1. Построение графиков на основе исследования простейших свойств функции

Начнем освоение курса математического анализа с повторения построения графиков функций. Сначала напомним определения основных связанных с функциями терминов, затем, повторив графики элементарных функций, на их основе построим графики функций, получающихся из графика данной функции путем простейших преобразований, и в завершение ознакомимся с тем, как можно представить график функции, пользуясь элементарными средствами.

1.1. Понятие функции. В математике значительную роль играют зависимости между величинами или объектами, отражающие зависимости между явлениями или объектами окружающего нас мира. Зависимости, рассматриваемые в математике, могут быть описаны разными способами, более того, одна и та же зависимость может быть описана разными средствами. Величины, находящиеся во взаимозависимости, могут выступать как равноправные, а может быть и так, что одна из величин считается выбираемой произвольно, а другая находится согласно определенному правилу в зависимости от выбора первой.

Среди всех зависимостей выделяют зависимости, обладающие свойством однозначности, и для них вводят отдельный термин — отображение.

Определение 3.1. Пусть даны множества X и Y (произвольной природы). *Отображением*, определенным (заданным) на множестве X и действующим в множество Y, называют правило, согласно которому каждому элементу x множества X сопоставляется какой-то один, вполне определенный, элемент y множества Y.

Таким образом, термин «отображение» резервируется за однозначными зависимостями. Для ситуаций, когда это требование отсутствует, а зависимость между $x \in X$ и $y \in Y$ все же есть, зарезервирован другой термин, но такие зависимости нами рассматриваться не будут.

Тот факт, что каждому $x \in X$ сопоставляется один элемент из Y, вовсе не означает, что всем элементам из X сопоставляется один и тот же элемент. Это означает, что одному x не может быть сопоставлено более одного y. При этом разным элементам может сопоставляться один и тот же элемент, а могут и разные.

Если множества X, Y числовые, т. е. состоят из вещественных чисел, то в таком случае отображение множества X в множество Y называют *функцией.*

Далее мы будем чаще всего обращаться именно к функциям, т. е. считать X, Y содержащимися в $\mathbb{R}$, поэтому при развитии терминологии будем говорить о функциях, хотя термины, определения которых не используют особенностей числового множества типа арифметических операций, сравнения и т. п., годны и для отображений. Мы будем также называть функциями отображения, действие которых распространяется на несколько числовых величин (так называемые функции нескольких переменных).

Договоримся о терминах и обозначениях. Правило, задающее функцию, часто обозначают буквами $f, g, h, \varphi, \ldots$. Если f — функция, то множество X, на элементы которого распространяется действие правила (функции) f, называют *областью определения функции* f и обозначают через $D(f)$. Число, получаемое в результате действия функции f на элемент $x \in X$, называют *значением функции* f *на элементе* x и обозначают символом $f(x)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, где x берутся из области определения $D(f)$, называют *множеством значений функции* f и обозначают через $E(f)$. Тот факт, что y — значение функции f на элементе x, выражают равенством $y = f(x)$. Это же обстоятельство иногда удобно записывать с использованием стрелки с хвостиком, а именно в виде $f : x \mapsto f(x)$, символизирующем тот факт, что элемент x правилом f переводится в $f(x)$.

Функция может быть задана описанием, задающим правило сопоставления, либо формулой, либо перечислением всех ее значений. Можно говорить и о графическом задании функции, если оно позволяет определенно установить правило сопоставления, характеризующее функцию. Вместе с указанием правила сопоставления желательно указывать и два других атрибута, сопровождающие функцию, а именно ее область определения и множество значений. Если область определения при задании функции не указана, то считается, что функция рассматривается на ее естественной области определения, т. е. на множестве всех тех чисел, для которых выполнимы предусмотренные формулой действия. Множество значений обычно не указывается по той причине, что оно однозначно характеризуется заданием самой функции и области ее определения.

1.2. Координатная плоскость. График функции. Многие свойства функций легче воспринимать, обращаясь к их графикам. Прежде чем определить понятие графика, поговорим об обстановке, в которой это происходит.

Определение. Пусть X, Y — какие-то множества. Будем говорить, что элементы $x \in X$, $y \in Y$ *образуют упорядоченную пару* (x, y), если элемент x считается первым, а y — вторым. Далее вместо слов «упорядоченная пара» будем нередко писать просто «пара», если это не приведет к недоразумению.

Для пары (x, y) важен не только состав ее элементов, но и порядок их расположения, так что пары (x, y) и (y, x) при неравных x, y различны. Кроме того, пары (x, y) и (u, v) равны в том и только в том случае, если $x = u$, $y = v$.

Для множества упорядоченных пар вещественных чисел, обозначаемого символом $\mathbb{R}^2$, обычно используют следующую геометрическую интерпретацию. На плоскости изображают две взаимно перпендикулярные числовые прямые (числовые оси) так, что точка их пересечения соответствует числу нуль на каждой из прямых. Одну из этих прямых называют *осью абсцисс*, а другую — *осью ординат*, если выполнены следующие условия: результат поворота положительной части оси абсцисс вокруг точки пересечения прямых на угол $\pi/2$ против часовой стрелки совпадет с положительной частью оси ординат (рис. 1).

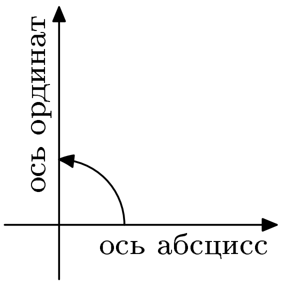


Рис. 1.

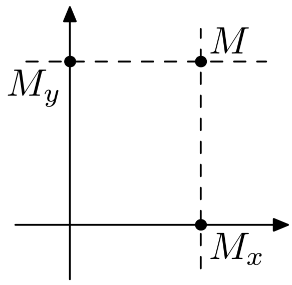


Рис. 2.

Каждой паре (x, y) вещественных чисел x, y поставим в соответствие точку координатной плоскости по следующему правилу. Отметим на оси абсцисс точку M_x, соответствующую числу x, на оси ординат — точку M_y, соответствующую числу y. Через точку M_x проведем прямую, перпендикулярную оси абсцисс (тем самым параллельную оси ординат), а через точку M_y — прямую, перпендикулярную оси ординат (т. е. параллельную оси абсцисс). Паре (x, y) сопоставляется точка M пересечения этих прямых (рис. 2).

В построенной конструкции точки M_x, M_y или соответствующие им числа x, y называют *первой* и *второй координатами точки* M и обычно для точки M используют обозначение (x, y), отведенное ранее для упорядоченной пары. Также говорят, что x — это *абсцисса* точки M (или точки (x, y)), а y — ее *ордината.* Саму плоскость с выделенными взаимно перпендикулярными прямыми называют *прямоугольной* (или *декартовой*) *системой координат*, а точку пересечения осей абсцисс и ординат — *началом координат.*

Имея в виду указанную геометрическую модель множества упорядоченных пар вещественных чисел, будем воспринимать упорядоченные пары как точки координатной плоскости, т. е. отождествлять пары чисел и точки координатной плоскости. Такое отождествление, как правило, не приводит к недоразумению.

Определение. *Графиком функции* f называют множество точек (x, y) координатной плоскости таких, что $x \in D(f)$, а $y = f(x)$.

Иначе можно сказать, что график функции f — это множество упорядоченных пар чисел $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Для изображения графика функции f поступают следующим образом. Изображают прямоугольную систему координат и около стрелки, показывающей положительное направление оси абсцисс (ординат) ставят букву, которой обозначается аргумент (соответственно значения) функции (на рис. 3 это буквы x и y). Затем, следуя определению графика, отмечают на плоскости множество точек (x, y) таких, что $x \in D(f)$, а $y = f(x)$, т. е. множество точек вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$ (см. рис. 3). Надо иметь в виду, что, например, две буквы x, стоящие на рис. 3 чуть ниже оси абсцисс, несут разную смысловую нагрузку (т. е. их следует воспринимать как разные объекты): одна (около стрелки) указывает обозначение оси, где отмечаются значения аргумента функции, а другая — символ собственно аргумента.

Область определения $D(f)$ располагается на (горизонтальной) оси абсцисс, множество значений $E(f)$ — на (вертикальной) оси ординат (рис. 4).

Вместе с графиком бывают полезны *подграфик* и *надграфик* функции f, а именно множества точек (x, y) координатной плоскости та-

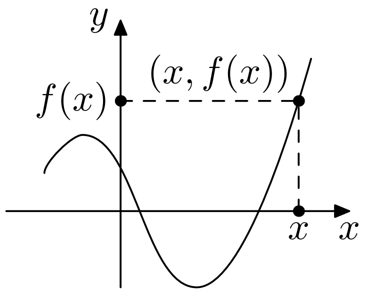


Рис. 3.

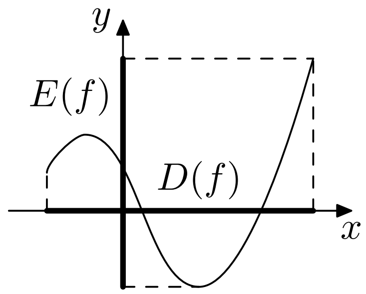


Рис. 4.

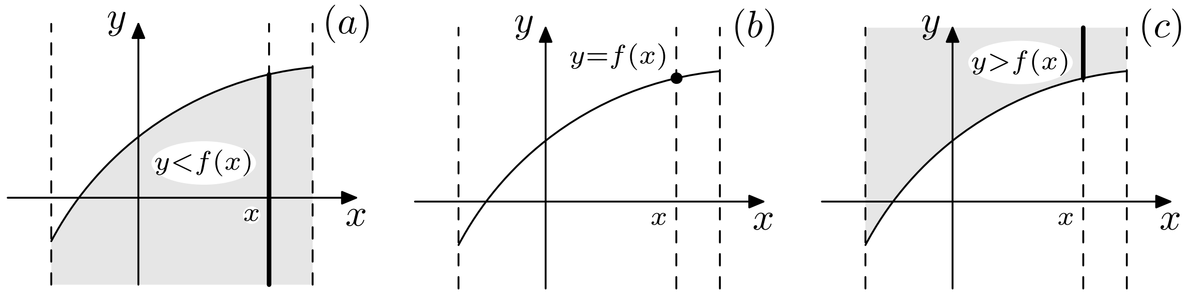


Рис. 5.

ких, что $x \in D(f)$, а $y < f(x)$ и соответственно $y > f(x)$. Подграфик, график и надграфик функции f можно представить себе так. Фиксируем $x \in D(f)$ и при этом x двигаемся по прямой снизу вверх, изменяя y. Сначала y расположен настолько низко, что $y < f(x)$, и мы находимся в подграфике (рис. 5(a)). Поднимаясь вверх, мы придем в такую точку (x, y), где будет $y = f(x)$, и окажемся в точке графика (рис. 5(b)). Поднимаясь далее вверх, мы оказываемся в таких точках (x, y), где $y > f(x)$, т. е. в надграфике функции f (рис. 5(c)). Проделывая эту процедуру при всех x из области определения f, получаем подграфик, график и надграфик функции f.

1.3. Способы образования новых функций. Укажем способы получения новых функций из уже имеющихся. Часть таких способов связана с арифметическими операциями в множестве вещественных чисел.

Определение. Пусть на множестве X заданы функции f, g. *Суммой, произведением, частным функций f и g* и *произведением функции f на число* называют функции, заданные соответственно правилами

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{1}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \tag{2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \tag{3}$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

О соотношениях (1)–(4) говорят, что они понимаются *поточечно.*

Кроме того, функции можно сравнивать, а именно для заданных на множестве X функций f и g считают, что f *меньше чем* g, если $f(x) < g(x)$ для любого $x \in X$. Аналогично подходят к терминам *меньше или равна*, *больше*, *больше или равна.*

Еще один способ получения новых функций основан на последовательном действии нескольких функций. Опишем его для двух функций, для большего числа функций процедура аналогична.

Определение. Пусть функция f определена на множестве X и действует в множество Y, а функция g определена на множестве Y или на каком-то его подмножестве и действует в некоторое множество Z. Тогда, взяв такой элемент $x \in X$, что $f(x)$ попадает в область определения функции g, можно подействовать на $f(x)$ функцией g. Получается новое правило h, действующее на те элементы из X, для которых $f(x) \in D(g)$, следующим образом:

$$h(x) = g(f(x)). \tag{5}$$

Отображение h называют *сложной функцией, составленной из* f *и* g, или *композицией функций* f *и* g, или *суперпозицией функций* f *и* g. Композицию функций f и g обозначают так: $g \circ f$, тем самым

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Из определения композиции h функций f и g ясно, что $D(h) = \{x \in X : f(x) \in D(g)\}$.

Наконец, отметим еще один способ образования новых функций. Он основан на восстановлении «истории» значений данной функции и отражает определенную равноправность переменных. Однако этот способ требует от функции дополнительного свойства, которое сейчас опишем.

В определении функции особо было оговорено свойство ее однозначности, т. е. невозможности сопоставления одному элементу сразу двух или более элементов. Вместе с тем разным элементам из области определения функции вполне может быть сопоставлен один и тот же элемент множества ее значений. Например, функция $y = x^2$ любые два противоположных значения аргумента переводит в одно значение, функция $y = \sin x$ бесконечно много элементов переводит в один, и т. д. Ясно, что если в таком случае задаться целью определить, из какого значения аргумента было получено то или иное значение функции, то однозначно это сделать невозможно. Поскольку указанное восстановление «истории» значений функции бывает необходимо, обратимся к свойству функции, которое обеспечивало бы однозначность при таком восстановлении.

Определение. Функцию $v = f(u)$ называют *обратимой* или *взаимно однозначной на множестве* $X \subset D(f)$, если для любых $u_1, u_2 \in X$ таких, что $u_1 \neq u_2$, будет $f(u_1) \neq f(u_2)$, иначе говоря, если для любых двух различных элементов множества X соответствующие им значения функции различны.

Тем самым каждое значение $v = f(u)$ обратимой функции f получается в точности из одного значения $u \in X$ и можно вести речь об однозначном восстановлении «истории» значения $v = f(u)$, т. е. об элементе $u \in X$, из которого значение v получено.

Определение. Пусть $v = f(u)$ — обратимая на множестве X функция, и пусть Y — множество всех элементов $v = f(u)$, где $u \in X$. Каждому элементу $v \in Y$ сопоставим элемент $u \in X$ такой, что $v = f(u)$. Указанное однозначное правило определяет функцию, которую называют *функцией, обратной к функции* f, и обозначают символом f^{-1}.

Заметим, что если на элемент $u \in X$ сначала подействовать функцией f, а затем на элемент $v = f(u)$ подействовать функцией f^{-1}, то мы получим исходный элемент u, иначе говоря,

$$f^{-1}(f(u)) = u \quad \text{для любого } u \in X. \tag{6}$$

Аналогичное равенство можно записать и для элементов $v \in Y$:

$$f(f^{-1}(v)) = v \quad \text{для любого } v \in Y. \tag{7}$$

Из определения функции, обратной к данной, можно усмотреть, что равенство $v = f(u)$ равносильно тому, что $u = f^{-1}(v)$, тем самым можно говорить не только о функции, обратной к данной, а о паре взаимно обратных друг другу функций f и f^{-1}. Записи $v = f(u)$ и $u = f^{-1}(v)$ означают, по существу, одно и то же, а именно что элементы u и v находятся в определенной зависимости, которая в разных контекстах может принимать разные обозначения: $v = f(u)$ или $u = f^{-1}(v)$, смотря по тому, какую из переменных u и v считают аргументом функции. Кстати, равенства (6), (7) в полной мере характеризуют обратные друг другу функции f и f^{-1}.

Полезно знать, как связаны между собой графики данной функции и обратной к ней (если, разумеется, таковая есть). Как отмечено выше, исходная функция и ей обратная — это два разных способа записи одной и той же зависимости между переменными u и v, поэтому в рамках множества упорядоченных пар прямая и обратная функции отличаются только тем, какая из переменных стоит на первом месте, а какая — на втором. Тем самым пара (v, u) лежит на графике обратной функции в том и только в том случае, если пара (u, v) находится на графике исходной функции. Мы договорились изображать горизонтально прямую, отведенную для первой координаты, и вертикально — для второй, стало быть, для получения точки (v, u) графика обратной функции нам надо взять точку (u, v) графика исходной и отразить ее симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. относительно множества точек вида (u, u), $u \in \mathbb{R}$ (рис. 6(a)). Поскольку так получается любая точка графика обратной функции, весь график обратной функции получается отражением графика исходной относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Пример получения графика обратной функции из графика исходной функции показан на рис. 6(a), (b).

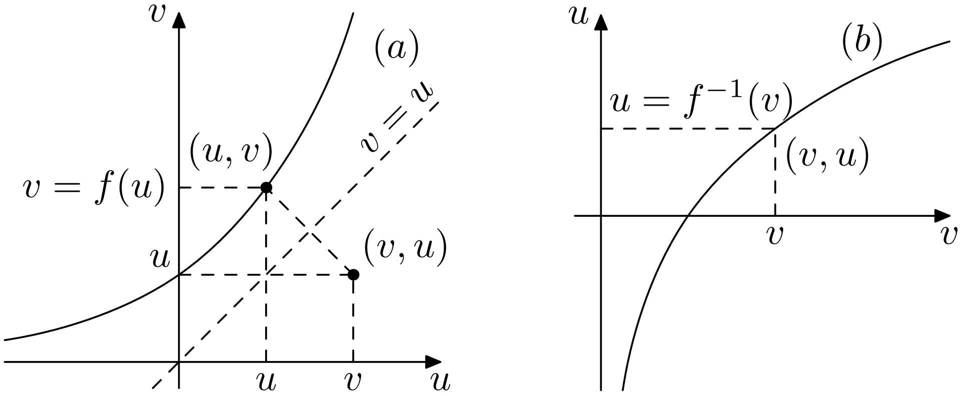


Рис. 6.

Кстати, операцию отражения относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов можно применить к графику любой функции (даже к любому множеству на плоскости), однако если исходная функция не была обратимой, то получится некое множество точек плоскости, которое не окажется графиком какой-либо функции (будет отсутствовать однозначность). Пример такой ситуации дан на рис. 7(a), (b).

Более того, можно изображать и «график» какой-либо, необязательно однозначной зависимости между x и y, считая x независимой величи-

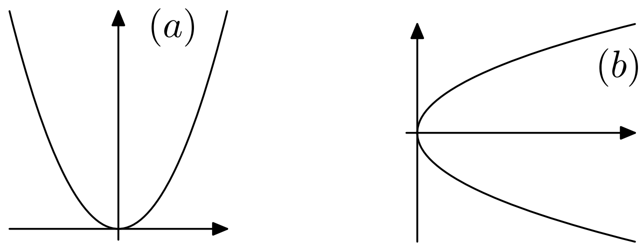


Рис. 7.

ной, но к этому средству обращаются при изображении множеств на координатной плоскости, элементы которых обладают определенным свойством.

1.4. Свойства функций.

Четность и нечетность.

Определение. Функцию f называют *четной* (*нечетной*), если **для любого** элемента x из $D(f)$ противоположный ему элемент $-x$ также входит в $D(f)$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$).

Отсутствие свойства четности у функции f означает, что найдется такое значение $x \in D(f)$, для которого либо $-x \notin D(f)$, либо $f(-x) \neq f(x)$) (подробнее об отрицании высказывания речь пойдет ниже, в разд. 2). Тем самым для проверки отсутствия четности достаточно либо установить несимметричность области определения f относительно нуля, либо предъявить такое $x \in D(f)$, при котором значения $f(-x)$ и $f(x)$ различны.

Так же анализируется отсутствие свойства нечетности функции.

Если f не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, то ее называют *функцией общего вида.*

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат, т. е. относительно точки $(0, 0)$.

Если f, g — нечетные (четные) функции, то их сумма также нечетна (соответственно четна).

Возрастание и убывание.

Определение. Функцию f называют *возрастающей* (*неубывающей*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если **для любых** $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_2 > x_1$, имеет место неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) \geqslant f(x_1)$).

Функцию f называют *убывающей* (*невозрастающей*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если **для любых** $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_2 > x_1$, имеет место неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) \leqslant f(x_1)$).

Если функция f либо возрастающая, либо убывающая на множестве X, то ее называют (*строго*) *монотонной* на X. Термин «монотонная» используют и в тех случаях, когда функция неубывающая или невозрастающая.

Несколько слов о терминологии. Иногда сформулированные здесь свойства возрастания или убывания называют строгим возрастанием или убыванием, а термин «возрастающая» («убывающая») функция относят к таким функциям, которые здесь названы неубывающими (невозрастающими). Поэтому если в задаче существенно, знак какого неравенства, строгого или нестрогого, имеется в виду при сравнении значений $f(x_1)$ и $f(x_2)$, то лучше уточнить в том источнике, откуда взята задача, что авторы понимают под той или иной разновидностью монотонности.

Примеры возрастающей, неубывающей, убывающей и невозрастающей функций приведены на рис. 8(a)–(d).

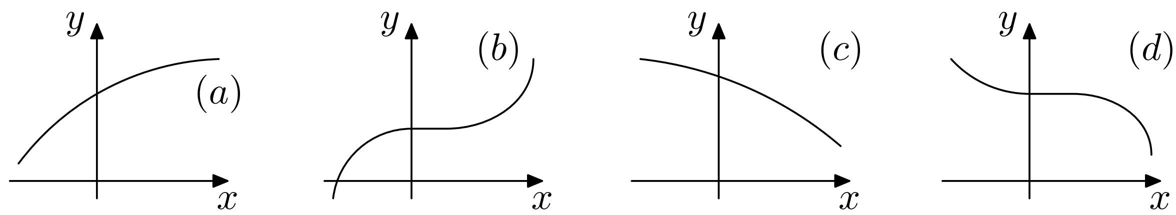


Рис. 8.

Строгая монотонность функции служит достаточным условием ее обратимости. Более того, для обратной функции сохраняется вид монотонности исходной: *если f возрастающая, то f^{-1} тоже возрастающая, а если f убывающая, то f^{-1} тоже убывающая.*

Периодичность.

Определение. Функцию f называют *периодической*, если **существует** такое число $T \neq 0$, называемое ее *периодом*, что **для любого** элемента x из $D(f)$ элементы $x + T$, $x - T$ также входят в $D(f)$ и имеют место равенства $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

Образно периодическую функцию можно представить как функцию, каждое значение которой повторяется через величину, равную периоду.

Примеры графиков периодических функций даны на рис. 9(a), (b) (имеется в виду, что графики продолжаются неограниченно влево и вправо).

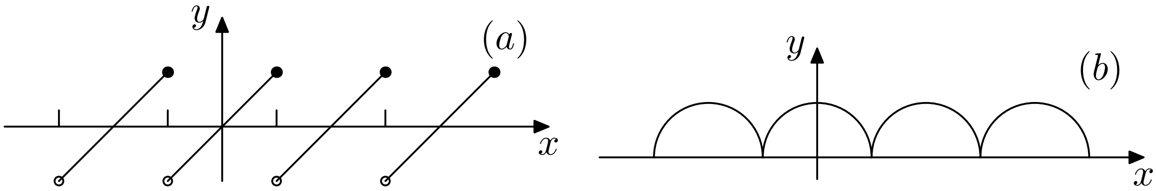


Рис. 9.

Если f задана на каком-то промежутке $[a, b]$ и говорится, что она распространяется по периодичности на всё $\mathbb{R}$, или что задана периодическая функция, у которой изображен график на промежутке длиной периода, то имеется в виду следующее. Строится периодическая функция g с периодом $T = b - a$ (период равен длине отрезка $[a, b]$) следующим образом. Если $x \in [a, b]$, то $g(x) = f(x)$. Если же $x \notin [a, b]$, то добавляем к x (или вычитаем из x) столько периодов, чтобы получаемая точка лежала в $[a, b]$, т. е. находим такое целое n, что $x + nT \in [a, b]$, и полагаем $g(x) = f(x + nT)$.

Экстремум.

Определение. Рассмотрим функцию f на некотором множестве X из области ее определения. Говорят, что точка $x_0 \in X$ является *точкой максимума* (*минимума*) функции f, если **найдется** такое число $r > 0$, что **для любого** элемента $x \in X$, из интервала $(x_0 - r, x_0 + r)$, имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$) (рис. 10).

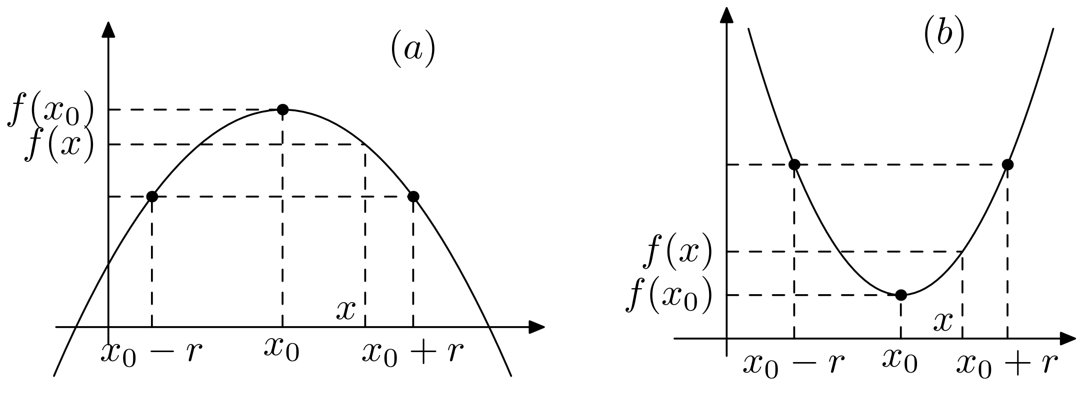


Рис. 10.

Если x_0 либо точка максимума, либо точка минимума функции f, то ее называют *точкой экстремума функции* f.

Значение $f(x_0)$ в точке максимума (минимума) называют *максимальным* (*минимальным*) значением функции f или, короче, *максимумом* (*минимумом*) функции f. Максимальное или минимальное значение функции называют ее *экстремумом.*

Обратим внимание на то, что свойство функции иметь экстремум в точке отражает ее поведение вблизи рассматриваемой точки, иначе говоря, это *локальное свойство* и, говоря об экстремумах, в случае необходимости подчеркивают, что это локальные максимумы или минимумы.

Ограниченность и неограниченность.

Определение. Функцию f называют *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subset D(f)$, если существует C такое, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство

$$f(x) \leqslant C, \tag{8}$$

соответственно

$$f(x) \geqslant C. \tag{9}$$

Функцию f называют *ограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если существует C такое, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant C. \tag{10}$$

Ясно, что функция ограничена на данном множестве тогда и только тогда, когда она на нем ограничена сверху и снизу одновременно.

Определение. Функцию f называют *неограниченной сверху* (*снизу*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если она не обладает свойством соответствующей ограниченности, т. е. если для любого C найдется такое $x \in X$, что

$$f(x) > C, \tag{11}$$

соответственно

$$f(x) < C. \tag{12}$$

Функцию f называют *неограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если для любого C найдется такое $x \in X$, что

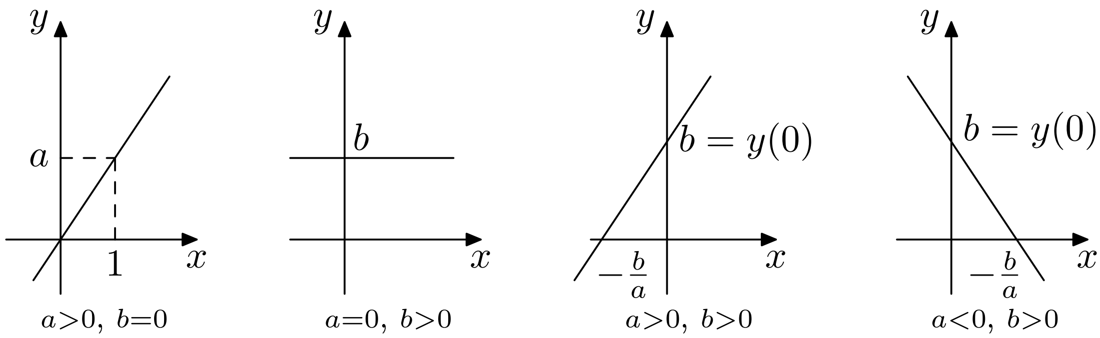
$$|f(x)| > C. \tag{13}$$

Ясно, что функция неограниченная тогда и только тогда, когда она неограниченная либо сверху, либо снизу.

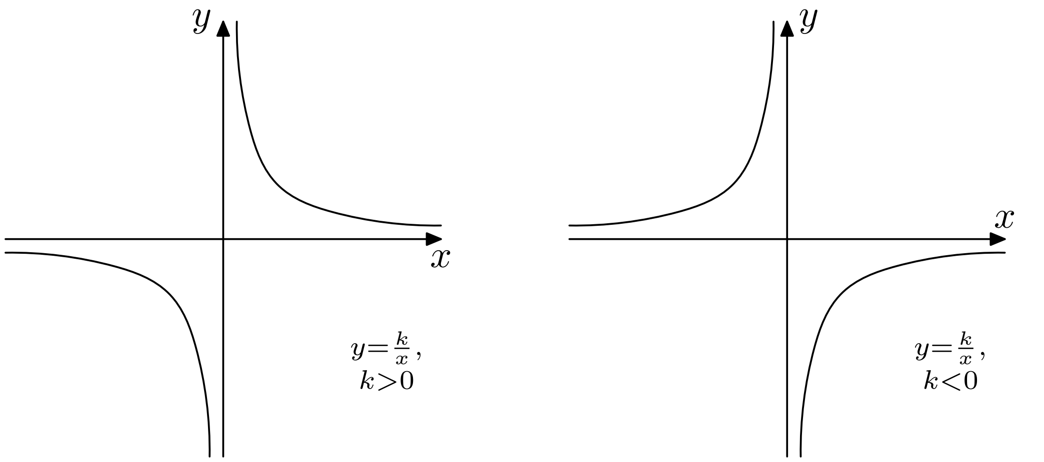
Определение. Рассмотрим функцию f на множестве X. Значение $f(x_0)$ функции f в точке $x_0 \in X$ называют *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции f на множестве X*, если $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$) **для всех** точек $x \in X$.

1.5. Графики элементарных функций.

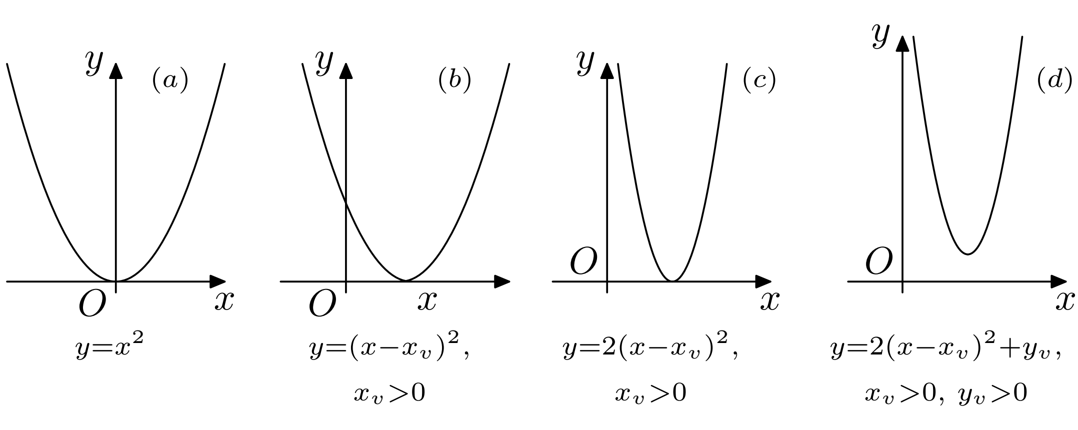
Напомним графики элементарных функций:
Линейная функция (вида $y = ax + b$ при разных вариантах a и b):



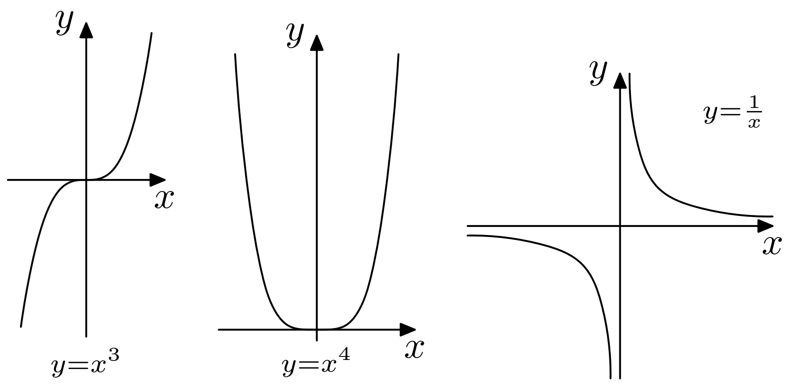
Обратная пропорциональность:



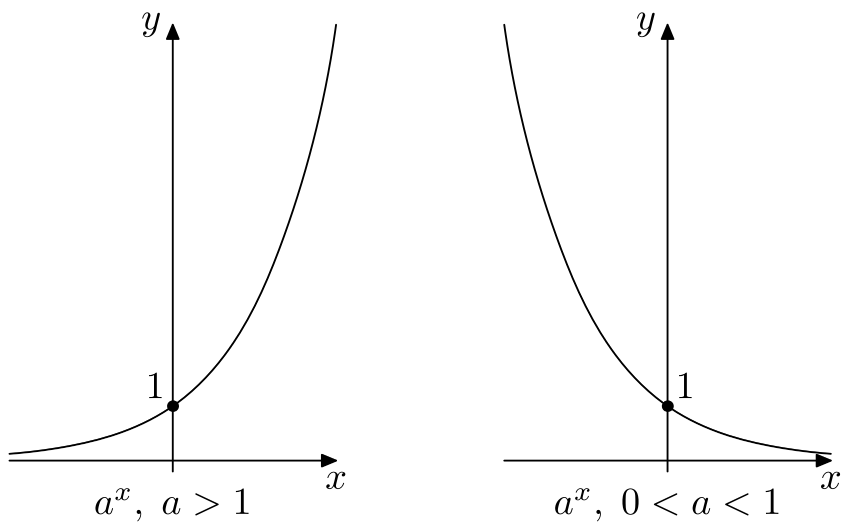
Квадратичная функция:



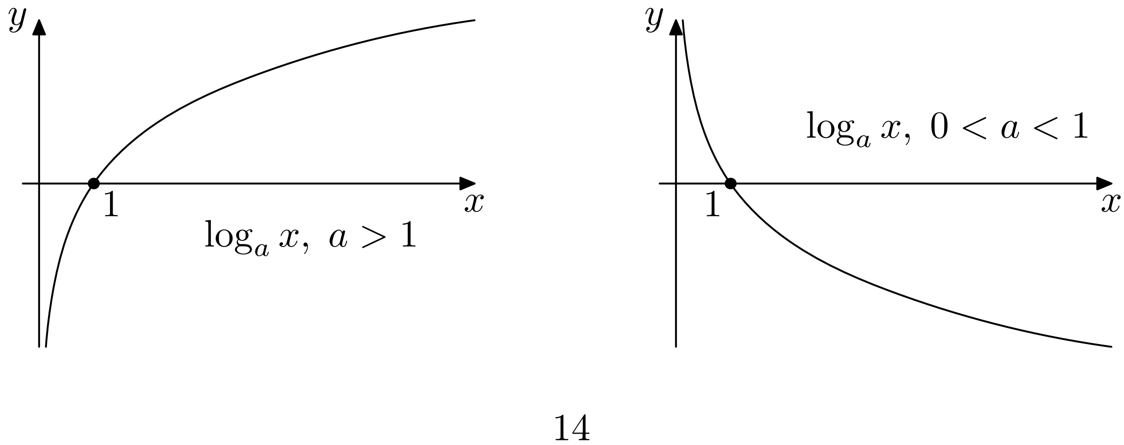
Степенная функция при некоторых показателях степени:



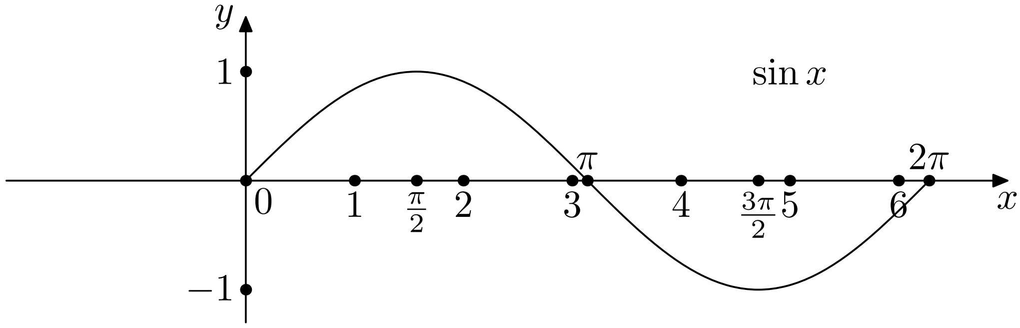
Показательная функция:

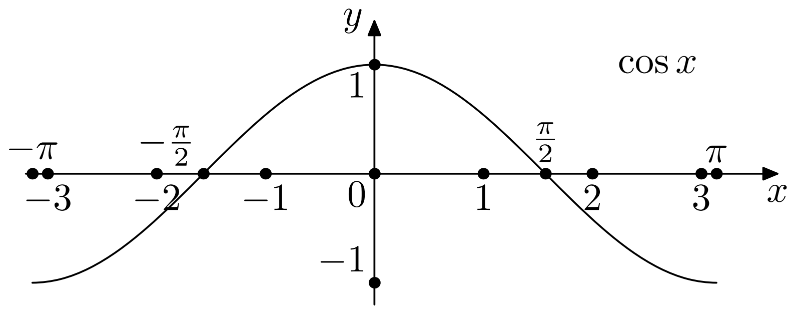


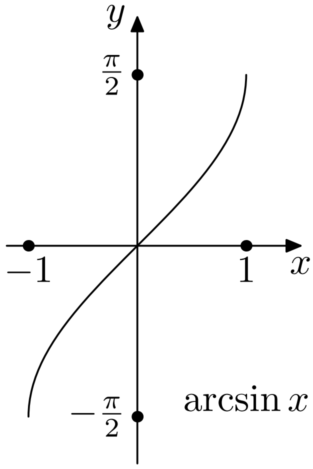
Логарифмическая функция:

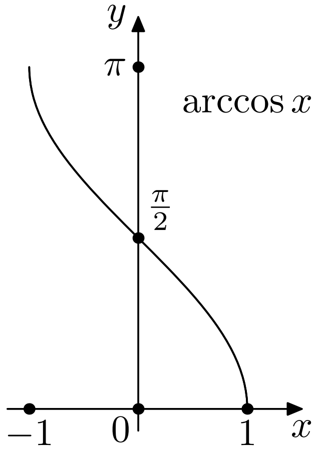


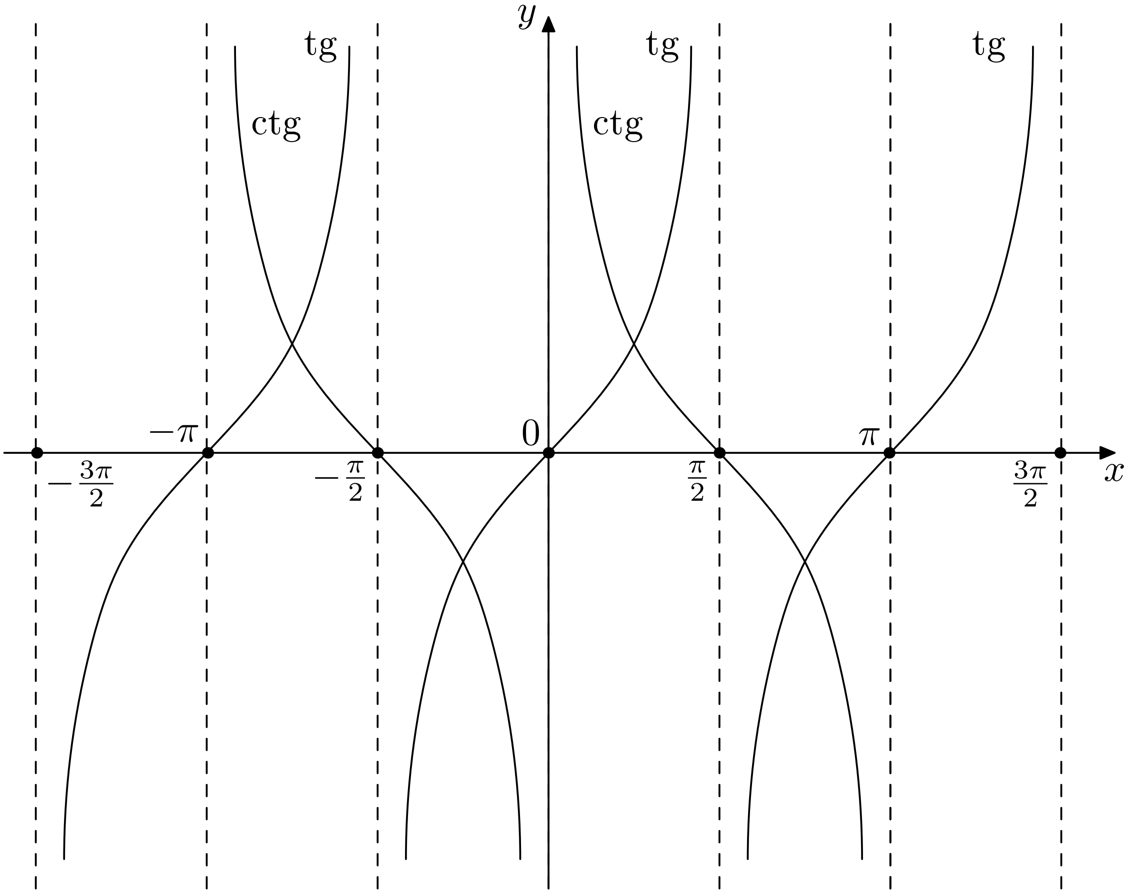
Тригонометрические функции:

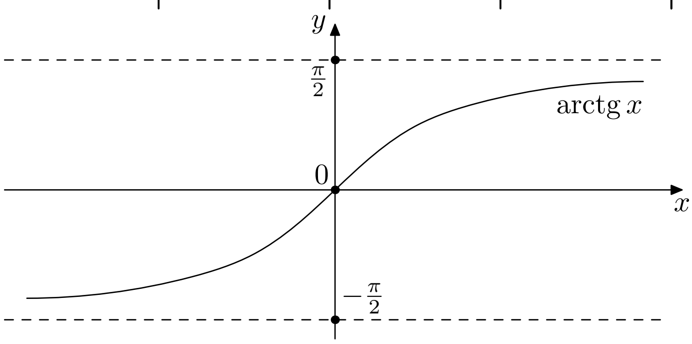


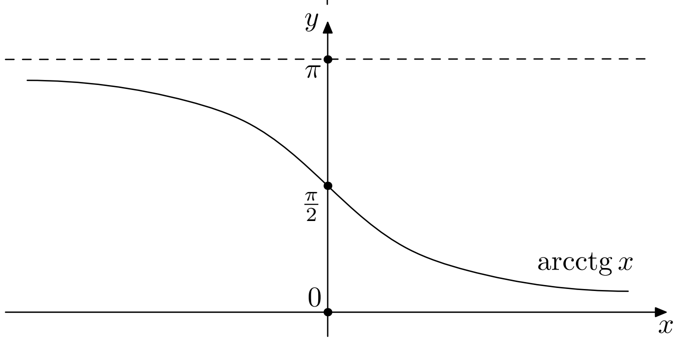












1.6. Преобразования графиков. Построение графиков начнем с изучения того, как преобразуется график, если из данной функции создается другая функция путем взятия композиции с линейной функции в качестве внутренней функции и в качестве внешней функции. Иначе говоря, увидим, как из графика функции $f(x)$ получается график функции $h(x) = af(kx + l) + b$.

1. Пусть дана функция $f(t)$ и изображен ее график. Предположим, что функция $h(x)$ определяется как композиция, в которой f — внешняя функция, а в качестве внутренней взят сдвиг $\varphi(x) = x + m$, т. е. пусть

$$h(x) = f(\varphi(x)) = f(x + m). \tag{1}$$

Функция h определена для таких значений x, что $x+m \in D(f)$. Согласно формуле (1) значения функции h в точке x и функции f в точке $x + m$ совпадают. Тем самым для получения точки $(x, h(x))$ графика функции h надлежит перейти по оси абсцисс из точки x в точку $x + m$, взять там значение $f(x + m)$ функции f и перенести его в точку с абсциссой x (рис. 11).

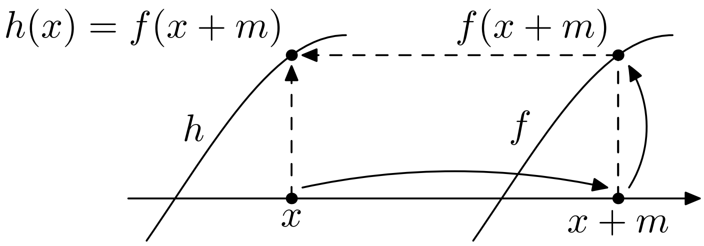


Рис. 11.

Если $m > 0$, то точка $x + m$ находится правее точки x на оси Ox, значит, возвращение со значением $f(x+m)$ обратно в точку с абсциссой x будет перемещением параллельно оси абсцисс влево, если же $m < 0$, то — вправо. Выходит, что график функции h получается как результат сдвига графика функции f влево при $m > 0$ или вправо при $m < 0$. На рис. 12 описанная процедура показана на примере перехода от графика функции $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ к графику функции $h(x) = f(x - 5) = \sqrt{4 - (x - 5)^2} = \sqrt{-x^2 + 10x - 21}$.

2. Пусть функция h получается из функции f растяжением (сжатием) аргумента, т. е. пусть

$$h(x) = f(kx), \quad \text{где } k > 0. \tag{2}$$

Функция h определена для x таких, что $kx \in D(f)$. Согласно формуле (2) для получения точки $(x, h(x))$ графика функции h мы должны проделать

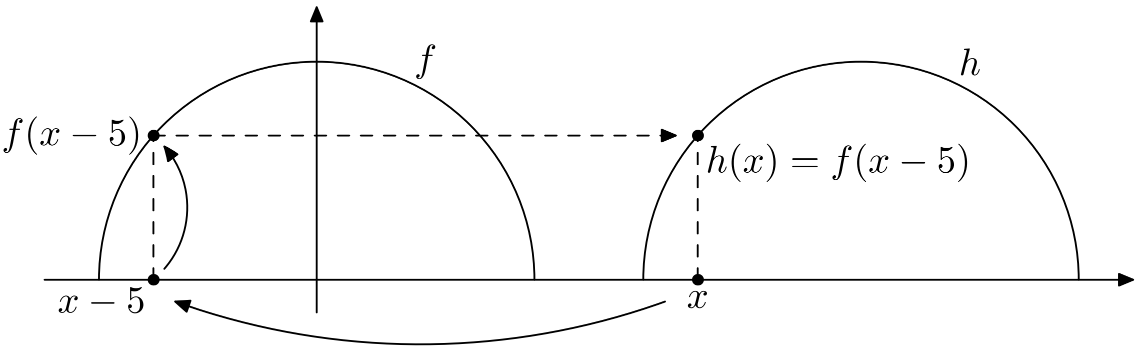


Рис. 12.

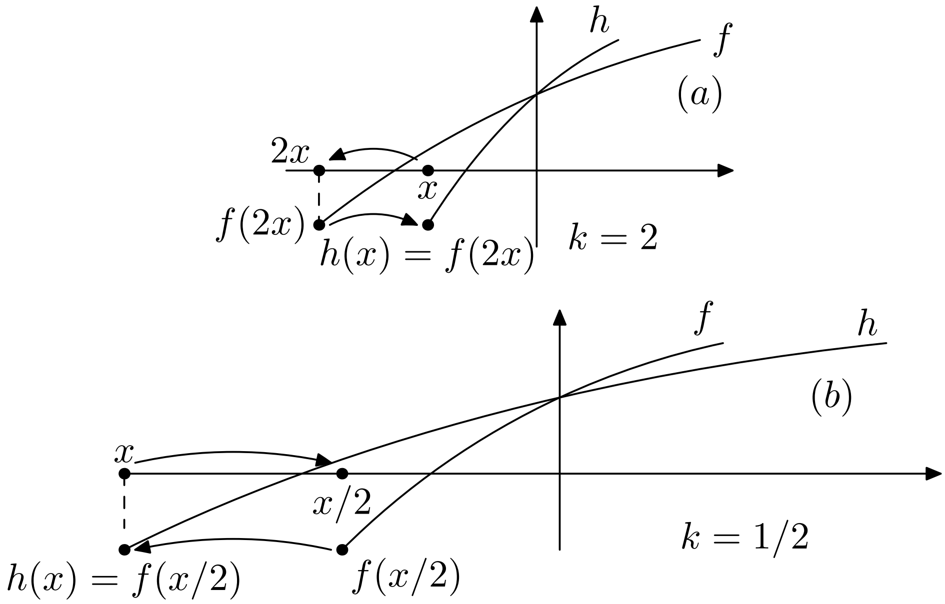


Рис. 13.

следующие манипуляции: перейти из точки x в точку kx оси абсцисс, найти в этой точке значение функции f, т. е. $f(kx)$, затем сместить это значение, поставив его на вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 13).

Если $x > 0$, а $k > 1$, то точка kx будет правее точки x, поэтому при возврате в точку x надлежит сместиться влево, если же $x < 0$, а $k > 1$, то kx левее, чем x, и дальнейшее смещение пойдет вправо. Иначе говоря, график функции h будет получаться из графика функции f сжатием относительно оси ординат: части графика функции f, находящиеся справа и слева от оси ординат, будет перемещаться соответственно влево и вправо, сжимаясь по оси абсцисс в $\dfrac{1}{k}$ (рис. 13(a)). Подобным образом можно понять, что при $0 < k < 1$ произойдет растяжение графика функции f

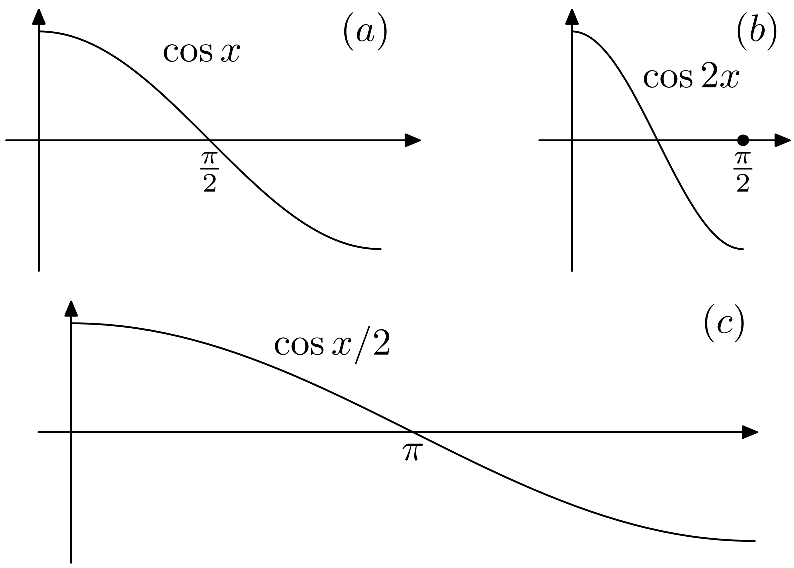


Рис. 14.

относительно оси ординат (рис. 13(b)).

На рис. 14 описанный процесс показан на примере функций $h(x) = \cos 2x$ и $h(x) = \cos(x/2)$ с исходной функцией $f(x) = \cos x$, рассмотренной на промежутке $[0, \pi]$, при этом график $\cos 2x$ получился на отрезке $[0, \pi/2]$, а $\cos x/2$ — на $[0, 2\pi]$.

График функции

$$h(x) = f(-x) \tag{3}$$

получается из графика f симметричным отражением относительно оси ординат, т. е. для построения точки $(x, h(x))$ надо из точки x на оси абсцисс пойти в точку $-x$ на этой же оси, найти значение $f(-x)$ и это значение поставить на вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 15). Ясно, что h определена для таких x, что $-x \in D(f)$.

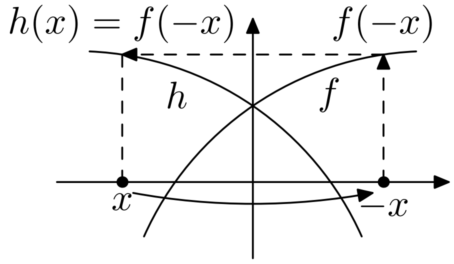


Рис. 15.

График функции

$$h(x) = f(-kx), \quad \text{где } k > 0, \tag{4}$$

получается в результате отражения графика f симметрично относительно оси ординат и последующего растяжения или сжатия в $1/k$ раз согласно величине k. Тем самым появилась возможность получать график функции вида $f(kx)$ на основе графика f при k любого знака.

3. Если функция h создана следующим образом:

$$h(x) = f(k(x+m)), \tag{5}$$

то для построения ее графика на основе графика f надо, во-первых, произвести преобразование, соответствующее коэффициенту k, т. е. растяжение (сжатие) в $1/k$ раз при $k > 0$ или предварительное отражение относительно оси ординат с последующим растяжением (сжатием) в $-1/k$ раз при $k < 0$, а затем полученный график сдвинуть на величину m, как и выше, согласно знаку m.

Из предыдущих рекомендаций легко составить процедуру получения графика с функцией вида $kx + l$, $k \neq 0$, в качестве внутренней функции в суперпозиции, т. е. процедуру построения графика функции $h(x) = f(kx + l)$ на основе графика функции $f(x)$. Для этого проделаем небольшое преобразование:

$$f(kx + l) = f(k(x + l/k)), \tag{6}$$

и задача свелась к исполнению предыдущих шагов с соответствующими константами. А именно, сначала надо отработать преобразование, отвечающее умножению в аргументе на k, а затем сдвинуть на l/k.

4. Теперь рассмотрим ситуации, когда преобразования касаются значений функции, а не ее аргумента. Пусть дана функция f и известен ее график. Научимся строить на этой основе график функции $g(x) = af(x) + b$.

Начнем с того, что график функции $\varphi(x) = af(x)$ при $a > 0$ получается из графика функции f путем растяжения при $a > 1$ или сжатия при $0 < a < 1$ по оси ординат. Это значит, что для получения точки $(x, \varphi(x))$ графика φ надлежит взять точку $(x, f(x))$ графика f и соответственно увеличить или уменьшить ее ординату в a раз (рис. 16(a)).

Если $\varphi(x) = -f(x)$, то график φ получается отражением графика функции f относительно оси абсцисс (рис. 16(b)).

График функции $\varphi(x) = -af(x)$ при $a > 0$ получается отражением графика f относительно оси абсцисс и последующим растяжением или сжатием полученной линии вдоль оси ординат согласно величине a.

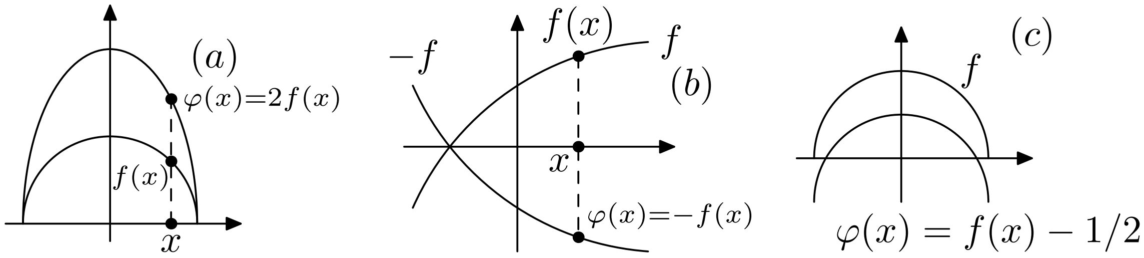


Рис. 16.

5. График функции $\varphi(x) = f(x)+b$ получается из графика f сдвигом вдоль оси ординат вверх на величину b при $b > 0$ или вниз на величину $-b$ при $b < 0$ (рис. 16(c)).

Наконец, для построения графика функции $g(x) = af(x) + b$ надо сначала совершить преобразование, отвечающее умножению на число a, и затем — преобразование, соответствующее добавлению b.

6. Чтобы построить график функции

$$g(x) = af(kx + l) + b, \tag{7}$$

надо сначала отработать преобразования, вызванные влиянием внутренней функции $kx + l$, а затем к результату применить преобразования, отвечающие внешней функции $y(t) = at + b$.

7. Полезно уметь строить графики функций $f(|x|)$ и $|f(x)|$ на основе графика функции f. Функция $f(|x|)$ четна, поэтому ее график $f(|x|)$ получается так: берется та часть графика функции f, которая соответствует неотрицательным значениям аргумента из области определения функции f, и отражается симметрично относительно оси ординат, при этом расположенная правее оси ординат часть, разумеется, сохраняется, а часть графика $f(x)$, расположенная левее оси ординат, в графике функции $f(|x|)$ не участвует (рис. 17(a), (b)). Назовем эти действия *процедурой взятия модуля от аргумента.*

Поскольку

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

график $|f(x)|$ строится так: та часть графика функции f, которая расположена выше оси абсцисс, остается на месте, а та часть, которая расположена ниже оси абсцисс, отражается симметрично относительно оси абс-

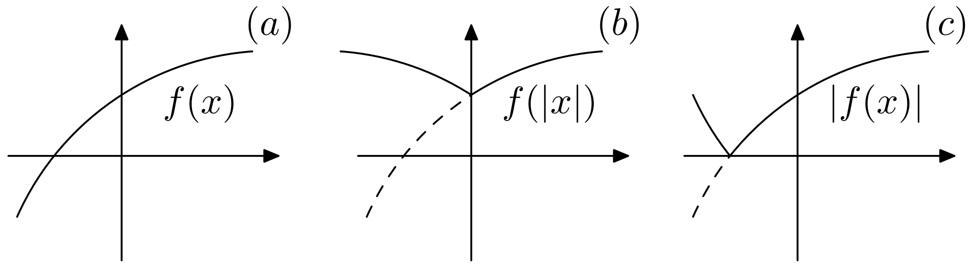


Рис. 17.

цисс и добавляется к оставленной на месте части графика f (рис. 17(a), (c))). Эти действия назовем *процедурой взятия модуля от функции.*

Пример 1. Посмотрим, как преобразования влияют на вид функции и ее графика. Возьмем какую-либо функцию, например $f(x) = \arcsin x$, график которой представлен на рис. 18(a), будем ее преобразовывать и смотреть, что происходит с ее графиком. Затем поймем, как можно создать цепочку преобразований, если дан конечный вид функции и надлежит понять, из какой функции и в результате каких преобразований она получилась.

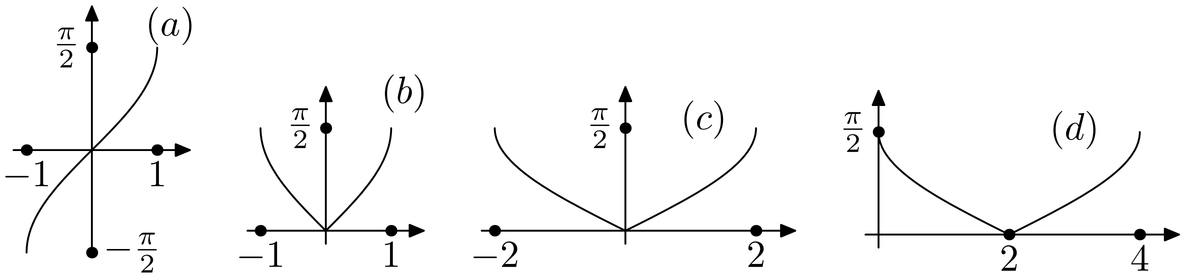


Рис. 18.

На первом шаге функцию $f(x)$ преобразуем в функцию $f_1(x) = f(|x|) = \arcsin |x|$. С графиком произойдет следующее: та его часть, которая находится левее оси ординат, бесследно исчезнет, а расположенная правее этой оси отразится симметрично относительно оси ординат. Результат представлен на рис. 18(b).

Теперь умножим аргумент на какую-либо константу, например на $1/2$, т. е. перейдем от функции $f_1(x)$ к функции

$$f_2(x) = f_1\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right) = f_1\left(\frac{1}{2}|x|\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x|\right).$$

График функции f_2 представлен на рис. 18(c).

Добавим к аргументу какую-либо константу, например -2, и перейдем к функции

$$f_3(x) = f_2(x-2) = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right).$$

График f_3 получается из графика f_2 сдвигом на 2 вправо (рис. 18(d)).

Поработаем со значениями функции. Умножим значения функции на какую-либо константу, например на 2, т. е. перейдем к функции

$$f_4(x) = 2f_3(x) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right).$$

График f_4 получится из графика f_3 растяжением по оси ординат в два раза (рис. 19(a)).

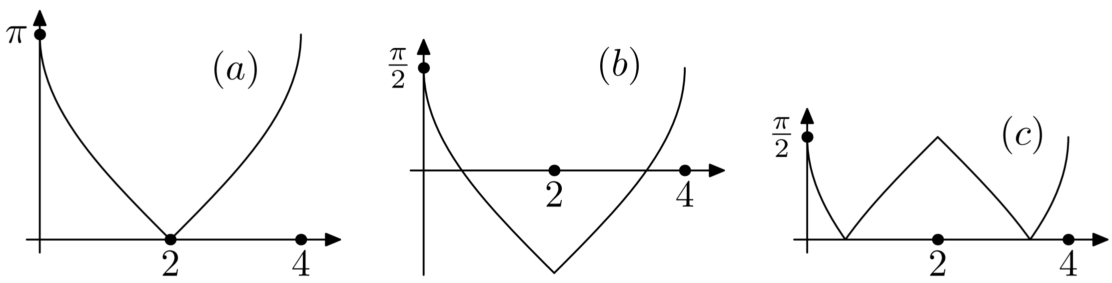


Рис. 19.

Теперь сделаем сдвиг значений функции на некоторую константу, например на $\pi/2$, вниз, т. е. перейдем к функции

$$f_5(x) = f_4(x) - \frac{\pi}{2} = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Ее график дан на рис. 19(b).

Наконец, навесим модуль на значения полученной функции, т. е. перейдем к функции

$$f_6(x) = |f_5(x)| = \left|2\arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right) - \frac{\pi}{2}\right|.$$

С графиком произойдет следующее. Та его часть, которая расположена выше оси абсцисс, останется на месте, а расположенная ниже оси абсцисс отразится симметрично относительно оси абсцисс (рис. 19(c)).

Применив к данной функции все разобранные выше виды преобразований, мы в итоге пришли к функции $f_6(x)$ и ее графику.

Займемся обратной задачей: пусть дана функция, требуется исследовать, результатом какой последовательности преобразований, примененных к некоторой исходной функции, она является. В результате такого исследования у нас появится возможность прописать процедуру изменения графика исходной функции. Весь процесс проанализируем на примере конкретной последовательности преобразований, однако будет ясно, как проделать соответствующую процедуру при другой последовательности преобразований.

Пусть известен график функции $\varphi(x)$. Рассмотрим функцию $f(x) = |2\varphi(|2x-1|)-1|$ (для изображения проводимых преобразований читатель может подставить на место $\varphi(x)$ любую функцию, график которой ему известен). Функция f получается из функции $f_1(x) = 2\varphi(|2x-1|) - 1$ в результате операции взятия модуля от значений функции, так что график f получится из графика f_1 в результате соответствующей операции. Функция $f_1(x)$ получается из функции $f_2(x) = 2\varphi(|2x-1|)$ путем вычитания из $f_2(x)$ единицы, значит, график f_1 получается из графика f_2 сдвигом вниз на единицу. Функция $f_2(x)$ получается из функции $f_3(x) = \varphi(|2x-1|)$ умножением значений на 2, стало быть, график f_2 получается из графика f_3 растяжением по вертикали в два раза. Функция $f_3(x) = \varphi(|2x-1|) = \varphi(2|x-1/2|)$ получается из функции $f_4(x) = \varphi(2|x|)$ в результате вычитания из аргумента числа $1/2$, стало быть, график f_3 получается из графика f_4 сдвигом на $1/2$ по оси абсцисс вправо. Функция f_4 получается из функции $f_5(x) = \varphi(|x|)$ умножением аргумента на два, тем самым график f_4 получается из графика f_5 (горизонтальным) сжатием по оси абсцисс в два раза. Наконец, функция $f_5(x)$ получается из функции $f_6(x) = \varphi(x)$ путем взятия модуля от аргумента, так что график f_5 получается из графика f_6 в результате применения соответствующей операции.

Таким образом, мы получили процедуру построения графика исходной функции f на основе известного графика функции φ.

Теперь, когда установлена последовательность действий, в результате которых из функции φ получается функция f, можно, переходя в обратном порядке от функции $\varphi = f_6$ к функции f, указать последовательность преобразований, в результате которых из графика функции φ получится график функции f, а именно:

1) применить к графику функции φ процедуру взятия модуля от аргумента,

2) сжать график по оси абсцисс в 2 раза,
3) сдвинуть график вправо на $1/2$,
4) растянуть по вертикали в 2 раза,
5) сдвинуть вниз на 1,
6) применить процедуру взятия модуля от функции.

Упражнения. Построить графики функций:
(1) $y = \sin 2x$, (2) $y = 2\sin x$, (3) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,
(4) $y = 2\sin x + 1$, (5) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$, (6) $y = x^2 + 2x + 2$,
(7) $y = 2x^2 + 4x + 5$, (8) $y = |x^2 + 2x - 2|$, (9) $y = x^2 + 2|x| - 2$,
(10) $y = |x^2 + 2|x| - 2|$, (11) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, (12) $y = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$,
(13) $y = \operatorname{arctg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\pi}{2}$, (14) $y = \left|\dfrac{1}{2}\arccos(2x-1) - \dfrac{\pi}{4}\right|$.

1.7. Простейшее исследование функции и построение графика. Для определенности и единообразия будем проводить исследование функции и последующее построение графика путем выполнения пожеланий пунктов следующего ниже перечня, хотя в каких-то ситуациях, возможно, от этого перечня будем отклоняться.

Перечень действий для исследования функции в целях построения ее графика.

1. Найти область определения.

2. Исследовать особенности функции, упрощающие построение графика, а именно установить, будет ли она четной, нечетной, периодической.

3. Найти нули функции или установить их отсутствие, указать промежутки ее знакопостоянства.

4. Изучить поведение функции на концах области определения и характер ее обращения в нуль.

5. Исследовать монотонность и экстремумы.

Покажем, как работает предложенный перечень на примерах несложно задаваемых функций. Оказывается, что и в простых ситуациях могут быть неожиданности. Постараемся ограничиваться элементарными средствами, не предполагающими использование производной, но и пренебрегать совсем этим техническим средством не будем, так что при острой необходимости привлечем и производную.

Пример 1. Построим график функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Функция определена при всех действительных x. Она непериодическая, например потому, что значение 1 она принимает единственный раз, при $x = 0$. Функция четна:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Ввиду четности дальнейшее изучение пройдет для $x \geqslant 0$.

На множестве $[0, +\infty)$ функция $x^2 + 1$, стоящая в знаменателе, при увеличении x неограниченно возрастает, следовательно, наша функция убывает и неограниченно приближается к нулю. Тем самым на правом конце области определения, при далеких положительных x ее график будет прижиматься к оси абсцисс и выглядеть так, как показано на рис. 20(a).

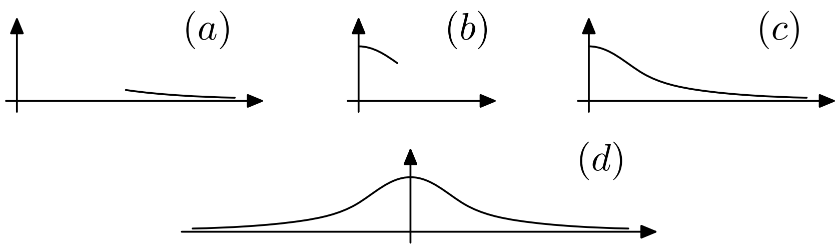


Рис. 20.

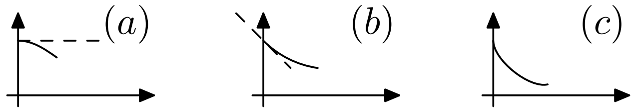


Рис. 21.

На другом конце рассматриваемого множества, т. е. при $x = 0$, она равна 1. Однако приблизиться к единице она могла разными способами — с горизонтальной, наклонной или вертикальной касательной, т. е. одним из указанных на рис. 21 способов. Обычно такое исследование проводится с помощью производной, однако в нашем случае можно обойтись и без нее. Обратим внимание на то, что выражение $\dfrac{1}{x^2+1}$ для $|x| < 1$ равно сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $-x^2$:

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots .$$

Поскольку нас интересует, как будет выглядеть график около нуля оси абсцисс, естественно считать x малыми, близкими к 0. А тогда значения x^4, x^6 и т. д. существенно меньше, чем x^2, значит, если «пожертвовать» этими малыми по сравнению с x^2 слагаемыми, то можно считать, что наша функция близка к функции $1 - x^2$, вид которой около нуля известен. Вместе с тем нетрудно понять, что $f(x) > 1 - x^2$ и $f(x) \leqslant 1$. Тем самым график нашей функции будет между графиками функций $y = 1 - x^2$ и $y = 1$ и вид его показан на рис. 20(b). Изображая рис. 20(a) и 20(b) на одной координатной плоскости, получим эскиз графика функции f для положительных x (рис. 20(c)) а распространив картинку по четности на всю числовую прямую, придем к эскизу всего графика функции (рис. 20(d)).

По-видимому, у нее будет меняться направление выпуклости, но это можно исследовать, привлекая вторую производную, что в наши планы пока не входит.

Пример 2. Построим график функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Отличие функции этого примера от функции предыдущего лишь в том, что здесь в знаменателе стоит знак минус, тогда как там — плюс. Однако различия в свойствах функций и их графиках существенны.

Функция определена на всем множестве $\mathbb{R}$, кроме точек -1 и 1. Она четная и непериодическая, так что изучать ее можно лишь на множестве неотрицательных действительных чисел.

Функция не обращается в нуль, и неравенство $\dfrac{1}{x^2 - 1} > 0$ выполнено на множестве $|x| > 1$, т. е. на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. На оставшемся множестве $(-1, 1)$ она отрицательна.

Изучим поведение функции на концах области определения. При увеличении x знаменатель возрастает и неограниченно увеличивается, так что функция, убывая, приближается к нулю. Это отражено на рис. 22(a). Если аргумент приближается к значению 1, оставаясь справа от этой точки, то знаменатель приближается к нулю, а график функции, положительной справа от 1, неограниченно приближается к вертикальной прямой $x = 1$ справа (рис. 22(b)). Если подходить к 1 слева, то приближение знаменателя к нулю останется, а знак изменится, стало быть, значения функции около 1 слева будут большими по абсолютной величине, но отрицательными, а ее график «прильнет» к вертикальной прямой $x = 1$ слева, как показано на рис. 22(c).

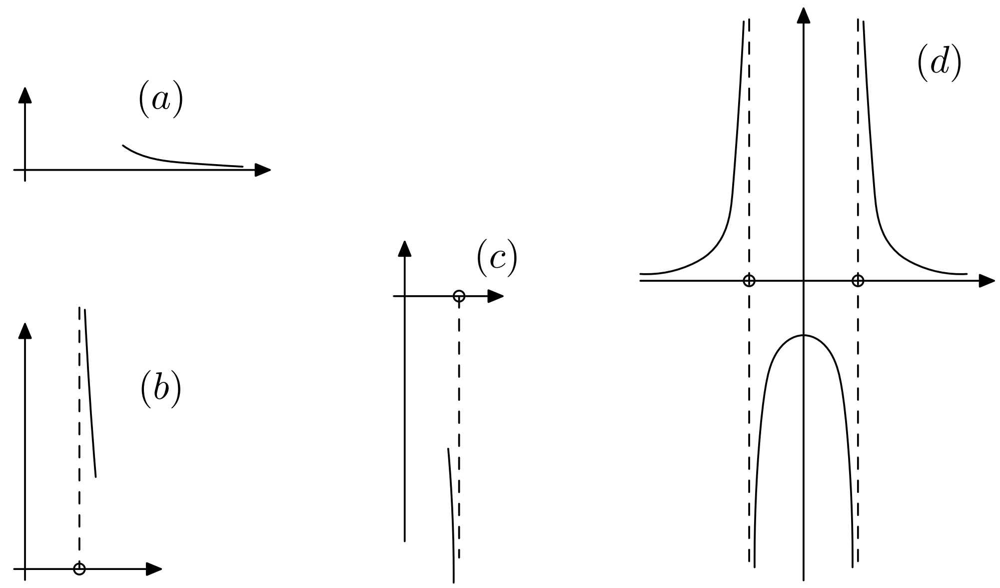


Рис. 22.

Осталось, по существу, понять, как выглядит функция около точки $x = 0$. Аналогично предыдущему можно сказать, что

$$\frac{1}{x^2-1} = -1 - x^2 - x^4 - \ldots,$$

и, пренебрегая сравнительно малыми величинами $x^4, \ldots$, можно написать приближенное равенство $\dfrac{1}{x^2-1} \approx -x^2 - 1$, а вид этой функции около нуля известен. Осталось, соединив информацию рис. 22(a)–(c) и приняв во внимание четность функции, изобразить график самой функции (рис. 22(d)).

Пример 3. Построим график функции $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Данная функция определена на множестве $|x| \geqslant 1$, т. е. на множестве $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Функция четная, так что при ее исследовании можно ограничиться множеством $[1, +\infty)$. Функция обращается в нуль в точках ± 1 и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Если x неограниченно возрастает, то при больших значениях x вычитание единицы практически незаметно, так что при таких x функция будет близка к функции $y = \sqrt{x^2} = x$, оставаясь меньше функции $y = x$. Это наблюдение говорит о том, что при далеких x график нашей функции будет «прижиматься» к графику функции $y = x$ снизу так, как показано на рис. 23(a).

Будем теперь приближаться к точке 1 (естественно, справа). Как узнать характер входа в нуль функции $f(x)$? Можно найти ее производную, а можно пока обойтись и простыми наблюдениями. Представим

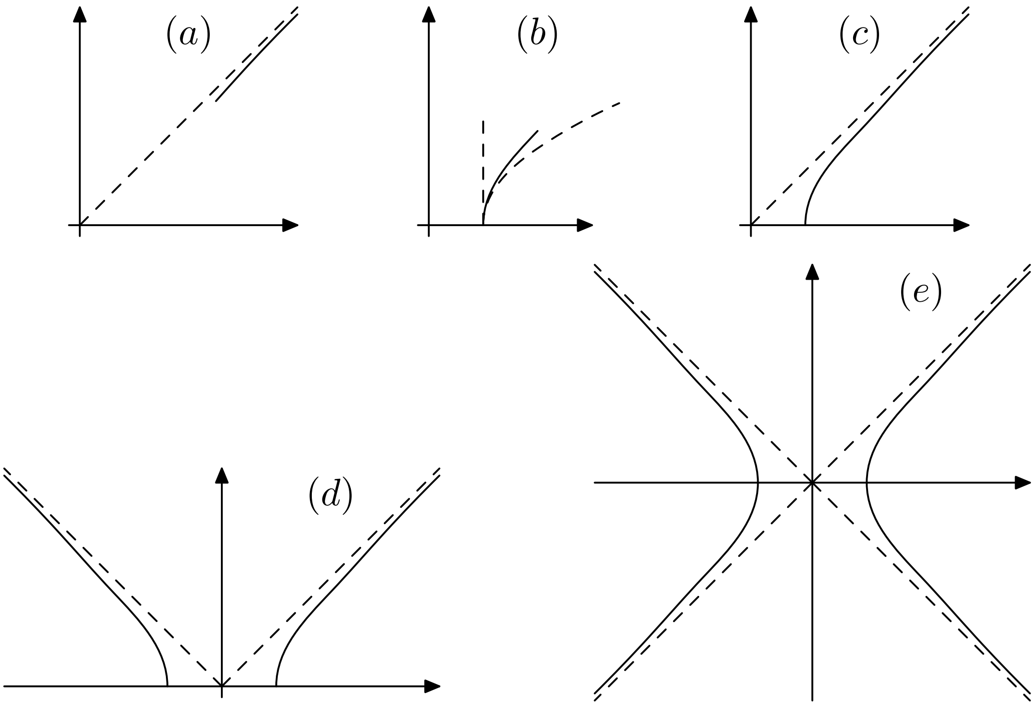


Рис. 23.

функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ и заметим, что из двух сомножителей под корнем один обращается в нуль, а другой нет, поэтому характер обращения функции в нуль будет определяться только одним из этих сомножителей, а именно $x-1$, второй множитель (под корнем) будет примерно равен 2. Поэтому около точки $x = 1$ можно написать, что $f(x) \approx \sqrt{2(x-1)}$, а вид этой функции понятен — это сдвинутый и немного растянутый по оси Oy корень квадратный (рис. 23(b)). Наша функция будет немного больше функции $\sqrt{2(x-1)}$. Вспомнив, что функция возрастает на $[1, +\infty)$, и соединив фрагменты графика, изображенные на рис. 23(a),(b), получим эскиз графика функции при положительных x (рис. 23(c)). График всей функции получится из построенной части распространением по четности, т. е. симметрией относительно оси ординат (рис. 23(d)).

Кстати, можно заметить, что это части гиперболы, но не той, которую мы привыкли видеть как график функции $y = \dfrac{1}{x}$, а повернутой по часовой стрелке на угол $\pi/4$ (рис. 23(e)).

Пример 4. Построим график функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она нечетная как сумма двух нечетных функций. Функция непериодическая хотя бы потому, что в области ее определения нет всего одного числа, а именно нуля.

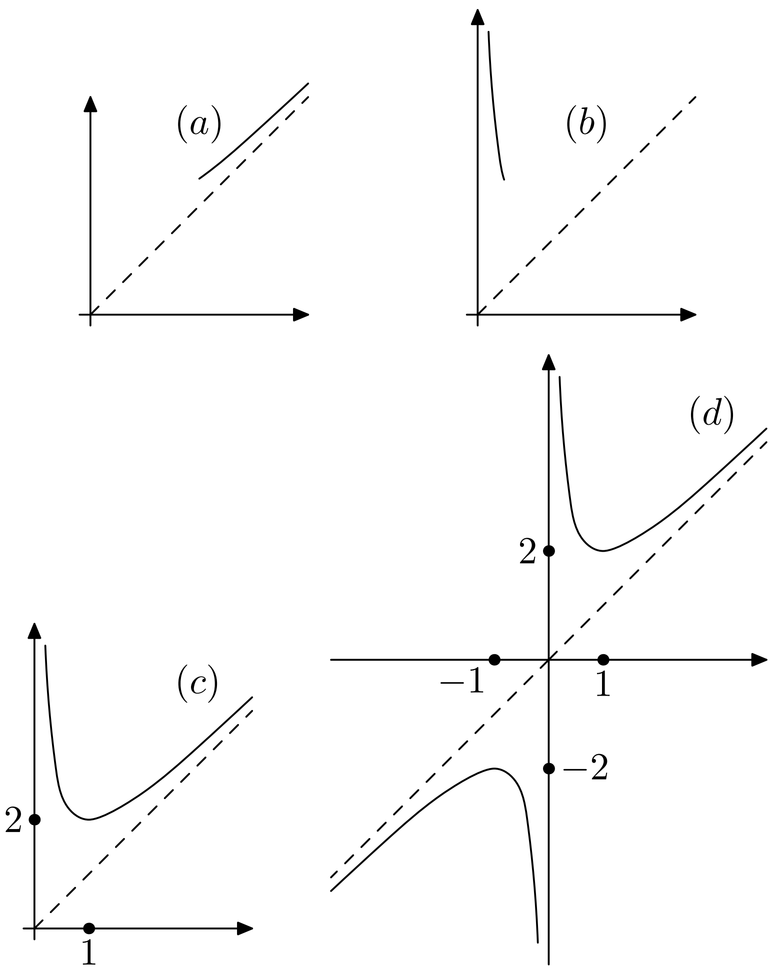


Рис. 24.

Будем исследовать функцию на множестве $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Она положительна во всех точках этого множества. Если x становится большим, то слагаемое $1/x$ в определяющей функцию формуле становится малым и тем самым на величину значения $f(x)$ окажет малое влияние. Иначе говоря, при больших x имеем $f(x) \approx x$ и $f(x) > x$. Это наблюдение на рисунке выглядит как «прилипание» графика функции f сверху к графику функции $y = x$ при далеких положительных значениях x (рис. 24(a)). Пусть теперь x приближается к нулю. Тогда из двух слагаемых x и $1/x$ основной вклад в величину значения функции внесет $1/x$, так что при малых положительных x имеем $f(x) \approx 1/x$ и при этом $f(x) > 1/x$. Это выглядит так, как изображено на рис. 24(b).

Из рис. 24(a), (b) ясно, что где-то при $x > 0$ будет минимум функции. Его легко найти с помощью производной, но мы ради того, чтобы воспользоваться некоторым простым полезным техническим средством, сделаем это иначе. Представляя слагаемые x и $1/x$ как квадраты каких-то величин, выделим в функции полный квадрат и оценим ее снизу:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x - 2 + \frac{1}{x} + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Поскольку при этом $f(1) = 2$, становится понятно, что 2 — наименьшее значение функции, достигаемое при $x = 1$. На промежутке $(0, 1]$ функция убывает, на $[1, +\infty)$ — возрастает (что можно обосновать с помощью производной). График функции на положительной полуоси изображен на рис. 24(c), а весь график — на рис. 24(d).

Упражнения. Провести простейший анализ функций и изобразить эскизы их графиков:

(1) $y = \sqrt{x^2+1}$, (2) $y = \sqrt{1-x^2}$, (3)$y = x - \dfrac{1}{x}$,
(4) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$, (5) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$, (6) $y = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$, (7) $y = \dfrac{1}{\sin x}$,
(8) $y = \sin\dfrac{1}{x}$, (9) $y = x\sin x$, (10) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$,
(11) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$, (12) $y = 2^{\frac{1}{x}}$, (13*) $y = \sin(\arcsin x)$,
(14*) $y = \arcsin(\sin x)$, (15*) $y = \sin(\arccos x)$.