§ 18. Степенные ряды

18.1. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{18.1}$$

где c_n — числовая последовательность, $a \in \mathbb{R}$ — фиксированное число, а $z \in \mathbb{R}$, называют *степенным рядом* с коэффициентами c_n.

Выполнив замену переменных $z - a = x$ в ряде (18.1), получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{18.2}$$

свойства которого равносильны свойствам ряда (18.1). Мы приведем все необходимые утверждения для ряда (18.2), их переформулировки для ряда (18.1) очевидны и могут быть сделаны читателем самостоятельно.

18.2. Утверждение 1. *Если степенной ряд* (18.2) *сходится при некотором* $x_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится при любом таком* x, *что* $|x| < |x_0|$, *а если он расходится при некотором* $x_1 \neq 0$, *то будет расходящимся при любом таком* x, *что* $|x| > |x_1|$.

Утверждение 2. *Для любого степенного ряда* (18.2) *существует такое число* $R \geq 0$ (*возможно,* $R = +\infty$), *что ряд* (18.2) *абсолютно сходится в интервале* $(-R, R)$, *если* $R \neq 0$. *Этот интервал называют интервалом сходимости ряда* (18.2).

Если $R = 0$, *то ряд* (18.2) *сходится в одной точке* $x = 0$.

Если $R > 0$, *то для любого* $R_1 \in (0, R)$ *ряд* (18.2) *сходится абсолютно и равномерно на сегменте* $[-R_1, R_1]$.

Утверждение 3. *Если* R — *радиус сходимости степенного ряда* (18.2), *причем* $0 < R < +\infty$, *и этот ряд сходится в точке* R, *то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$ *и его сумма непрерывна на этом отрезке.*

Утверждение 4. *Радиус сходимости* R *степенного ряда* (18.2) *может быть найден по формуле*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, *то*

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

18.3. Задачи. Найти радиус сходимости и интервал сходимости степенных рядов, исследовать их на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n(x+2)^n$; **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n},\quad a>0,\ b>0$; **(4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!}x^n$.

18.4. Пусть f — бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция. Степенной ряд

$$f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{18.3}$$

называют *рядом Тейлора* функции f.

Если $x_0=0$, то ряд (18.3) называют *рядом Маклорена*.

Сходимость ряда Тейлора к значению функции f в точке x зависит от свойств функции f и может быть проанализирована путем изучения сходимости к нулю остатка в формуле Тейлора. Нас здесь будут интересовать разложения в ряд Тейлора конкретных функций.

18.5. При разложении в ряд Тейлора (или Маклорена) полезно помнить следующие разложения (в которых для удобства записи полагаем $0^0=1$):

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.4}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.5}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.6}$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.7}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{18.8}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1,1), \tag{18.9}$$

$$\begin{gathered} \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1,1), \\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1,1], \end{gathered} \tag{18.10}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1]. \tag{18.11}$$

18.6. Задачи. Используя формулы п. 18.5, разложить следующие функции в ряд Маклорена и найти радиусы сходимости полученных рядов:

(1) $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$; **(2)** $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}$;

(3) $(1+x)e^{-x}$; **(4)** $(1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

(5) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$; **(6)** $\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$;

(7) $\cos^2 x$; **(8)** $\sin^3 x$.

18.7. Поскольку степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, составленный из производных данного ряда, сходятся равномерно на каждом замкнутом промежутке, содержащемся внутри интервала сходимости данного ряда, функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дифференцируема в этом интервале и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Указанное обстоятельство можно использовать при разложении функции в ряд Тейлора: сначала продифференцировать или проинтегрировать ее, результат разложить в ряд, а затем вернуться к исходной функции.

18.8. Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}.$$

Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Разложим производную в ряд, используя разложение (18.9):

$$-\frac{1}{1+x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C. \qquad (18.12)$$

Для нахождения константы C подставим в (18.12) значение $x = 0$. Получим $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 = C$. Подставив найденное значение константы в равенство (18.12), приходим к искомому разложению.

18.9. Задачи. 1. Разложить в ряд Маклорена следующие функции и найти радиусы сходимости рядов:

(1) $\operatorname{arctg} \frac{2x-3}{x+6}$; **(2)** $\operatorname{arctg} \frac{2+x^2}{2-x^2}$;

(3) $\operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$; **(4)** $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;

(5) $x \ln(x + \sqrt{x^2+2})$; **(6)** $\ln(x^3 + \sqrt{9+x^6})$;

2. Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots.$$

3. Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

6. Вычислить сумму ряда:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; **(2)** $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$;

18.10. Ответы. 18.3. (1) $R=1$, $0<x<2$, при $x=0$ и $x=2$ абсолютно расходится; (2) $R=e$, $-e<x<e$, при $x=\pm e$ расходится; (3) $R=\max(a,b)$, $-R<x<R$, при $x=\pm R$ расходится; (4) $R=1$, $-1<x<1$, при $x=-1$ сходится абсолютно, если $a\geq 0$, и расходится, если $a<0$, при $x=1$ сходится абсолютно, если $a\geq 0$, и условно, если $-1<a<0$.

18.6. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{n+2}$, $R=1$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n}$, $R=1$; (3) $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$, $R=\infty$; (4) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$, $R=1$; (5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}((-1)^{n+1}-3^{-(n+1)})x^n$, $R=1$; (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{-(n+1)}+3^{-(n+1)})x^n$, $R=2$; (7) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=\infty$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R=\infty$.

18.9. 1. (1) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$, $R=3$; (2) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}$, $R=\sqrt{2}$; (3) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}x^{2n-1}$, $R=1$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$; (5) $x\ln\sqrt{2}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1/2}}\cdot\frac{(2n03)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n-1}$, $R=\sqrt{2}$; (6) $\ln 3+\frac{x^3}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!3^{2n+1}(2n+1)}x^{6n+3}$, $R=\sqrt[3]{3}$.

4. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. **5.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

6. (1) x, $x>0$; (2) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.

§ 19. Интеграл Римана, зависящий от параметра

19.1. Пусть дана функция $f(x,\alpha)$, $\alpha\in A\subset\mathbb{R}$, $x\in[a,b]$, интегрируемая на $[a,b]$ как функция от x при каждом фиксированном $\alpha\in A$. Предположим, что f как функция от α непрерывна, или дифференцируема, или интегрируема на A при каждом фиксированном $x\in[a,b]$. Будет ли имеющееся у f свойство наследоваться функцией

$$I(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx,$$

представляющей собой интеграл, зависящий от параметра α?

19.2. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ при каждом фиксированном $\alpha\in A$ интегрируема на $[a,b]$ как функция от x и при $\alpha\to\alpha_0$*

сходится равномерно относительно $x \in [a,b]$ к предельной функции $g(x)$. Тогда g интегрируема на $[a,b]$ и имеет место равенство

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx. \quad (19.1)$$

19.3. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непрерывна на промежутке $[c,d]$.*

19.4. Утверждение. *Пусть функции $f(x,\alpha)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны как функции двух переменных $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непрерывно дифференцируема в каждой точке $\alpha \in [c,d]$ и*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx. \quad (19.2)$$

19.5. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ интегрируема на промежутке $[c,d]$ и*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx.$$

19.6. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную по α в прямоугольнике $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, и пусть дифференцируемые на $[c,d]$ функции φ,ψ таковы, что $a \le \varphi(\alpha), \psi(\alpha) \le b$, для всех $\alpha \in [c,d]$. Тогда функция*

$$I(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

дифференцируема и имеет место равенство

$$I'(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx + \psi'(\alpha) f(\psi(\alpha), \alpha) - \varphi'(\alpha) f(\varphi(\alpha), \alpha). \qquad (19.3)$$

19.7. Сформулированные выше утверждения используют для установления непрерывной зависимости интегралов от параметра, а также для нахождения самих интегралов. Последнее делается, например, так. Если, продифференцировав интеграл по параметру, мы сумели вычислить полученный интеграл, то тем самым приходим к дифференциальному уравнению относительно искомого интеграла как функции от параметра. Решая его, мы находим исходный интеграл.

19.8. Задачи.

1. С помощью дифференцирования интеграла $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру α, где $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

2. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

(1) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\,dx$; **(2)** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$.

3. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \quad (a > 0,\ b > 0).$$

4*. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad 0 < a < b.$$

19.9. Ответы. 19.8. 1. $\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} + \frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$. **2.** (1) $\pi \ln\frac{|a|+|b|}{2}$; (2) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} a \ln(1+|a|)$. **3.** $\ln\frac{b+1}{a+1}$. **4.** $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$.

20.8. Свойства несобственного интеграла как функции от параметра регламентируются следующими утверждениями.

Утверждение 1 (предельный переход в несобственном интеграле). *Пусть функция $f(x,\alpha)$ при каждом $\alpha \in A$ интегрируема (в собственном смысле) как функция от x на каждом промежутке $[a,b]$, где $a < b < \omega$, и в каждом таком промежутке при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно относительно x сходится к функции $g(x)$. Если, кроме того, интеграл*

$$I(\alpha) = \int\limits_a^\omega f(\alpha, x)\,dx$$

сходится равномерно относительно α из некоторой окрестности точки α_0, то

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_a^\omega f(\alpha, x)\,dx = \int\limits_a^\omega \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha, x)\,dx. \tag{20.2}$$

Утверждение 2 (непрерывность). *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a,\omega)$, $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$, и пусть интеграл $I(\alpha) = \int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$. Тогда функция $I(\alpha)$ непрерывна на (α_1,α_2).*

Утверждение 3 (дифференцируемость). *Пусть функции $f(x,\alpha)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны как функции двух переменных $x \in [a,\omega)$, $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$, интеграл $I(\alpha) = \int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx$ сходится при каждом $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$ и интеграл $\int\limits_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$. Тогда существует производная $I'(\alpha)$, которую можно найти по формуле*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx.$$

Утверждение 4 (интегрируемость). *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна при $a \le x < \omega$, $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ и интеграл $I(\alpha) = \int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha = \int\limits_a^\omega \left(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx. \qquad (20.3)$$

Если $f(x,\alpha) \ge 0$ при $x \in [a,\omega)$, $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$, то формула (20.3) *остается справедливой в предположении, что внутренние интегралы в равенстве* (20.3) *являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей равенства* (20.3) *имеет смысл.*

20.9. Задачи.

1. С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы:

(1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$; **(2)** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

(3) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $(|\alpha| \le 1)$; **(4)** $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $(|\alpha| \le 1)$.

2. Вычислить интеграл Эйлера — Пуассона

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

исходя из формулы

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}\,dy.$$

3. Пользуясь интегралом Эйлера — Пуассона, найти интегралы:

(1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a > 0)$; **(2)** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2/x^2)}\,dx \quad (a > 0)$.

4. Исходя из интеграла

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \ge 0),$$

вычислить *интеграл Дирихле*

$$D(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx.$$

5. Вычислить *интеграл Лапласа*

$$L = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\, dx.$$

6. Вычислить интеграл

$$L_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx.$$

7. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy \quad (x > 0),$$

вычислить *интегралы Френеля*

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

8^***.** Найти величины интегралов:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1 + x^2}\, dx$; **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1 + x^2)^2}\, dx$;

(3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c)\, dx \quad (a \neq 0)$; **(4)** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax\, dx$.

20.9. 1. 1. (1) $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$; (2) $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha (1 + |\alpha| - \sqrt{1 + \alpha^2})$; (3) $-\pi(1 - \sqrt{1 - \alpha^2})$; (4) $\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3.** (1) $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-(ac - b^2)/a}$; (2) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$. **4.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta$. **5.** $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$. **6.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha e^{-|\alpha|}$. **7.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **8.** (1) $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-2})$; (2) $\frac{\pi(1 + |\alpha|)}{4} e^{-|\alpha|}$; (3) $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin\bigl(\frac{ac - b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} a\bigr)$; (4) $\sqrt{\pi} \cos\bigl(a^2 + \frac{\pi}{4}\bigr)$.