

§ 16. Равномерная сходимость последовательностей и рядов

16.1. Рассмотрим произвольное множество X и последовательность функций f_n , определенных на X . Говорят, что последовательность f_n *сходится поточечно на X* к функции f , если $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ для каждого $x \in X$. Иначе говоря, последовательность f_n сходится поточечно на X к f , если

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ясно, что в этом утверждении требуемый номер n_0 зависит, вообще говоря, от выбора точки x . Вместе с тем встречаются ситуации, в которых можно выбрать n_0 не зависящим от x , т. е. подходящим для любого $x \in X$, или годным **в равной мере** для всех $x \in X$. Это обстоятельство приводит к определению равномерной сходимости последовательности функций.

16.2. Определение. Говорят, что последовательность функций f_n *сходится равномерно на множестве X* к функции f , если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in X) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ясно, что при равномерной сходимости f_n к f выбор номера n_0 **не зависит** от x .

Факт равномерной сходимости последовательности функций f_n к функции f обозначают символом $f_n \Rightarrow f$.

Нетрудно понять, что если функциональная последовательность сходится к некоторой функции равномерно, то она сходится к ней и поточечно, так что функциональная последовательность может равномерно сходиться только к своему поточечному пределу.

Отметим, что если множества X и X_1 отличаются лишь на конечное множество, то равномерная сходимость на одном из них равносильна равномерной сходимости на другом.

16.3. Устанавливать факт равномерной сходимости функциональной последовательности удобно и эффективно с помощью равномерной нормы.

Пусть φ — ограниченная функция на множестве X . Величину

$$\sup_{x \in X} |\varphi(x)|$$

называют *равномерной нормой функции* φ . Будем обозначать ее символом $\|\varphi\|$.

16.4. Утверждение. Последовательность функций f_n сходится равномерно на множестве X к функции f в том и только в том случае, если $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

16.5. Изучение вопроса о равномерной сходимости последовательности функций f_n на множестве X обычно будем проводить в три этапа.

1. Находим поточечный предел последовательности $f_n(x)$ (обозначим его через $f(x)$).

2. Находим равномерную норму разности

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

3. Изучаем сходимость этой нормы разности к нулю. Если окажется, что $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, то $f_n \Rightarrow f$, а если $\|f_n - f\| \not\rightarrow 0$, то $f_n \not\Rightarrow f$.

Замечание. Если для функциональной последовательности $f_n(x)$ удастся подобрать такую числовую последовательность $a_n \geq 0$, что $|f_n(x)| \leq a_n$ для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, да к тому же $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то последовательность f_n сходится к нулю равномерно на множестве X .

16.6. Утверждение (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Последовательность функций f_n сходится равномерно на множестве X в том и только в том случае, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall x \in X) |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

или, что равносильно,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq 0)(\forall x \in X) |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши удобно использовать для доказательства отсутствия равномерной сходимости.

16.7. Пример. Исследуем, сходится ли равномерно последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на множестве $X = [0, \alpha]$, где α — какое-либо число из промежутка $(0, 1)$.

1. Найдем поточечный предел. Поскольку $0 \leq x \leq \alpha < 1$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

2. При каждом фиксированном n функция x^n как функция от x возрастает, значит, $\sup_{x \in [0, \alpha]} x^n = \alpha^n$.

3. Заметим, что $x^n \leq \alpha^n$, а поскольку $\alpha < 1$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ и, следовательно, x^n сходится к нулю равномерно на $[0, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$.

Убедимся в том, что та же последовательность $f_n(x) = x^n$ не будет равномерно сходящейся на множестве $X = [0, 1]$.

1. Ясно, что

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

2. Находим, что

$$f_n(x) - f(x) = x^n - f(x) = \begin{cases} x^n & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Используя определение или основное свойство точной верхней границы, выводим, что

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

3. Замечаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$, следовательно, равномерной сходимости в данном случае нет.

16.8. Пример. Исследуем равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$ на множестве $x > 0$.

1. Находим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1 + n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x/n}{1/n^2 + x^2} = 0,$$

так что предельная функция $f(x)$ нулевая.

2. Для нахождения $\|f_n - f\| = \sup_{x > 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x > 0} \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$ воспользуемся обычным способом нахождения экстремума с привлечением производной. Найдем

$$f'(x) = 2n \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

и заметим, что $f'(x) = 0$ в рассматриваемом множестве в точке $x = \frac{1}{n}$. Нетрудно заключить, что это точка максимума, а также точка, в

которой функция на рассматриваемом множестве принимает наибольшее значение, равное $f(1/n) = 1$, так что $\sup_{x>0} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 1$.

3. Замечаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$, следовательно, равномерной сходимости в данном случае нет.

16.9. Задачи. 1. Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

- (1) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1;$
- (2) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad 0 \leq x \leq 1;$
- (3) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad 0 < x < +\infty;$
- (4) $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{n}{x}, \quad (a) \ 0 < x \leq a < +\infty, \quad (b) \ 0 < x < +\infty;$
- (5) $f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad 1 \leq x < +\infty;$
- (6) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad (a) \ -1 \leq x \leq 1; \quad (b) \ -\infty < x < +\infty;$
- (7) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad -\infty < x < +\infty;$
- (8) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, \quad -\infty < x < +\infty;$
- (9) $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, \quad 0 < x < 1;$
- (10) $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad (a) \ 0 \leq x \leq 1, \quad (b) \ 0 \leq x < +\infty;$
- (11) $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}, \quad (a) \ 0 \leq x < +\infty, \quad (b) \ \delta \leq x < +\infty, \ \delta > 0;$
- (12) $f_n(x) = n \operatorname{arctg} x^n, \quad (a) \ 0 \leq x < 1, \quad (b) \ 0 < x < \delta, \ 0 < \delta < 1.$

2. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x) = n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right).$$

Доказать, что $f_n(x) \Rightarrow f'(x)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$.

3. Пусть

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f \left(x + \frac{i}{n} \right),$$

где $f(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на любом конечном сегменте $[a, b]$.

16.10. Терминология и результаты о поточечной и равномерной сходимостях функциональных последовательностей стандартным образом переносятся на функциональные ряды.

Рассмотрим произвольное множество X и последовательность функций f_n , определенных на X . Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится поточечно на X* , если для каждого $x \in X$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, т. е. существует предел числовой последовательности $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ частичных сумм данного ряда.

Множество тех x , при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, называют его *областью сходимости*.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Утверждение 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно, то он сходится.

Если ряд сходится, но не абсолютно, его называют *условно сходящимся*.

Исследование области сходимости функционального ряда заключается в ответе на вопрос: при каких значениях переменной соответствующий числовой ряд сходится? Тем самым нахождение области сходимости функционального ряда основано на исследовании сходимости при каждом фиксированном x соответствующего числового ряда. Напомним основные шаги такого исследования.

В первую очередь смотрим, если это нетрудно, сходится ли к нулю общий член данного ряда, и если нет, то ряд расходится, если да, то мы продолжаем исследование сходимости ряда.

Затем констатируем, знакопостоянен ли общий член ряда, и если да, то обращаемся к признакам сравнения или основанным на них признакам Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса или изучаем асимптотику общего члена ряда в целях возможного сравнения с общим членом сходящегося ряда. Если общий член ряда меняет знак, то смотрим на возможность

применения к нему признаков Дирихле и Абеля. Абсолютную сходимость изучаем как сходимость знакопостоянного ряда. Для доказательства расходимости можно использовать критерий Коши.

Напомним формулировки признаков сходимости знакопостоянных рядов.

Утверждение 2 (признак сравнения). Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ с положительными членами. Предположим, что $x_n \leq y_n$ для всех (далеких) номеров n . Тогда если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ также сходится, а если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ расходится.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = K$ и $0 < K < \infty$, то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Так будет, в частности, если $x_n \sim y_n$ при $n \rightarrow \infty$.

На сравнении с геометрической прогрессией (быстро сходящимся рядом) основаны признаки Даламбэра и Коши.

Утверждение 3 (признак Даламбэра). Предположим, что $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = d$. Тогда если $d < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, если $d > 1$, то расходится, если же $d = 1$, то признак не дает информации о сходимости ряда.

Утверждение 4 (признак Коши). Предположим, что $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = c$. Тогда если $c < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, если $c > 1$, то расходится, если же $c = 1$, то признак не дает информации о сходимости ряда.

Более тонкими являются признаки, основанные на сравнении с рядами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Утверждение 5 (признак Раабе). Предположим, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

существует предел

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right).$$

Тогда если $p > 1$, то исходный ряд сходится, если $p < 1$, то расходится, если же $p = 1$, то признак не дает информации о сходимости ряда.

Утверждение 6 (признак Гаусса). Если $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\gamma}},$$

где $|\gamma_n| < c$, $\gamma > 0$, то

(а) при $\alpha > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, при $\alpha < 1$ расходится;

(б) при $\alpha = 1$ данный ряд сходится, если $\beta > 1$, и расходится, если $\beta \leq 1$.

Утверждение 7 (признаки Абеля и Дирихле). Рассмотрим числовые последовательности a_n , b_n и предположим, что последовательность a_n монотонна.

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

(α) имеет место сходимость $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а частичные суммы ряда, составленного из b_n , ограничены, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq C$$

при всех $n \in \mathbb{N}$;

(β) последовательность a_n ограничена, т. е. существует такая постоянная $K > 0$, что $|a_n| \leq K$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

При выполнении условия (α) говорят о *признаке Дирихле*, условия (β) — о *признаке Абеля*.

16.11. Задачи. Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

- | | |
|---|--|
| (1) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx};$ | (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}};$ |
| (3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2};$ | (4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx^2};$ |
| (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)^n;$ | (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4} \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)^n;$ |
| (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}};$ | (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n \sin x};$ |
| (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi x}{n} \right)^{n^3};$ | (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+x^2});$ |
| (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n} + x \right)^n;$ | (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n n^{-x};$ |
| (13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}};$ | (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \right)^n (e^{x/n} - 1)^n.$ |

16.12. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно на множестве X* , если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на X . Иначе говоря, ряд сходится равномерно, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in X) \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

16.13. Утверждение 1 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq 0)(\forall x \in X) \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

16.14. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда путем изучения равномерной сходимости его частичных сумм трудно

ввиду того, что для этой последовательности обычно трудно вывести подходящую краткую форму записи. Как и в случае числовых рядов, для исследования равномерной сходимости функциональных рядов мы будем использовать соответствующие признаки.

Сначала ограничимся рассмотрением рядов с положительными членами.

Утверждение 2 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда). *Рассмотрим функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X,$$

такой, что $f_n(x) > 0$ при всех $x \in X$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|,$$

составленный из (равномерных) норм данного ряда, сходится, то исходный ряд сходится равномерно на X .

Этот признак можно сформулировать также в такой форме.

Утверждение. *Рассмотрим функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X,$$

такой, что $f_n(x) > 0$ при всех $x \in X$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, мажорирующий исходный ряд, т. е. такой, что $f_n(x) \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}$, для всех $x \in X$, то данный ряд сходится равномерно на множестве X .

Ясно, что признаком Вейерштрасса можно пользоваться для исследования абсолютной равномерной сходимости (знакопеременного) функционального ряда, т. е. равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

16.15. Пример. Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажем равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на множестве $(0, \infty)$.

Найдем равномерную норму общего члена ряда, т. е. величину $a_n = \sup_{x \in (0, \infty)} \left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right|$. Для этого найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$\left(\frac{x}{1 + n^4 x^2} \right)' = \frac{1 - n^4 x^2}{(1 + n^4 x^2)^2} = 0.$$

Отсюда $x^2 = \frac{1}{n^4}$, или $x = \pm \frac{1}{n^2}$. Ясно, что $a_n = \frac{1}{2n^2}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, наш ряд сходится равномерно на $(0, \infty)$.

16.16. Задачи. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость следующих функциональных рядов на указанных промежутках:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^{3/2} x^2}, \quad -\infty < x < \infty;$
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n \sqrt[3]{n}}, \quad 0 < x < \infty;$
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \quad 1 \leq x < \infty;$
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2 x}, \quad \delta < x < \infty, \delta > 0;$
- (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad 0 < x < \infty;$
- (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, \quad -\infty < x < \infty.$

16.17. При анализе равномерной сходимости функциональных рядов, общий член которых не обязательно положительная функция, используют признаки Абеля и Дирихле.

16.18. Утверждение. Пусть f_n, g_n — заданные на множестве X последовательности функций. Предположим, что при каждом фиксированном $x \in X$ последовательность $f_n(x)$ монотонна.

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

(α) имеет место равномерная сходимость $f_n \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а частичные суммы ряда, составленного из $g_n(x)$, равномерно ограничены, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{k=1}^n g_k(x) \right| \leq C$$

при всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$;

(β) последовательность f_n равномерно ограничена, т. е. существует такая постоянная $K > 0$, что $|f_n(x)| \leq K$ при всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ равномерно сходится на множестве X .

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$$

сходится равномерно на X .

При выполнении условия (α) говорят о *признаке Дирихле*, а условия (β) — о *признаке Абеля*.

16.19. Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ на равномерную сходимость на отрезках $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, где $0 < \alpha < \pi$, и $[0, 2\pi]$.

Заметим, что общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что попытка ограничить его модуль сверху и воспользоваться признаком Вейерштрасса ничего не дает.

Обратимся к признаку Дирихле. Ясно, что последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{n}$ монотонна и сходится к нулю равномерно (на любом множестве). Рассмотрим сумму $\sum_{k=1}^n \sin kx$. Если мы установим ее равномерную ограниченность, то докажем равномерную сходимость данного ряда. Напомним, что

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Если $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$, где $0 < \alpha < \pi$, то $\sin \frac{x}{2} > \sin \frac{\alpha}{2} > 0$, поэтому $|S_n| \leq \frac{1}{\sin \alpha/2}$. Итак, суммы S_n равномерно ограничены на $[\alpha, 2\pi - \alpha]$,

следовательно, по признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно на этом промежутке.

На промежутке $[0, 2\pi]$ уже нет равномерной ограниченности сумм S_n , поэтому воспользоваться признаком Дирихле невозможно, но и гарантировать на его основе отсутствие равномерной сходимости тоже нельзя — признак Дирихле дает лишь достаточное условие сходимости. Для доказательства отсутствия равномерной сходимости на $[0, 2\pi]$ воспользуемся критерием Коши. А именно, попробуем установить, что

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n_1 \geq n)(\exists p \geq 0)(\exists x \in [0, 2\pi]) \left| \sum_{k=n_1}^{n_1+p} \frac{\sin kx}{k} \right| \geq \varepsilon.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а значит, взяв, например, $\varepsilon = 1/2$ и для любого

$n \in \mathbb{N}$ положив, например, $n_1 = n$ и $p = n$, имеем $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. Возьмем

теперь x настолько малым, что $\sin kx \geq 1/2$ при k от n до $2n$ (например, можно взять $x = \pi/6n$). Тогда

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4}.$$

Таким образом, взяв $\varepsilon = 1/4$, мы для любого $n \in \mathbb{N}$ можем подобрать такие $n_1 \geq n$, $p \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$, что $\left| \sum_{k=n_1}^{n_1+p} \frac{\sin kx}{k} \right| \geq \varepsilon$, значит, равномерной сходимости ряда на $[0, 2\pi]$ нет.

16.20. Задачи. 1. Исследовать равномерную сходимость рядов на указанных промежутках.

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + \sqrt{n}}, \quad 0 \leq x < +\infty;$
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + \sin x}, \quad -\infty < x < +\infty;$
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}, \quad 0 \leq x < +\infty;$

- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}, \quad 0 \leq x < +\infty;$
- (5) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \arcsin x}, \quad E_1 = (0, 1/2), \quad E_2 = (1/2, 1);$
- (6) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \sin^2 x}, \quad E_1 = (0, \pi/4], \quad E_2 = (\pi/4, \pi/2);$
- (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 x} \right), \quad E_1 = (0, 1), \quad E_2 = [1, 2];$
- (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{1 + n^2 x^2}, \quad E_1 = (0, 1), \quad E_2 = (1, +\infty);$
- (9) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx^2}, \quad E_1 = (\delta, +\infty), \quad \delta > 0, \quad E_2 = (0, +\infty);$
- (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{n}} e^{-x^2 n}, \quad E_1 = (\delta, +\infty), \quad \delta > 0, \quad E_2 = (0, +\infty);$
- (11) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x^2} \operatorname{arctg}(nx), \quad E_1 = (0, +\infty), \quad E_2 = (\delta, +\infty), \quad \delta > 0;$
- (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin \sqrt{x/n}}{n+x}, \quad E_1 = (0, \delta), \quad E_2 = (0, +\infty).$

2. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно в точках a и b , а функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, монотонны на $[a, b]$, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

3. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно на множестве $[0, +\infty)$.

4. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, 1]$, но его нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

16.21. Ответы. 16.9. (1) Сходится равномерно; (2) сходится неравномерно; (3) сходится неравномерно; (4) (а) сходится неравномерно, (b) сходится равномерно; (5) сходится равномерно; (6) (а) сходится равномерно, (b) сходится неравномерно; (7) сходится равномерно; (8) сходится неравномерно; (9) сходится неравномерно; (10) (а) сходится равномерно, (b) сходится неравномерно; (11) (а) сходится неравномерно, (b) сходится равномерно; (12) (а) сходится неравномерно, (b) сходится равномерно.

16.11. (1) Сходится абсолютно при $x > 0$; (2) сходится абсолютно при $|x| \neq 1$; (3) сходится абсолютно при $|x| > \sqrt{e}$; (4) сходится абсолютно при $x \neq 0$; (5) сходится абсолютно при $|x| \neq 1$, условно при $x = -1$; (6) сходится абсолютно при $|x| > 1$, условно при $x = -1$; (7) сходится условно при $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; (8) сходится абсолютно на интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, и условно в точках $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; (9) сходится абсолютно при $x \neq 0$; (10) сходится условно при всех $x \in \mathbb{R}$; (11) сходится абсолютно при $|x| < 1$; (12) сходится абсолютно при $x > 1$; (13) сходится условно при всех $x \in \mathbb{R}$; (14) сходится абсолютно при $|x| < 2$.

16.20. (1) Сходится равномерно; (2) сходится равномерно; (3) сходится равномерно; (4) сходится равномерно; (5) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 ; (6) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 ; (7) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 ; (8) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 ; (9) сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 ; (10) сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 ; (11) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 ; (12) сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 .

§ 17. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

17.1. Равномерная сходимостъ функциональных последовательностей и рядов используется при ответе на следующий вопрос. Допустим, что каждая из функций, составляющих последовательность или ряд, обладает каким-то свойством, связанным с предельным переходом, например имеет в какой-то точке предел, или непрерывна, или дифференцируема. Будет ли это свойство наследоваться предельной функцией?

17.2. Утверждение 1. Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, определенных на множестве X , такая, что в некоторой точке x_0 существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Пусть существует такая окрестность U точки x_0 , что f_n сходится к f равномерно на U . Тогда существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Утверждение 2. Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, ограниченных на множестве X , такая, что каждая функция $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, и существует окрестность U точки x_0 такая, что f_n сходится к f равномерно на U . Тогда f непрерывна в точке x_0 .

Утверждение 3. Если последовательность f_n состоит из непрерывных на множестве X функций и равномерно на X сходится к функции f , то предельная функция f непрерывна на X .

Утверждение 4. Пусть последовательность f_n дифференцируемых функций сходится на отрезке $[a, b]$ к функции f , а последовательность производных f'_n сходится на $[a, b]$ равномерно. Тогда функция f дифференцируема на $[a, b]$ и

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad x \in [a, b].$$

Утверждение 5. Пусть последовательность f_n состоит из интегрируемых на $[a, b]$ функций и равномерно на $[a, b]$ сходится к функции f . Тогда f интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Мы сформулировали связанные с равномерной сходимостью свойства функциональных последовательностей. Их переформулировки для рядов очевидны и могут быть сделаны читателем самостоятельно.

17.3. Пример. Покажем, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на множестве $\mathbb{R}$.

Действительно, при любом $x \in \mathbb{R}$, очевидно, $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится, значит, ряд сходится на $\mathbb{R}$ равномерно. Поскольку он состоит из непрерывных функций, то и сумма его непрерывна.

Найдем производную общего члена ряда: $\left(\frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$. Она непрерывна на $\mathbb{R}$. Поскольку $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ из производных сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и его сумма представляет собой непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию. Тем самым функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

17.4. Задачи. 1. Доказать, что дзета-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

2. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

3. Показать, что последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$.

4. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

сходится равномерно на множестве $\mathbb{R}$, но $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$.

5. Показать, что последовательность $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ сходится на $[0, 1]$, но

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

6. Показать, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ сходится на $[0, 1]$ к непрерывной функции, однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

7. Показать, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

8. Можно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ дифференцировать почленно?

9. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

10. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но его нельзя почленно дифференцировать ни на каком промежутке.

11. Найти пределы:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1}.$$

§ 18. Степенные ряды

18.1. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (18.1)$$

где c_n — числовая последовательность, $a \in \mathbb{R}$ — фиксированное число, а $z \in \mathbb{R}$, называют *степенным рядом* с коэффициентами c_n .

Выполнив замену переменных $z - a = x$ в ряде (18.1), получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (18.2)$$

свойства которого равносильны свойствам ряда (18.1). Мы приведем все необходимые утверждения для ряда (18.2), их переформулировки для ряда (18.1) очевидны и могут быть сделаны читателем самостоятельно.

18.2. Утверждение 1. Если степенной ряд (18.2) сходится при некотором $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом таком x , что $|x| < |x_0|$, а если он расходится при некотором $x_1 \neq 0$, то будет расходящимся при любом таком x , что $|x| > |x_1|$.

Утверждение 2. Для любого степенного ряда (18.2) существует такое число $R \geq 0$ (возможно, $R = +\infty$), что ряд (18.2) абсолютно сходится в интервале $(-R, R)$, если $R \neq 0$. Этот интервал называют *интервалом сходимости* ряда (18.2).

Если $R = 0$, то ряд (18.2) сходится в одной точке $x = 0$.

Если $R > 0$, то для любого $R_1 \in (0, R)$ ряд (18.2) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[-R_1, R_1]$.

Утверждение 3. Если R — радиус сходимости степенного ряда (18.2), причем $0 < R < +\infty$, и этот ряд сходится в точке R , то он сходится равномерно на отрезке $[0, R]$ и его сумма непрерывна на этом отрезке.

Утверждение 4. Радиус сходимости R степенного ряда (18.2) может быть найден по формуле

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

18.3. Задачи. Найти радиус сходимости и интервал сходимости степенных рядов, исследовать их на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n; & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n; \\
(3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, \quad b > 0; & (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-(n-1))}{n!} x^n.
\end{aligned}$$

18.4. Пусть f — бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция. Степенной ряд

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (18.3)$$

называют *рядом Тейлора* функции f .

Если $x_0 = 0$, то ряд (18.3) называют *рядом Маклорена*.

Сходимость ряда Тейлора к значению функции f в точке x зависит от свойств функции f и может быть проанализирована путем изучения сходимости к нулю остатка в формуле Тейлора. Нас здесь будут интересовать разложения в ряд Тейлора конкретных функций.

18.5. При разложении в ряд Тейлора (или Маклорена) полезно помнить следующие разложения (в которых для удобства записи полагаем $0^0 = 1$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18.4)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18.5)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18.6)$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18.7)$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18.8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1), \quad (18.9)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1, 1), \quad (18.10)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1],$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1]. \quad (18.11)$$

18.6. Задачи. Используя формулы п. 18.5, разложить следующие функции в ряд Маклорена и найти радиусы сходимости полученных рядов:

$$(1) \quad \frac{x^2}{(1+x)^2};$$

$$(2) \quad \frac{1}{(1-x^3)^2};$$

$$(3) \quad (1+x)e^{-x};$$

$$(4) \quad x^2 \ln(4+x^2);$$

$$(5) \quad (1+x^2) \operatorname{arctg} x;$$

$$(6) \quad \frac{1}{x^2 - 2x - 3};$$

$$(7) \quad \frac{5-2x}{x^2 - 5x + 6};$$

$$(8) \quad \frac{1}{(x^2 + 2)^2};$$

$$(9) \quad \ln \left(\frac{3-2x}{2+3x} \right);$$

$$(10) \quad \ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$(11) \quad \cos^2 x;$$

$$(12) \quad \sin^3 x.$$

18.7. Поскольку степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, составленный из производных данного ряда, сходятся равномерно на каждом замкнутом промежутке, содержащемся внутри интервала сходимости данного ряда, функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дифференцируема в этом интервале и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Указанное обстоятельство можно использовать при разложении функции в ряд Тейлора: сначала продифференцировать или проинтегрировать ее, результат разложить в ряд, а затем вернуться к исходной функции.

18.8. Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}.$$

Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} \right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Разложим производную в ряд, используя разложение (18.9):

$$-\frac{1}{1+x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C. \quad (18.12)$$

Для нахождения константы C подставим в (18.12) значение $x = 0$. Получим $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 = C$. Подставив найденное значение константы в равенство (18.12), приходим к искомому разложению.

18.9. Задачи. 1. Разложить в ряд Маклорена следующие функции и найти радиусы сходимости рядов:

(1) $\operatorname{arctg} \frac{2x-3}{x+6};$

(2) $\operatorname{arctg} \frac{2+x^2}{2-x^2};$

(3) $\operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2});$

(4) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2};$

(5) $x \ln(x + \sqrt{x^2+2});$

(6) $\ln(x^3 + \sqrt{9+x^6});$

(7) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$

(8) $2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2);$

(9) $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$

(10) $x^2 \arccos 2x.$

2. Показать, что функция

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

является решением дифференциального уравнения $y' - xy = 0$.

3. Показать, что функция

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

является решением дифференциального уравнения $xy'' + y' - y = 0$.

4. Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

5. Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

6. Вычислить сумму ряда:

$$\begin{array}{ll} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; & (2) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}; \\ (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; & (4) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n. \end{array}$$

18.10. Ответы. 18.3. (1) $R = 1$, $0 < x < 2$, при $x = 0$ и $x = 2$ абсолютно расходится; (2) $R = e$, $-e < x < e$, при $x = \pm e$ расходится; (3) $R = \max(a, b)$, $-R < x < R$, при $x = \pm R$ расходится; (4) $R = 1$, $-1 < x < 1$, при $x = -1$ сходится абсолютно, если $a \geq 0$, и расходится, если $a < 0$, при $x = 1$ сходится абсолютно, если $a \geq 0$, и условно, если $-1 < a < 0$.

18.6. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^{n+2}$, $R = 1$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{3n}$, $R = 1$;
(3) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n$, $R = \infty$; (4) $x^2 \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n+1)}}{n4^n}$, $R = 2$;

$$\begin{aligned}
(5) \quad & x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}, \quad R = 1; \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}((-1)^{n+1} - 3^{-(n+1)})x^n, \quad R = 1; \\
(7) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-(n+1)} + 3^{-(n+1)})x^n, \quad R = 2; \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}} x^{2n}, \quad R = \sqrt{2}; \\
(9) \quad & \ln \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{x^n}{n} \right), \quad R = \frac{2}{3}; \quad (10) \quad \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{-n} + 2^{n-1}}{n} x^{2n}, \\
& R = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (11) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad R = \infty; \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!} x^{2n+1}, \\
& R = \infty.
\end{aligned}$$

18.9. **1.** (1) $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}, \quad R = 3;$ (2) $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}, \quad R = \sqrt{2};$ (3) $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)} x^{2n-1}, \quad R = 1;$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R = 1;$ (5) $x \ln \sqrt{2} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1/2}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n-1},$
 $R = \sqrt{2};$ (6) $\ln 3 + \frac{x^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!! 3^{2n+1} (2n+1)} x^{6n+3}, \quad R = \sqrt[3]{3};$ (7) $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}, \quad R = 1;$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}, \quad R = 1;$ (9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \quad R = 1;$

(10) $\frac{\pi}{2} x^2 - 2x^3 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+3}}{2n+1}, \quad R = \frac{1}{2}.$

4. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$ **5.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}.$

6. (1) $x, \quad x > 0;$ (2) $\frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1;$ (3) $1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), \quad |x| \leq 1;$

(4) $\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}, \quad |x| < 1.$

§ 19. Интеграл Римана, зависящий от параметра

19.1. Пусть дана функция $f(x, \alpha)$, $\alpha \in A \subset \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, интегрируемая на $[a, b]$ как функция от x при каждом фиксированном $\alpha \in A$. Предположим, что f как функция от α непрерывна, или дифференцируема, или интегрируема на A при каждом фиксированном $x \in [a, b]$. Будет ли имеющееся у f свойство наследоваться функцией

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx,$$

представляющей собой интеграл, зависящий от параметра α ?

19.2. Утверждение. Пусть функция $f(x, \alpha)$ при каждом фиксированном $\alpha \in A$ интегрируема на $[a, b]$ как функция от x и при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ сходится равномерно относительно $x \in [a, b]$ к предельной функции $g(x)$. Тогда g интегрируема на $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx = \int_a^b g(x) dx. \quad (19.1)$$

19.3. Утверждение. Пусть функция $f(x, \alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a, b]$, $\alpha \in [c, d]$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ непрерывна на промежутке $[c, d]$.

19.4. Утверждение. Пусть функции $f(x, \alpha)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ непрерывны как функции двух переменных $x \in [a, b]$, $\alpha \in [c, d]$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ непрерывно дифференцируема в каждой точке $\alpha \in [c, d]$ и

$$I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx. \quad (19.2)$$

19.5. Утверждение. Пусть функция $f(x, \alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a, b]$, $\alpha \in [c, d]$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ интегрируема на промежутке $[c, d]$ и

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, \alpha) d\alpha \right) dx.$$

19.6. Утверждение. Пусть функция $f(x, \alpha)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную по α в прямоугольнике $x \in [a, b]$,

$\alpha \in [c, d]$, и пусть дифференцируемые на $[c, d]$ функции φ, ψ таковы, что $a \leq \varphi(\alpha), \psi(\alpha) \leq b$, для всех $\alpha \in [c, d]$. Тогда функция

$$I(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx$$

дифференцируема и имеет место равенство

$$I'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx + \psi'(\alpha)f(\psi(\alpha), \alpha) - \varphi'(\alpha)f(\varphi(\alpha), \alpha). \quad (19.3)$$

19.7. Сформулированные выше утверждения используют для установления непрерывной зависимости интегралов от параметра, а также для нахождения самих интегралов. Последнее делается, например, так. Если, продифференцировав интеграл по параметру, мы сумели вычислить полученный интеграл, то тем самым приходим к дифференциальному уравнению относительно искомого интеграла как функции от параметра. Решая его, мы находим исходный интеграл.

19.8. Задачи. 1. Доказать, что функция $I(\alpha) = \int_0^1 \sin^2 \alpha x^2 dx$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

2. Доказать, что функция $I(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sign}(x - \alpha) dx$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

3. Найти пределы:

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2 x^4} dx; & \quad (2) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx; \\ (3) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_2^4 \frac{x dx}{1 + x^2 + \alpha^2}; & \quad (4) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 x^2 e^{\alpha x^3} dx. \end{aligned}$$

4. Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, \alpha) dx = \int_0^1 \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x, \alpha) dx,$$

если $f(x, \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-x^2/\alpha^2}$.

5. Найти $I'(\alpha)$, если

$$(1) \quad I(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx, \quad (2) \quad I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x} dx.$$

6. Найти $I''(x)$, если

$$I(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \left(\int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta \right) d\xi,$$

где f — непрерывная функция и $h > 0$.

7. Найти $I''(x)$, если

$$I(x) = \int_a^b f(y) |x - y| dy,$$

где $a < b$ и $f(y)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.

8. С помощью дифференцирования интеграла $\int_0^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$ по парамет-

ру α , где $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int_0^b \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}$.

9. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

$$(1) \quad \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx; \quad (2) \quad \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx;$$

$$(3) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx; \quad (4) \quad \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1).$$

10. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

11. Пользуясь формулой $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad 0 < a < b.$$

19.9. Ответы. 19.8. 3. (1) 1; (2) 1; (3) $\frac{\ln 3}{2}$; (4) $\frac{e-1}{3}$. **4.** Нет. **5.** (1) $-(e^{|\sin \alpha|} \sin \alpha + e^{|\cos \alpha|} \cos \alpha) + \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx$; (2) $\frac{2}{\alpha} \ln(1+\alpha^2)$.
6. $\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$. **7.** $2f(x)$, если $x \in (a, b)$, и 0, если $x \notin (a, b)$.
8. $\frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} + \frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$. **9.** (1) $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$; (2) 0, если $|a| \leq 1$, $\pi \ln a^2$, если $|a| > 1$; (3) $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a \ln(1+|a|)$; (4) $\pi \arcsin a$. **10.** $\ln \frac{b+1}{a+1}$. **11.** $\frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2})$.
12. $\operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$.

§ 20. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

В том случае если рассматривается несобственный интеграл, зависящий от параметра, для справедливости утверждений, аналогичных утверждениям 19.2–19.4, требуется дополнительно некоторое свойство, а именно равномерная относительно параметра сходимость несобственного интеграла.

20.1. Рассмотрим функцию $f(x, \alpha)$, которая при каждом значении $\alpha \in E \subset \mathbb{R}$ интегрируема в несобственном смысле по x на промежутке $[a, \omega)$, $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$. Если функция $F(\alpha, y) = \int_a^y f(x, \alpha) dx$, $y \in [a, \omega)$, имеет конечный предел при $y \rightarrow \omega$ равномерно относительно $\alpha \in E$, то говорят, что *несобственный интеграл* $I(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in E$. Напомним, что равномерная относительно $\alpha \in E$ сходимость $F(\alpha, y) \xrightarrow[y \rightarrow \omega]{} \varphi(\alpha)$ означает, что

$$\lim_{y \rightarrow \omega} \sup_{\alpha \in E} |F(\alpha, y) - \varphi(\alpha)| = 0.$$

Перефразируя содержание равномерной сходимости применительно к несобственному интегралу, можно утверждать, что его равномерная сходимость относительно $\alpha \in E$ означает выполнение следующего утверждения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y_0 \in [a, \omega))(\forall y \geq y_0, y < \omega)(\forall \alpha \in E) \quad \left| \int_y^\omega f(x, \alpha) dx \right| \leq \varepsilon.$$

20.2. Утверждение (критерий Коши равномерной сходимости интеграла). *Несобственный интеграл* $I(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in E$ *в том и только в том случае, если*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y_0 \in [a, \omega))(\forall y_1 \geq y_0, y_1 < \omega)(\forall y_2 \geq y_0, y_2 < \omega)(\forall \alpha \in E) \quad \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x, \alpha) dx \right| \leq \varepsilon.$$

20.3. Для доказательства сходимости несобственного интеграла от положительной функции (или абсолютной равномерной сходимости несобственного интеграла) полезен формулируемый ниже признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла. Если существует заданная на промежутке $[a, \omega)$ функция $\varphi(x)$ такая, что $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$ для любых $\alpha \in E$ и x из некоторой окрестности точки ω , и интеграл $\int_a^\omega \varphi(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\omega |f(x, \alpha)| dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in E$.

В качестве мажоранты $\varphi(x)$ можно брать, например, функцию $\varphi(x) = \sup_{\alpha \in E} |f(x, \alpha)|$, особенно в тех случаях, когда супремум в правой части находится несложно.

20.4. Для исследования равномерной сходимости несобственного интеграла от знакопеременной функции можно использовать признаки Дирихле или Абеля.

Теорема. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^\omega f(x, \alpha)g(x, \alpha) dx \quad (20.1)$$

и допустим, что при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функция $f(x, \alpha)$ как функция от x монотонна. Предположим, что выполнены условия одной из следующих групп:

$$(D1) \quad \lim_{x \rightarrow \omega} f(x, \alpha) = 0 \text{ равномерно относительно } \alpha \in E;$$

$$(D2) \quad \text{существует такая константа } C > 0, \text{ что } \left| \int_a^b g(x, \alpha) dx \right| < C \text{ для любых } b \text{ из некоторой окрестности точки } \omega \text{ и любых } \alpha \in E;$$

либо

$$(A1) \quad \text{существует такая константа } M > 0, \text{ что } |f(x, \alpha)| < M \text{ для любых } \alpha \in E \text{ и } x \text{ из некоторой окрестности точки } \omega;$$

(A2) интеграл $\int_a^{\omega} g(x, \alpha) dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in E$.

Тогда интеграл (20.1) сходится равномерно относительно $\alpha \in E$.

Если выполнены условия (D1), (D2), то говорят о *признаке Дирихле*, а если (A1), (A2) — о *признаке Абеля*.

20.5. Пример. Исследуем равномерную сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} \alpha x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

на множестве $E = [0, 2]$.

Во-первых, констатируем, что подынтегральная функция положительна, значит, будем пытаться использовать признак Вейерштрасса. Для этого надо ограничить подынтегральную функцию сверху такой не зависящей от $\alpha \in [0, 2]$ функцией, интеграл от которой по промежутку $(0, 1)$ был бы сходящимся. В нашем интеграле одна особая точка 1. При $x \rightarrow 1$ имеем

$$\frac{x^\alpha \operatorname{arctg} \alpha x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{\operatorname{arctg} 2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Функция в правой части последнего неравенства не зависит от α , а интеграл от нее в особой точке 1 сходится, значит, наш интеграл в этой особой точке сходится равномерно относительно $\alpha \in [0, 2]$.

При использовании признака Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости интеграла для нахождения функции, не зависящей от параметра и мажорирующей подынтегральную функцию, можно попробовать найти наибольшее значение подынтегральной функции как функции от параметра, воспользовавшись обычным путем нахождения наибольшего значения с использованием производных. Если этим способом удастся воспользоваться, то мы получаем функцию от переменной интегрирования и нам остается только установить сходимость несобственного интеграла от нее.

20.6. Пример. Исследуем равномерную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \cos x^\alpha dx$$

на множествах $E_1 = (1, +\infty)$ и $E_2 = [\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 > 1$.

Прежде всего заметим, что подынтегральная функция знакопеременна, поэтому признак Вейерштрасса здесь неприменим. Будем ориентироваться на признак Абеля или признак Дирихле. Сначала сделаем замену переменной с тем, чтобы аргумент u косинуса стал переменной интегрирования, а именно положим $x^\alpha = z$, $x = z^{1/\alpha}$, $dx = \frac{1}{\alpha} z^{1/\alpha-1} dz$, переменная z будет изменяться в промежутке $[0, +\infty)$. Для краткости положим $1/\alpha - 1 = \beta$, при этом множествам E_1, E_2 изменения параметра α соответствуют множества $F_1 = (-1, 0)$, $(-1, \beta_0]$, где $\beta_0 = 1/\alpha_0 - 1 < 0$. Исходный интеграл станет таким:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} z^{1/\alpha-1} \cos z \, dz = (\beta + 1) \int_0^{+\infty} z^\beta \cos z \, dz.$$

Подынтегральная функция представлена в виде произведения двух функций, из которых $f(z) = z^\beta$ монотонна и при $\beta < 0$ имеет пределом 0 при $z \rightarrow +\infty$. Вместе с тем равномерной сходимости ее к нулю на множестве E_1 не будет. Это говорит о том, что нам не доведется воспользоваться признаком Дирихле, ибо не выполнены его условия, однако гарантировать отсутствие равномерной сходимости пока нельзя, и мы продолжим исследование. Заметим, что даже при больших z возможность сколь угодно близкого приближения к нулю величины β приводит к тому, что величина z^β может оказаться не малой, и есть шанс, воспользовавшись критерием Коши, доказать отсутствие равномерной сходимости интеграла на E_1 .

Попробуем оценить снизу интеграл $\int_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz$,

выбирая такие удаленные промежутки $[b_1, b_2]$, на которых косинус положителен. Ориентируясь на произвольное $b > 0$, возьмем (и фиксируем) $b_1, b_2 > b$ вида $b_1 = -\pi/4 + 2\pi n$, $b_2 = \pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. На каждом промежутке $[b_1, b_2]$ будет $\cos z \geq 1/\sqrt{2}$. Поскольку функция z^β , $z > 0$, при $\beta < 0$ убывает, ее значения на этом промежутке оцениваются снизу значением в правом конце промежутка: $z^\beta \geq (\pi/4 + 2\pi n)^\beta$. Следовательно, весь интеграл можно оценить так:

$$\int_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz \geq (\pi/4 + 2\pi n)^\beta \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot (\pi/2).$$

Поскольку $(\pi/4 + 2\pi n)^\beta \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 1$, найдется такое $\beta < 0$, что $(\pi/4 + 2\pi n)^\beta > 1/2$. Собирая все оценки, можно утверждать, что

$$\int_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz \geq (1/2) \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot (\pi/2).$$

Взяв в качестве требуемого $\varepsilon > 0$ в отрицании критерия Коши число, стоящее в правой части последней оценки, придем к выводу об отсутствии равномерной сходимости интеграла на множестве E_1 .

На множестве E_2 невозможно сколь угодно близко подойти к единице, поэтому $\lim_{z \rightarrow +\infty} z^\beta = 0$ равномерно относительно $\beta \in (-1, \beta_0]$, а первообразная от функции $\cos z$ очевидно ограничена. Тем самым выполнены все условия признака Дирихле и наш интеграл сходится на множестве E_2 равномерно.

20.7. Задачи. Исследовать равномерную сходимость следующих несобственных интегралов на указанных множествах:

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^4} \, dx, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0, +\infty);$$

$$(2) \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty), \quad \alpha_0 > 1; \quad E_2 = (1, +\infty);$$

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos 2x \, dx, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0, +\infty);$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{4 + x^2} \, dx, \quad E = \mathbb{R}; \quad (5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} \, dx, \quad E = [0, +\infty);$$

$$(6) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} e^{-\alpha x} \, dx, \quad E = [0, +\infty);$$

$$(7) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x^5}{x} \, dx, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0, +\infty);$$

- (8) $\int_0^{+\infty} \cos \alpha x^2 dx, \quad E = [1, +\infty);$
- (9) $\int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, \quad E_1 = [0, 2], \quad E_2 = [0, +\infty);$
- (10) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4} dx, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0, +\infty);$
- (11) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha} dx, \quad E = [0, +\infty);$ (12) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+x^\alpha} dx, \quad E = (0, +\infty);$
- (13) $\int_0^{2\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx, \quad E = [0, 1);$ (14) $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^3} e^{-\alpha/(2x^2)} dx, \quad E = [1, +\infty);$
- (15) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} \frac{dx}{4+\alpha^2 x^2}, \quad E = \mathbb{R};$
- (16) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx, \quad E = (-\infty, -1/2).$

20.8. Свойства несобственного интеграла как функции от параметра регламентируются следующими утверждениями.

Утверждение 1 (предельный переход в несобственном интеграле). Пусть функция $f(x, \alpha)$ при каждом $\alpha \in A$ интегрируема (в собственном смысле) как функция от x на каждом промежутке $[a, b]$, где $a < b < \omega$, и в каждом таком промежутке при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ равномерно относительно x сходится к функции $g(x)$. Если, кроме того, интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^\omega f(\alpha, x) dx$$

сходится равномерно относительно α из некоторой окрестности точки α_0 , то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^\omega f(\alpha, x) dx = \int_a^\omega \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(\alpha, x) dx. \quad (20.2)$$

Утверждение 2 (непрерывность). Пусть функция $f(x, \alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a, \omega)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, и пусть интеграл $I(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда функция $I(\alpha)$ непрерывна на (α_1, α_2) .

Утверждение 3 (дифференцируемость). Пусть функции $f(x, \alpha)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ непрерывны как функции двух переменных $x \in [a, \omega)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, интеграл $I(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится при каждом $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ и интеграл $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда существует производная $I'(\alpha)$, которую можно найти по формуле

$$I'(\alpha) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx.$$

Утверждение 4 (интегрируемость). Пусть функция $f(x, \alpha)$ непрерывна при $a \leq x < \omega$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ и интеграл $I(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Тогда имеет место формула

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^\omega f(x, \alpha) dx \right) d\alpha = \int_a^\omega \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx. \quad (20.3)$$

Если $f(x, \alpha) \geq 0$ при $x \in [a, \omega)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, то формула (20.3) остается справедливой в предположении, что внутренние интегралы в равенстве (20.3) являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей равенства (20.3) имеет смысл.

20.9. Задачи. 1. Исследовать на непрерывность следующие функции на указанных множествах:

$$(1) \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad E = [0, +\infty);$$

$$(2) \quad I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \quad E = (0, +\infty);$$

$$(3) \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x^2} dx, \quad E = \mathbb{R};$$

$$(4) \quad I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx, \quad E = (0, 2).$$

2. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx?$$

3. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0).$$

5. С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы:

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$$

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1); \quad (4) \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1);$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx; \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx.$$

6. Пользуясь формулой $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$, вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}},$$

где n — натуральное число.

7. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ имеет смысл при любом $A > 0$.

8. Пользуясь формулой Фруллани, вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

9. Вычислить интеграл Эйлера — Пуассона

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

исходя из формулы

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy.$$

10. Пользуясь интегралом Эйлера — Пуассона, найти интегралы:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0); \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx \quad (a > 0);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2/x^2)} dx \quad (a > 0); \quad (4) \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

11. Исходя из интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geq 0),$$

вычислить *интеграл Дирихле*

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

12. Используя интегралы Дирихле и Фрулани, найти величины интегралов:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx.$$

13. Вычислить *интеграл Лапласа*

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

14. Вычислить интеграл

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx.$$

15. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x > 0),$$

вычислить интегралы Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

16. Найти величины интегралов:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \quad (a \neq 0); \quad (4) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax dx;$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx \quad (\beta > \alpha > 0);$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x}{x} dx \quad (\alpha > 0);$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \operatorname{arctg} \beta x}{x(1 + \beta^2 x^2)} dx; \quad (8) \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx \quad (|\alpha| \leq 1);$$

$$(9) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \operatorname{arctg} \beta x}{x^3} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \cdot \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

20.10. Ответы. 20.7. (1) Равномерно на E_1 , неравномерно на E_2 ; (2) равномерно на E_1 , неравномерно на E_2 ; (3) равномерно на E_1 , неравномерно на E_2 ; (4) равномерно; (5) равномерно; (6) равномерно; (7) равномерно на E_1 , неравномерно на E_2 ; (8) равномерно; (9) равномерно на

E_1 , неравномерно на E_2 ; (10) равномерно на E_1 , неравномерно на E_2 ; (11) равномерно; (12) равномерно; (13) неравномерно; (14) неравномерно; (15) равномерно; (16) неравномерно.

20.9. 1. (1) Непрерывна; (2) непрерывна; (3) непрерывна при $\alpha \neq 0$, при $\alpha = 0$ разрывна; (4) непрерывна. **2.** Нет. **5.** (1) $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$; (2) $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}$; (3) $-\pi(1 - \sqrt{1 - \alpha^2})$; (4) $\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}$; (5) $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha (1 + |\alpha| - \sqrt{1 + \alpha^2})$; (6) $\frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$, $\beta \neq 0$. **6.** $\frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+1/2)}$. **8.** $\ln \frac{b}{a}$. **9.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **10.** (1) $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-(ac-b^2)}$; (2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{b^2/4a}$; (3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$; (4) $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}$. **11.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta$. **12.** (1) $\pi \frac{|\beta|}{2} - \sqrt{\pi \alpha}$; (2) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right|$; (3) 0, если $|\alpha| < |\beta|$; $\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \alpha$, если $|\alpha| = |\beta|$; $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$, если $|\alpha| > |\beta|$; (4) $\frac{\pi}{2} |\alpha|$. **13.** $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$. **14.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha e^{-|\alpha|}$. **15.** $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **16.** (1) $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2})$; (2) $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4} e^{-|\alpha|}$; (3) $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} a \right)$; (4) $\sqrt{\pi} \cos \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$; (5) $\frac{(\beta - \alpha)\pi}{2}$; (6) $\frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \right)$; (7) $2\pi((\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta)$; (8) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos \alpha)^2}{2}$; (9) $\frac{\pi}{2} ((\alpha^2 - \beta^2) \ln(\alpha + \beta) - \alpha^2 \ln \alpha + \beta^2 \ln \beta + \alpha\beta)$; (10) $\frac{2\pi}{3} (\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta))$.

§ 21. Интегралы Эйлера

21.1. Под *интегралами Эйлера* понимают следующие функции:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt; \quad \text{В}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

называемые соответственно *гамма-функцией* и *бета-функцией*.

Ясно, что гамма-функция определена при $x > 0$, а бета-функция — при $x > 0$, $y > 0$.

Интегралы Эйлера обладают рядом замечательных свойств, что ставит их в один ряд с широко известными элементарными функциями. Нахождение некоторых несобственных интегралов сводится к их выражению через гамма- и бета-функции, и такое сведение можно считать окончательным результатом при их вычислении.

Перечислим основные формулы, связанные с эйлеровыми интегралами:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (21.1)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad (21.2)$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad (21.3)$$

$$B(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \quad (21.4)$$

Кроме того, следует отметить, что эйлеровы интегралы бесконечно дифференцируемы на своей области определения и их производные могут быть найдены путем внесения операции дифференцирования под знак интеграла.

21.2. При сведении данного интеграла к гамма-функции или бета-функции выбор функции, к которой будет сводиться данный интеграл, зависит от вида подынтегральной функции. Сформулируем несколько соображений по такому выбору.

Если в подынтегральном выражении есть фрагмент, из которого может получиться (после замены) множитель e^{-t} (обычно это связано с присутствием в подынтегральной функции экспоненты или логарифма), то надо обеспечить заменой множитель e^{-t} , и если пределы интегрирования соответствуют таковым в гамма-функции, то сводить к ней. Если указанного фрагмента нет, то надо пытаться сводить к бета-функции.

При сведении к бета-функции надо (заменой) добиться того, чтобы в подынтегральной функции стояло выражение $(1-t)$, где t — переменная интегрирования. Затем проследить за пределами интегрирования.

21.3. Задачи. 1. Определить области существования и выразить через гамма-функцию и бета-функцию следующие интегралы:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx \quad (n > 0);$	(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx;$
(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx;$	(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m > 0);$
(5) $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx \quad (n > 0);$	(6) $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0);$
(7) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx;$	(8) $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0);$

$$(9) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx;$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} dx, \quad (a, b, n > 0).$$

2. Используя значения интегралов Эйлера, вычислить следующие интегралы:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(x+2)} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln^2 x}{1+x^2} dx \quad (|\alpha| < 1);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx;$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx.$$

21.4. Ответы. 21.3. 1. (1) $\frac{\pi}{n \sin(m\pi/n)}$, $0 < m < n$; (2) $B(n-m, m)$, $0 < m < n$; (3) $\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2})$, $m > -1$, $n > -1$; (4) $\frac{1}{m}B(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n})$, $n < 0$ или $n > 1$; (5) $\frac{1}{|n|}\Gamma(\frac{m+1}{n})$, $\frac{m+1}{n} > 0$; (6) $\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})$, $n > 0$; (7) $\Gamma(p+1)$, $p > -1$; (8) $\frac{d}{dp}(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}})$, $p > -1$; (9) $-\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$, $0 < p < 1$; (10) $\frac{a^{-p}}{n}(\frac{a}{b})^{(m+1)/n}B(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n})$, $0 < \frac{m+1}{n} < p$. **2.** (1) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; (2) $\frac{\pi 2^{2/3}}{3}(\sqrt{3} \ln 2 + \pi)$; (3) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-5)(3n-2)}{3^n n!}$; (4) $\frac{\pi^3}{8} \frac{1 + \sin^2(\alpha\pi/2)}{\cos^3(\alpha\pi/2)}$; (5) $\frac{2\pi^2}{27}$; (6) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$.

nd