их производные найдем из системы

$$g(x, y(x), z(x)) = 0, \quad h(x, y(x), z(x)) = 0,$$

продифференцировав ее:

$$g'_x + g'_y y' + g'_z z' = 0, \quad h'_x + h'_y y' + h'_z z' = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{g'_z h'_x - g'_x h'_z}{g'_y h'_z - g'_z h'_y}, \quad z' = \frac{g'_x h'_y - g'_y h'_x}{g'_y h'_z - g'_z h'_y}.$$

Производную u' найдем из равенства $u(x) = f(x, y(x), z(x))$, так что $u' = f'_x + f'_y y' + f'_z z'$, где y', z' найдены выше.

13.5. Задачи. 1. Найти y', y'' для функций $y(x)$, определяемых уравнениями

(1) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$, **(2)** $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

2. Найти z'_x и z'_y в точке $(1, -2)$ для каждой дифференцируемой функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

3. Для функции $z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, **(2)** $z^3 - 3xyz = a^3$.

4. Найти z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, если

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

5. Найти z'_x, если $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

6. Найти z'_x, z'_y, z''_{xx}, если $F(x, x + y, x + y + z) = 0$.

7. Пусть $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

8. Найти $x'(z)$, $y'(z)$, если $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, если $xu - yv = 0$, $yu + xv = 1$.

10. В какой области в $\mathbb{R}^2$ переменных x, y система уравнений

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

где $u, v \in \mathbb{R}$, определяет z как функцию от x, y? Найти z'_x, z'_y.

11. Найти z''_{xx}, если

$$x = \cos\varphi\cos\psi, \quad y = \sin\varphi\cos\psi, \quad z = \sin\psi.$$

12. Найти z''_{xy}, в точке $u = 2$, $v = 1$, если

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3, \quad z = 2uv.$$

13. Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, если

$$x = e^u + u\sin v, \quad y = e^u - u\cos v.$$

14. Найти дифференциал dz функции $z(x,y)$, определяемой из системы

$$f(x,y,z,t) = 0, \quad g(x,y,z,t) = 0.$$

15. Показать, что функция $z(x,y)$, определяемая уравнением

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0,$$

где $\Phi(u,v)$ — гладкая функция, a, b — постоянные, является решением уравнения $az'_x + bz'_y = 1$.

16. Показать, что функция $z(x,y)$, определяемая системой уравнений

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha),\\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha), \end{aligned}$$

где f — произвольная гладкая функция, удовлетворяет уравнению

$$(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = z^2.$$

17. Показать, что функция $z(x,y)$, определяемая системой уравнений

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha),\\ 0 &= x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению $z'_x \cdot z'_y = 1$.

18. Показать, что функция $z(x,y)$, определяемая системой уравнений

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha),\\ 0 &= x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha), \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению $z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$.

13.6. Ответы. 13.5. 1. (1) $y' = -\frac{x+y}{x-y}$, $y'' = \frac{2a^2}{(x-y)^3}$, (2) $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; **2.** $z'_x = 0$, $z'_y = -1$, если $z(1,-2) = 0$; $z'_x = -1$, $z'_y = 1/2$, если $z(1,-2) = -2$; $z'_x = 1$, $z'_y = 1/2$, если $z(1,-2) = 2$; **3.** (1) $z'_x = -\frac{x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$, $z''_{xx} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}$, $z''_{xy} = -\frac{xy}{z^3}$, $z''_{yy} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}$; (2) $z'_x = \frac{yz}{z^2-xy}$,

$z'_y = \frac{xz}{z^2-xy}$, $z''_{xx} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$, $z''_{yy} = -\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$, $z''_{xy} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$; **4.** $z''_{xx} = -\frac{2}{5}$, $z''_{xy} = -\frac{1}{5}$, $z''_{yy} = -\frac{394}{125}$; **5.** $z'_x = -\frac{F'_1+2xF'_2}{F'_1+2zF'_2}$; **6.** $z'_x = -\big(1 + \frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\big)$, $z'_y = -\big(1 + \frac{F'_2}{F'_3}\big)$, $z''_{xx} = -F'^{-3}_3\big(F'^2_3\big(F''_{11} + 2F''_{12} + F''_{22}\big) - 2\big(F'_1 + F'_2\big)F'_3\big(F''_{13} + F''_{23}\big) + \big(F'_1 + F'_2\big)^2F''_{33}\big)$; **8.** $x' = \frac{y-z}{x-y}$, $y' = \frac{z-x}{x-y}$; **9.** $u'_x = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $v'_x = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $u'_y = \frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $v'_y = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$; **10.** $y \geq \frac{x^2}{2}$, $z'_x = -3uv$, $z'_y = \frac{3}{2}(u+v)$ $(u \neq v)$; **11.** $z''_{xx} = -\frac{\sin^2\psi+\cos^2\psi\cos^2\varphi}{\sin^3\psi}$; **12.** $z''_{xy} = \frac{26}{121}$; **13.** $u'_x = \frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$, $u'_y = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$, $v'_x = \frac{-(e^u-\cos v)}{u(e^u(\sin v-\cos v)+1)}$, $v'_y = \frac{e^u+\sin v}{u(e^u(\sin v-\cos v)+1)}$; **14.** $dz = -\frac{I_1\,dx+I_2\,dy}{I_3}$, где $I_1 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_2 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$.

§ 14. Экстремум

14.1. Рассмотрим функцию f, действующую из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Точку $a \in D(f)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, называют *точкой локального максимума* (*минимума*) функции f, если существует такая окрестность U точки a, что $f(x) \leq f(a)$ (соответственно $f(x) \geq f(a)$) для всех $x \in U \cap D(f)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Если для $x \in U \cap D(f)$ выполняется строгое неравенство $f(x) < f(a)$ (соответственно $f(x) > f(a)$), то говорят, что a — *точка строгого локального максимума* (*минимума*). Если a — либо точка локального минимума, либо точка локального максимума, то говорят, что a — *точка* (локального) *экстремума* функции f.

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума). *Пусть a — внутренняя точка области определения $D(f)$ функции f, и пусть f дифференцируема в точке a. Тогда если a — точка локального экстремума, то*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14.1}$$

Внутренние точки из $D(f)$, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называют *стационарными точками* функции f.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). *Пусть f — функция класса $C^2(\Omega)$ на открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $a \in \Omega$ — стационарная точка функции f. Если квадратичная форма*

$$d^2f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{14.2}$$

(от переменных dx_i, dx_j) знакоопределенная, то a — точка строгого локального экстремума, а именно максимума, если $d^2f(a)$ определенно отрицательна, и минимума, если определенно положительна. Если $d^2f(a)$ знаконеопределенная, то в точке a экстремума нет.

Если $d^2f(a)$ полуопределенная (т. е. она принимает значения одного знака, но может обращаться в нуль на ненулевых значениях переменных), то второй дифференциал не позволяет судить о свойствах функции f, связанных с экстремумом в точке a.

Для выяснения знакоопределенности квадратичной формы можно использовать критерий Сильвестра.

Утверждение. *Пусть*

$$l = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

— квадратичная форма от переменных u_i, u_j. Тогда l определенно положительная в том и только в том случае, если строго положительны все главные (диагональные) миноры матрицы (a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$.

Условия определенной отрицательности квадратичной формы l получаются из приведенного утверждения применением его к форме $-l$. А именно, квадратичная форма определенно отрицательна, если ее главные миноры меняют знак, начиная с отрицательного.

14.2. Пример. Найдем точки локального экстремума функции

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Составим систему уравнений

$$f'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \quad f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \quad f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0$$

для нахождения стационарных точек, из которой находим единственную в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ стационарную точку $a(1/2, 1, 1)$. Найдем теперь вторые производные функции f и затем их значения в точке a:

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad f''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad f''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3},$$

$$f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = -\frac{2z}{y^2},$$

$$f''_{xx}(a) = 4, \quad f''_{yy}(a) = 3, \quad f''_{zz}(a) = 6, \quad f''_{xy}(a) = -2, \quad f''_{yz}(a) = -2.$$

Матрица квадратичной формы $d^2f(a)$ такова:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

и ее главные миноры равны соответственно 4, 8, 32. Значит, $d^2f(a)$ определенно положительна и a — точка локального минимума функции f, при этом $f(1/2, 1, 1) = 4$.

14.3. Задачи. 1. Исследовать на экстремум следующие функции:

(1) $u(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$;

(2) $u(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

(3) $u(x, y) = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy$;

(4) $u(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

(5) $u(x, y) = \dfrac{x + y}{xy} - xy$; **(6)** $u(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$;

(7) $u(x, y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}$; **(8)** $u(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$;

(9) $u(x, y, z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$;

(10) $u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$;

(11) $u(x, y, z) = \dfrac{256}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + z^2$;

(12) $u(x, y, z) = (x + 7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

2. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$, заданную неявно условиями:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z + 8 = 0$, $z > 2$;

(2) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$, $z > 2$.

3. Исследовать на строгий экстремум каждую функция $z = z(x, y)$, заданную неявно уравнением:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$;

(2) $x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0$.

14.4. Обратимся к рассмотрению нахождения условного (говорят также относительного) экстремума. Задача нахождения условного экстремума состоит в поиске локальных максимумов и минимумов функции при условии, что рассматриваются при сравнении со значением в

данной точке не все точки из окрестности данной, а только те, которые подчинены некоторым условиям (т. е. экстремума относительно некоторого множества, включающего данную точку).

Пусть дана функция $f(x)$, действующая из открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Пусть, кроме того, даны k функций $h_1(x), \ldots, h_k(x)$, $1 \le k < n$, заданных на Ω. Обозначим через Q множество точек $x \in \Omega$, являющихся решениями системы уравнений $h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0$. Точку $x_0 \in \Omega$ называют *точкой условного максимума* (*минимума*) *функции f относительно множества Q* (или *при условии выполнения связей* $h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0$), если существует такая ее окрестность U, что $f(x) \le f(x_0)$ (соответственно $f(x) \ge f(x_0)$) для всех $x \in U \cap Q$, т. е. для всех $x \in U$, удовлетворяющих условиям $h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0$. Если в сравнении значений $f(x)$ и $f(x_0)$ неравенство строгое, то говорят о *строгом условном* (*относительном*) *максимуме или минимуме*. Если в данной точке есть либо относительный максимум, либо относительный минимум, то такую точку называют *точкой относительного экстремума*.

Всюду далее будем предполагать, что функции f и $h_1(x), \ldots, h_k(x)$ гладкие, т. е. имеют непрерывные частные производные по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$, и, кроме того, система функций $h_1, \ldots, h_k$ обладает свойством невырожденности на множестве Q, т. е. ранг матрицы Якоби $\dfrac{\partial(h_1, \ldots, h_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ равен k во всех точках множества Q.

Теорема 1 (необходимое условие относительного экстремума). *Пусть $x \in \Omega$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, — точка экстремума функции f при условиях*

$$h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0. \tag{14.3}$$

Тогда найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, что функция Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(x_1, \ldots, x_n)$$

имеет в точке x нулевые частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ называют *множителями Лагранжа*.

Тем самым для нахождения n координат точки x, в которой возможен условный экстремум, и k множителей Лагранжа в нашем распоряжении есть $k + n$ уравнений

$$h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0. \tag{14.4}$$

Теорема 2 (достаточное условие относительного экстремума). *Предположим, что функции $f, h_1, \ldots, h_k$ дважды гладкие в Ω, т. е. имеют в каждой точке из Ω непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным. Предположим также, что в точке $x \in \Omega$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, такой, что $h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0$, выполнены необходимые условия экстремума, т. е.*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Составим квадратичную форму

$$d^2L(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{14.5}$$

(от переменных dx_i, dx_j) и рассмотрим ее сужение на подпространство $H \subset \mathbb{R}^n$, ортогональное градиентам $\nabla h_1(x), \ldots, \nabla h_k(x)$. Тогда если $d^2L(x)$, рассматриваемая только на H, знакоопределенная, то x — точка строгого относительного экстремума, а именно строгого максимума в случае определенно отрицательной и строгого минимума для определенно положительной квадратичной формы.

Технически для нахождения сужения квадратичной формы $d^2L(x)$ от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ в стационарной точке x на подпространство H надо составить систему уравнений

$$\langle \nabla h_1(x) | dx \rangle = 0, \ldots, \langle \nabla h_k(x) | dx \rangle = 0, \tag{14.6}$$

где $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, т. е. систему

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{14.7}$$

выразить $n - k$ переменных через оставшиеся и, подставив их в $d^2L(x)$, получить второй дифференциал только на подпространстве H.

14.5. Пример. Изучим экстремум функции $z = xy$ при условии $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Из системы

$$L'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

находим $\lambda = \dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а также $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Изучим подробно задачу для одного из найденных значений λ и одной из точек, удовлетворяющих при выбранном λ необходимым условиям, другие случаи разбираются аналогично. Пусть $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем

$$L''_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad L''_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = L''_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\lambda = 1.$$

Таким образом,

$$d^2L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(dx, dy) = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx + dy)^2.$$

Эта квадратичная форма полуопределенная на $\mathbb{R}^2$ — она принимает неотрицательные значения и обращается в нуль на прямой $dx = -dy$. Если бы мы получили форму, знакоопределенную на всем $\mathbb{R}^2$, то далее нам ничего делать не надо было — она была бы знакоопределенной и на требуемом подпространстве, откуда мы могли бы сделать заключение о наличии условного экстремума. Но наша ситуация не такая, и нам придется заниматься сужением второго дифференциала на подпространство, ортогональное градиенту $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)$ функции $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Такое подпространство представляет собой прямую

$$\{(dx, dy) : dx \cdot \sqrt{2} - dy \cdot \sqrt{2} = 0\}.$$

Выражая, например, dy через dx и подставляя полученное выражение в $d^2L\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, получаем $d^2L\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{dy=dx} = (2dx)^2$, и поскольку полученная квадратичная форма (уже от одной переменной) определенно положительна, в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ достигается минимум функции $z = xy$ относительно множества $x^2 + y^2 = 1$.

14.6. Пример. Изучим экстремум функции $u(x, y) = x^2 - y^2$ при условии $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Из системы

$$L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = -2y + 2\lambda y = 0$$

находим $\lambda = 1$ и $x = 0$, $y = \pm 1$, а также $\lambda = -1$ и $x = \pm 1$, $y = 0$.

Изучим подробно одну из найденных точек, а именно точку $x = 0$, $y = 1$ с соответствующим ей значением $\lambda = 1$. Найдем

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda, \quad L''_{yy} = -2 + 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0.$$

Составим

$$d^2L(0,1)(dx, dy) = 4dx^2.$$

Она принимает неотрицательные значения, но обращается в нуль на множестве $dx = 0$, $dy \in \mathbb{R}$, так что не будет знакоопределенной. Найдем градиент $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)$ и $\nabla h(0, 1) = (0, 2)$. На подпространстве, состоящем из точек (dx, dy) таких, что $(dx, dy) \perp \nabla h(0, 1)$, т. е. удовлетворяющих уравнению $0 \cdot dx + 2 \cdot dy = 0$, или $dy = 0$, приходим к квадратичной форме $4dx^2$, но уже рассматриваемой не на всех (dx, dy), а только на одномерном пространстве $dx \in \mathbb{R}$, $dy = 0$, на котором она определенно положительна. В итоге получаем, что у данной функции достигается относительный минимум в рассматриваемой точке.

14.7. Пример. Изучим экстремум функции $f(x, y, z) = xyz$ на множестве $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $h_2(x, y, z) = x + y + z = 0$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z).$$

Найдем первые производные:

$$L'_x = yz + 2\lambda x + \mu, \quad L'_y = xz + 2\lambda y + \mu, \quad L'_z = xy + 2\lambda z + \mu.$$

Решим систему уравнений

$$yz + 2\lambda x + \mu = 0, \quad xz + 2\lambda y + \mu = 0, \quad xy + 2\lambda z + \mu = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Сложим первые три уравнения, результат умножим на 2, прибавим к нему четвертое уравнение и учтем пятое. В итоге получим $\mu = 1/6$. Теперь вычтем из первого уравнения второе, из второго третье и из третьего первое. Приходим к системе

$$(y - x)(z - 2\lambda) = 0, \quad (z - y)(x - 2\lambda) = 0, \quad (x - z)(y - 2\lambda) = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Если в первом уравнении $y = x$, то во втором и третьем первые множители в нуль не обращаются, так что $x = y = 2\lambda$. Подставив эту информацию в последние два уравнения, найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \mp\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Аналогично, полагая во втором уравнении $y = z$ и в третьем $x = z$, можно получить еще четыре корня.

Изучим подробно точку M с координатами

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

с соответствующими ей $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$, оставив читателю изучение остальных пяти. Найдем

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = z, \quad L''_{xz} = y, \quad L''_{yz} = x.$$

Тогда

$$d^2L(M)(dx, dy, dz) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2+dy^2+dz^2)-2\sqrt{\frac{2}{3}}dxdy+\frac{2}{\sqrt{6}}dydz+\frac{2}{\sqrt{6}}dzdx.$$

Образуем подпространство, ортогональное градиентам функций связи

$$\nabla h_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

и

$$\nabla h_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)|_{(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-\sqrt{2/3})} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Это будет одномерное подпространство, состоящее из таких (dx, dy, dz), что

$$dx + dy - 2dz = 0, \quad dx + dy + dz = 0.$$

Выразим dy, dz через dx: $dy = -dx$, $dz = 0$. Квадратичная форма $d^2L(M)(dx, dy, dz)$ на полученном подпространстве примет вид

$$d^2L(M)(dx, dy, dz) = \frac{2}{\sqrt{6}}dx^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}dx^2 = \sqrt{6}dx^2,$$

так что будет определенно положительной. Таким образом, в точке M функция f на рассматриваемом множестве достигает относительного минимума $f(M) = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

14.8. Задачи. Исследовать на экстремум функции u при указанных уловиях связи:

(1) $u(x,y) = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y - 6 = 0;$

(2) $u(x,y) = x^2 - y^2, \quad 2x - y - 3 = 0;$

(3) $u(x,y) = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1;$

(4) $u(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2, \quad x^2 + 4y^2 = 1;$

(5) $u(x,y) = x^2 + y^2, \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0;$

(6) $u(x,y) = x^2 - y^2, \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0;$

(7) $u(x,y,z) = xy^2z^3, \quad x + y + z = 12,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0;$

(8) $u(x,y,z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3;$

(9) $u(x,y,z) = xy + yz, \quad x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0;$

(10) $u(x,y,z) = xyz, \quad xy + yz + zx = 8,\ x + y + z = 5.$

14.9. Ответы. 14.3. (1) минимум $u(1,2) = -25$, максимум $u(-1,-2) = 31$; (2) минимум $u(0,0) = 0$, максимум $u(-5/3, 0) = 125/27$; (3) максимум $u(1,3) = 9$; (4) максимум $u(0,0) = 0$, четыре минимума $u(\pm 1/2, \pm 1) = -9/8$; (5) максимум $u(-1,-1) = -3$; (6) минимум $u(4,2) = 6$; (7) максимум $u(-4,-2) = 8/e^2$; (8) экстремумов нет; (9) максимум $u(-3,2,-1) = 22$; (10) минимум $u(6,-18,2) = -112$; (11) минимум $u(8,4,2) = 60$; (12) максимум $u(1/10, 0, 7/10) = 5/\sqrt{e}$, мимимум $u(-1/10, 0, -7/10) = -5/\sqrt{e}$. **2. (1)** Максимум $z(2,3) = 5$; **(2)** максимум $z(3,-1) = 13/3$. **3. (1)** Минимум $z_1(-1,1) = -5$, максимум $z_2(-1,1) = 1$; **(2)** минимум $z_1(-1,2) = 1$, максимум $z_2(-1,2) = -2$.

14.8. (1) Минимум $u(18/13, 12/13) = 36/13$; (2) максимум $u(2,1) = 3$; (3) два минимума $u(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2}) = 1/2$ и два максимума $u(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = 3/2$; (4) два минимума $u\big(\pm\frac{3}{5}, \mp\frac{2}{5}\big) = -50$ и два максимума $u\big(\pm\frac{4}{5}, \pm\frac{3}{10}\big) = 425/4$; (5) минимум $u\big(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\big) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; (6) $u\big(\frac{ab^2}{b^2-a^2}, \frac{a^2b}{a^2-b^2}\big) = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$, минимум, если $a^2 > b^2$, максимум, если $a^2 < b^2$, нет экстремума при $a^2 = b^2$; (7) максимум $u(2,4,6) = 6912$; (8) минимумы $u(1,1,-1) = u(1,-1,1) = u(-1,1,1) = u(-1,-1,-1) = -1$, максимумы $u(1,1,1) = u(1,-1,-1) = u(-1,-1,1) = u(-1,1,-1) = 1$; (9) максимум $u(1,1,1) = 2$; (10) минимумы $u(2,2,1) = u(2,1,2) =$

$u(1,2,2) = 4$, максимумы $u(4/3,4/3,7/3) = u(4/3,7/3,4/3) = u(7/3, 4/3,4/3) = 112/27$.

§ 15. Криволинейные координаты. Замена переменных в дифференциальных выражениях

15.1. Математическое описание какого-либо процесса нередко сопровождается выделением набора числовых его характеристик и заданием некоторой числовой величины, характеризующей процесс. Иначе говоря, такое описание приводит к фиксации конечномерного арифметического пространства и заданию (числовой) функции на некоторой его открытой области. Пусть переменные этого пространства обозначены через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а функция — через $f(x)$. Как правило, в описании процесса большую роль играет не только сама функция, но и скорость ее изменения по тем или иным координатным направлениям, т. е. частные производные функции. Не всегда координатные направления в рамках выбранных переменных x обеспечивают сравнительно простые свойства скорости изменения функции, т. е. не всегда приводят к несложным соотношениям (как правило уравнениям) относительно частных производных. И тогда можно попробовать посмотреть, как изменяется функция вдоль других линий.

Для формирования подходящего математического аппарата заметим, что положение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точки x можно описать так. Фиксируем какую-то одну из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а остальные оставим меняющимися. Множество таких точек образует некоторую координатную (гипер)плоскость в $\mathbb{R}^n$. Тогда наша точка x может быть охарактеризована как точка, находящаяся на пересечении всех этих плоскостей.

Предположим, что мы хотим использовать другой набор чисел $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ для описания положения той же самой точки. Естественно, что он должен быть связан с исходным набором $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ некоторой зависимостью. Иначе говоря, предположим, что на открытой области Ω изменения переменной u задано взаимно однозначное отображение Φ такое, что $x = \Phi(u)$. Расположение точки x на пересечении плоскостей $x_k = \mathrm{const}$ можно в терминах u описать как расположение этой точки на пересечении поверхностей $\{x : x = \Phi(u), u_k = \mathrm{const}\}$, т. е. на этот раз на пересечении множеств, не являющихся плоскими (с точки зрения переменных x). Исходя из такой возможности, набор чисел $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ называют *криволинейными координатами*

точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, говоря при этом о самих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как о *исходных* или *канонических координатах.*

Допустим, что рассматриваемый процесс был описан каким-то уравнением, в котором участвовала функция $y = f(x)$, а также ее производные до порядка k, т. е. уравнением $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$, где F — некоторая достаточно гладкая функция, а $y', y'', \ldots, y^{(k)}$ — частные производные функции y по каким-то наборам переменных. Пусть мы вводим новые переменные u, связанные со старыми переменными x зависимостью $x = \Phi(u)$ или зависимостью $u = \Psi(x)$. Естественно ставится задача: используя формулу перехода между переменными, узнать, в какое уравнение относительно новых переменных преобразуется имевшееся уравнение?

Предположим, что выбрана связывающая точки x и u зависимость $x = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, где Ω — открытая область изменения переменной u, или $u = \Psi(x)$, $x \in Q$, где Q — открытая область изменения переменной x. Точки, переходящие друг в друга при заданной зависимости и обратной к ней, будем называть *соответственными.* Пусть задана функция $y = f(x)$. Перенесем эту функцию в область изменения переменной u, полагая, что *значения вновь определяемой функции* $w = g(u)$ *и старой функции* $y = f(x)$ *в соответственных точках совпадают*, т. е. что выполнено равенство

$$f(\Phi(u)) = g(u), \quad u \in \Omega, \tag{15.1}$$

если задана зависимость $x = \Phi(u)$ между координатами x, u, и равенство

$$g(\Psi(x)) = f(x), \quad x \in Q, \tag{15.2}$$

при заданной зависимости $u = \Psi(x)$. Этой договоренностью мы фиксируем некоторое тождество на открытом множестве соответствующего пространства, позволяющее не только пересадить функцию с одних переменных на другие, но при достаточной гладкости и невырожденности участвующих в рассмотрении функций и отображений (что всегда нами будет предполагаться без дополнительных оговорок) выразить производные одной из функций через производные и значения другой из них. Для такого выражения достаточно продифференцировать определяющее замену тождество, из получаемых при этом равенств выразить производные старой функции и подставить их выражения в соотношение (как правило, это уравнение), характеризующее старую функцию.

Подчеркнем, что в примерах при $n = 2$ или $n = 3$ вместо обозначения x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 для координат точки мы будем использовать

привычные буквы x, y или соответственно x, y, z. Для криволинейных координат чаще всего будем использовать буквы u, v, w или иногда греческие ξ, η, ζ

Напомним, что в $\mathbb{R}^2$ одни из самых распространенных криволинейных координат — это *полярные координаты* r, φ, связь которых с каноническими координатами x, y осуществляется по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ часто используют *сферические* координаты r, φ, ψ, связанные с x, y, z формулами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$
$$r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \psi \in (-\pi/2, \pi/2),$$

или сферические координаты r, φ, θ такие, что

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
$$r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in (0, \pi).$$

15.2. Пример. Преобразуем уравнение $x^2y'' + xy' + y = 0$, вводя новую переменную t, связанную с переменной x равенством $x = e^t$. Обозначим новую функцию, получаемую переносом функции $y(x)$ в область переменной t, через w и запишем равенство, выражающее совпадение старой и новой функций в соответственных точках. Согласно нашей договоренности должно быть $y(x) = w(t)$ для таких x и t, что $x = e^t$. Подставляя в выписанное выше равенство на место x его выражение через t, мы приходим к тождеству, полностью определяющему новую функцию:

$$y(e^t) = w(t) \tag{15.3}$$

Продифференцируем его по t:

$$y'(e^t)e^t = w'(t). \tag{15.4}$$

Мы указали точки, в которых взяты производные, для того, чтобы на следующем шаге при дифференцировании учесть все зависимости от t. Поскольку третьей производной брать в этом примере не требуется, в записи второй производной указание аргументов всюду опустим (для краткости). Дифференцируя равенство (15.4), имеем

$$y''e^{2t} + y'e^t = w''. \tag{15.5}$$

Выразим из равенств (15.4), (15.5) y', y'':

$$y' = w'e^{-t}, \quad y'' = (w'' - y'e^t)e^{-2t} = (w'' - w')e^{-2t}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, приходим к соответствующему ему уравнению относительно новой переменной и новой функции:

$$e^{2t}(w'' - w')e^{-2t} + e^t w' e^{-t} + w = 0,$$

или $w'' + w = 0$.

15.3. Пример. Преобразуем уравнение $yz'_x - xz'_y = 0$, вводя новые переменные ξ, η, связанные с переменными x, y равенствами $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$.

Запишем определяющее новую функцию $w = w(\xi, \eta)$ равенство, отразив в нем тот факт, что в точках $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$ значения новой и старой функций совпадают:

$$w(x, x^2 + y^2) = z(x, y).$$

Продифференцируем его по x и по y. Так как нам не требуется дифференцировать второй раз (в уравнении нет вторых производных), мы не будем записывать указание точек, в которых берутся соответствующие производные. Имеем

$$w'_\xi + w'_\eta \cdot 2x = z'_x, \quad w'_\eta \cdot 2y = z'_y.$$

Полученные для z'_x, z'_y выражения подставим в исходное уравнение, пока не занимаясь выражением старых переменных через новые и оставляя тем самым старые переменные в получаемом равенстве: $y \cdot w'_\xi + 2xyw'_\eta - 2xyw'_\eta = 0$, откуда приходим к уравнению $y \cdot w'_\xi = 0$. Ясно, что в области переменных ξ, η, соответствующей неравенству $y \neq 0$, т. е. в области, где $\eta \neq \xi^2$, уравнение становится таким: $w'_\xi = 0$. Этому уравнению будет удовлетворят произвольная гладкая функция $\varphi(\eta)$, зависящая только от η, так что решением этого уравнения будет функция $w(\xi, \eta) = \varphi(\eta)$. Возвращаясь к исходному уравнению, можно утверждать, что в области, где $y \neq 0$, его решением будет функция $z(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, где φ — произвольная гладкая функция.

15.4. Пример. Преобразуем уравнение $xz'_x + \sqrt{1 + y^2}z'_y = xy$, переходя к новым переменным $u = \ln x$, $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Новая функция $w(u, v)$ будет связана со старой $z(x, y)$ выполнением равенства в соответствующих точках:

$$w(\ln x, \ln(y + \sqrt{1 + y^2})) = z(x, y). \tag{15.6}$$

Продифференцируем равенство (15.6) по x и по y:

$$w'_u \cdot \frac{1}{x} = z'_x, \quad w'_v \cdot \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = z_y,$$

откуда, упрощая, имеем

$$z'_x = \frac{w_u}{x}, \quad z'_y = \frac{w_v}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Выражая x, y через u, v, т. е. $x = e^u$, $y = \operatorname{sh} v$, и подставляя все в исходное уравнение, приходим к уравнению $w'_u + w'_v = e^u \operatorname{sh} v$.

15.5. Задачи. 1. Перейти к новым переменным в следующих уравнениях:

(1) $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, $t = \ln|x|$;

(2) $(1-x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$, $x = \cos t$.

2. Вводя новые переменные ξ, η, решить уравнения:

(1) $z'_x = z'_y$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$;

(2) $xz'_x + yz'_y = z$, $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$.

3. Приняв u, v за новые переменные, преобразовать уравнения:

(1) $(x+y)z'_x - (x-y)z'_y = 0$, $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

(2) $(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 0$, $x = uv$, $y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$;

(3) $ax^2 z''_{xx} + 2bxyz''_{xy} + cy^2 z''_{yy} = 0$, $u = \ln x$, $v = \ln y$;

(4) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

(5) $z''_{xx} + z''_{yy} + z = 0$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$;

(6) $xz''_{xx} - yz''_{yy} = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$, $x = (u+v)^2$, $y = (u-v)^2$;

(7) $x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = 0$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$;

(8) $x^2 z''_{xx} - (x^2+y^2)z''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

4. С помощью линейной замены $\xi = x + \lambda y$, $\eta = x + \mu y$ преобразовать уравнение $Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} = 0$, где A, B, C — постоянные и $AC - B^2 < 0$, к виду $u''_{\xi\eta} = 0$.

5. Доказать, что вид уравнения Лапласа $\Delta z = z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ не меняется при любой невырожденной замене переменных $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, удовлетворяющей условиям $\varphi'_u = \psi'_v$, $\varphi'_v = -\psi'_u$.

15.6. Выше мы рассмотрели такую замену переменных, при которой происходит замена независимых переменных, а значения функции в соответственных точках сохраняются. Теперь рассмотрим ситуацию, в которой может меняться всё — как независимые переменные, так и значения функции. Наша ближайшая задача — получить равенство, определяющее связь между старой и новой функциями и тем самым задающее новую функцию. Для этого обратимся к такой замене с точки зрения преобразования графиков функций. Как известно, график отображения $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, где X, Y — какие-то множества, это множество таких упорядоченных пар $(x, y) \in X \times Y$, для которых $y = f(x)$. Пусть задана функция $f(x)$ на некотором открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащем график функции f, задано достаточно гладкое невырожденное отображение Φ, взаимно однозначно отображающее это множество на множество $Q \in \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через Ψ обратное к Φ отображение. Точки, переходящие друг в друга при этих отображениях, будем называть *соответственными*. Ввиду гладкости и невырожденности Φ образ $\Phi[\mathrm{gr}(f)]$ графика $\mathrm{gr}(f)$ функции f будет (по крайней мере локально) графиком некоторой функции, действующей из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Исходя из этого, определим новую функцию w, считая, что *график функции f взаимно однозначно отображается на график функции w*. Не уменьшая общности, будем считать, что новая функция w действует из первых n переменных в последнюю.

Займемся составлением равенства, отражающего указанную выше договоренность и позволяющего выразить производные старой функции через производные новой. Обозначим точки старого $(n+1)$-мерного пространства через $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, а нового — $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$, Обозначим через $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n+1}$ координатные функции отображения Φ, а через $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n+1}$ — отображения Ψ. Допустим, что задано отображение Φ, действующее из старых переменных в новые. Пусть $(x, f(x))$ — точка графика f. Ее образом является точка

$$(\Phi_1(x, f(x)), \ldots, \Phi_n(x, f(x)), \Phi_{n+1}(x, f(x))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата $\Phi_{n+1}(x, f(x))$ должна быть значением функции w на первых n координатах*, т. е.

$$\Phi_{n+1}(x, f(x)) = w(\Phi_1(x, f(x)), \ldots, \Phi_n(x, f(x)) \tag{15.7}$$

Если же задано отображение Ψ, действующее из новых переменных в старые и $(u, w(u))$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, — точка графика новой функции,

то образом ее при отображении Ψ будет точка

$$(\Psi_1(u, w(u)), \dots, \Psi_n(u, w(u)), \Psi_{n+1}(u, w(u))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата* $\Psi_{n+1}(u, w(u))$ *должна быть значением функции* f *на первых* n *координатах*, т. е.

$$\Psi_{n+1}(u, w(u)) = f(\Psi_1(u, w(u)), \dots, \Psi_n(u, w(u))) \tag{15.8}$$

Требуемые производные f'_{x_k}, $k = 1, \dots, n$, и т. д. могут быть найдены из равенств, получаемых в результате дифференцирования определяющего новую функцию равенства.

15.7. Пример. Преобразуем уравнение $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, если $x = u + t$, $y = u - t$ и $u = u(t)$. Здесь задано отображение $(t, u) \mapsto (x, y)$, действующее из новых переменных в старые, так что новая функция $u = u(t)$ будет характеризоваться следующим обстоятельством: если взять точку $(t, u(t))$ графика новой функции, то ее образ, т. е. точка $(u(t) + t, u(t) - t)$, будет точкой графика функции $y = y(x)$, а это значит, что последняя координата $u(t) - t$ равна значению функции y на первой координате $u(t) + t$:

$$u(t) - t = y(u(t) + t). \tag{15.9}$$

Дифференцируя равенство (15.9) дважды, получаем

$$u'(t) - 1 = y'(u(t) + t) \cdot (u'(t) + 1), \quad u'' = y''(u' + 1)^2 + y'u''.$$

Из этих равенств имеем

$$y' = \frac{u' - 1}{u' + 1}, \quad y'' = \frac{u''(1 - y')}{(u' + 1)^2} = u'' \frac{2}{(u' + 1)^3}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, приходим к уравнению $u'' + 8u(u')^3 = 0$.

15.8. Пример. Решим уравнение $az'_x + bz'_y = 1$, вводя новые переменные ξ, η, связанные со старыми равенствами $\xi = x$, $\eta = y - bz$.

Заметим, что замена определена только двумя равенствами, хотя в них участвуют не только переменные x, y, но и третья переменная z. В таких формулировках будем дополнять данное преобразование до отображения из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, считая, что *последняя координата остается неизменной*, т. е. происходит отображение $(x, y, z) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x$, $\eta = y - bz$, $\zeta = z$.

Обозначим новую функцию через w и выпишем равенство, ее определяющее. Точка графика $(x, y, z(x, y))$ функции z перейдет при нашем преобразовании в точку $(x, y-bz(x, y), z(x, y))$, и согласно договоренности эта точка должна быть точкой графика функции w, что означает выполнение равенства

$$z(x, y) = w(x, y - bz(x, y)). \tag{15.10}$$

Дифференцируя его по x и по y, находим

$$z'_x = w'_\xi + w'_\eta \cdot (-bz'_x), \quad z'_y = w'_\eta \cdot (1 - bz'_y),$$

откуда

$$z'_x = \frac{w'_\xi}{1 + bw'_\eta}, \quad z'_y = \frac{w'_\eta}{1 + bw'_\eta}.$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{aw'_\xi}{1 + bw'_\eta} + \frac{bw'_\eta}{1 + bw'_\eta} = 1,$$

или $aw'_\xi = 1$. Этому уравнению удовлетворяет функция $w = \dfrac{\xi}{a} + \varphi(\eta)$, где φ — произвольная гладкая функция. Вернувшись к переменным x, y, получим

$$z(x, y) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz(x, y)).$$

15.9. Пример. Преобразуем уравнение $(x - z)z'_x + yz'_y = 0$, взяв x за функцию, а y, z — за независимые переменные. Такая формулировка означает, что надо перейти в уравнении к новым переменным u, v и функции $w(u, v)$, связанным со старыми соотношением $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, где $u = y$, $v = z$, $w = x$, т. е. тот факт, что x следует считать функцией, означает требование расположить x на последнем месте, оставив на первых двух переменные y и z. Запишем соотношение для преобразования точек графика: $(x, y, z(x, y)) \mapsto (y, z(x, y), x)$. Тем самым определяющее функцию w равенство таково:

$$x = w(y, z(x, y)) \tag{15.11}$$

Продифференцируем его по x и по y:

$$1 = w'_v \cdot z'_x, \quad 0 = w'_u + w'_v \cdot z'_y,$$

откуда

$$z'_x = \frac{1}{w'_v}, \quad z'_y = -\frac{w'_u}{w'_v}.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\frac{w-v}{w'_v} - \frac{uw'_u}{w'_v} = 0,$$

или $uw'_u = v - w$. Это уравнение, записанное в переменных x, y, z, имеет вид $y \cdot x'_y = z - x$.

15.10. Пример. Преобразуем уравнение $yz''_{yy} + 2z'_y = \dfrac{2}{x}$, принимая u, v за новые переменные, а $w(u, v)$ — за новую функцию, где переменные (x, y, z) и (u, v, w) связаны соотношениями $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$. Точка графика $(x, y, z(x, y))$ функции z перейдет в точку $\left(\dfrac{x}{y}, x, xz(x, y) - y\right)$, так что определяющее функцию w равенство таково:

$$xz(x, y) - y = w\left(\frac{x}{y}, x\right). \tag{15.12}$$

Продифференцируем тождество (15.12) по y:

$$xz'_y(x, y) - 1 = w'_u\left(\frac{x}{y}, x\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

и полученное равенство еще раз по y:

$$xz''_{yy} = w''_{uu}\frac{x^2}{y^4} + w'_u\frac{2x}{y^3}.$$

Отсюда

$$z'_y = \frac{1}{x} - \frac{w'_u}{y^2}, \quad z''_{yy} = \frac{x}{y^4}w''_{uu} + \frac{2}{y^3}w'_u.$$

Подставляя в исходное уравнение, учитывая, что $x = v$, $y = \dfrac{v}{u}$, и проводя преобразования, приходим к уравнению $w''_{uu} = 0$.

15.11. Задачи. 1. Преобразовать уравнения, вводя новые переменные:

(1) $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, $x = e^t$, $y = ue^{2t}$, $u = u(t)$;

(2) $(1 + x^2)^2y'' = y$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \dfrac{u}{\cos t}$, $u = u(t)$.

2. Преобразовать к полярным координатам r, φ уравнение

$$(xy' - y)^2 = 2xy(1 + (y')^2),$$

считая $r = r(\varphi)$.

3. Преобразовать уравнения

(1) $xz'_x + yz'_y = \dfrac{x}{z}$, $u = 2x - z^2$, $v = \dfrac{y}{z}$;

(2) $(x+z)z'_x + (y+z)z'_y = x + y + z$, $u = x + z$, $v = y + z$;

(3) $yz'_x - xz'_y = (y-x)z$, $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = \ln z - (x+y)$;

(4) $(xy+z)z'_x + (1-y^2)z'_y = x + yz$, $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$;

(5) $z''_{xy} = (1 + z'_y)^3$, $u = x$, $v = y + z$;

(6) $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x}$, $w = \dfrac{z}{x}$;

(7) $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$;

(8) $z''_{xx} + z''_{xy} + z'_x = z$, $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$, $w = ze^y$.

4. Преобразовать уравнение $(y-z)z'_x + (y+z)z'_y = 0$, приняв x за функцию, а $u = y - z$, $v = y + z$ за независимые переменные.

5. Показать, что уравнение $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$ не меняет своего вида при замене переменных $u = x + z$, $v = y + z$.

6. В уравнении

$$x^2 u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + z^2 u''_{zz} = (xu'_x)^2 + (yu'_y)^2 + (zu'_z)^2$$

положить $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, $z = e^\zeta$, $u = e^w$, где $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

7. Показать, что вид уравнения $z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ не меняется при любом распределении ролей между переменными x, y, z.

15.12. Ответы. 15.5. 1. (1) $y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t - 6y = 0$; (2) $y''_{t^2} + n^2 y = 0$. **2.** (1) $z = \varphi(x+y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция; (2) $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **3.** (1) $z'_u = z'_v$; (2) $(z'_u)^2 + (z'_v)^2 = 0$; (3) $a\left(z''_{u^2} - z'_u\right) + 2bz''_{uv} + b\left(z''_{v^2} - z'_v\right) = 0$; (4) $z''_{u^2} + z''_{v^2} = 0$; (5) $z''_{u^2} + z''_{v^2} + e^{2u} z = 0$; (6) $z''_{uv} + \frac{1}{u^2 - v^2}(vz'_u - uz'_v) = 0$; (7) $z''_{uv} = \frac{1}{2u} z'_v$; (8) $z''_{uv} = \frac{2}{u(4-uv)} z'_v$.

15.11. 1. (1) $u''_{t^2} + (u+3)u'_t + 2u = 0$; (2) $u''_{t^2} = 0$. **2.** $(r')^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2$. **3.** (1) $z'_v = \frac{z}{v} \frac{z^2 + u}{z^2 - u}$; (2) $(2u + v - z)z'_u + (u + 2v - z)z'_v = u + v - z$; (3) $w'_v = 0$; (4) $w_v = 0$; (5) $(1 - z'_v)z''_{uv} + z'_v z''_{v^2} = 1$; (6) $w''_{v^2} = 0$; (7) $w''_{u^2} = \frac{1}{2}$; (8) $w''_{u^2} + w''_{uv} = 2w$. **4.** $x'_u + x'_v = \frac{u}{v}$; **6.** $w''_{\xi^2} + w''_{\eta^2} + w''_{\zeta^2} = w'_\xi + w'_\eta + w'_\zeta + (e^w - 1)((w'_\xi)^2 + w'_\eta)^2 + w'\zeta)^2)$.