2. Метод математической индукции. Множества и отображения

2.1. Метод математической индукции. Строение множества натуральных чисел порождает метод математической индукции доказательства утверждений, истинность которых зависит от натуральных чисел. Он состоит в следующем.

Предположим, что некоторое утверждение $P(n)$, справедливость которого зависит от натурального n, верно для первого натурального числа $n = 1$ и из того, что верно $P(n)$, следует, что верно $P(n+1)$. Принцип математической индукции гласит, что в таком случае утверждение $P(n)$ верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для использования метода математической индукции с целью доказательства некоторого утверждения $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, надо проверить $P(1)$, т. е. справедливость утверждения для первого натурального числа, а затем обосновать условное утверждение, так называемый индуктивный переход. А именно, предполагая справедливость утверждения для некоторого натурального числа n, доказать его выполнение для следующего натурального числа $n+1$. Разумеется, в процессе доказательства надо активно использовать индуктивное предположение, т. е. допущение справедливости $P(n)$. Если утверждение $P(n)$ надо доказывать не для всех натуральных n, а только начиная с некоторого натурального n_0, то в качестве базы индукции проверяется утверждение $P(n_0)$ и индуктивный переход обосновывается для $n \geqslant n_0$.

Пример 1. Доказать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Действительно, если $n = 1$, то сумма слева превращается в одно число 1, и справа имеем $1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6 = 1$, так что при $n = 1$ требуемое равенство верно. Предположим, что оно выполнено при некотором натуральном n, и докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Используя предположение, имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции требуемое равенство будет верным при любом натуральном n.

Упражнения.

1. Доказать равенства

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}. \tag{3}$$

2. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \; 0! = 1.$$

3. Доказать неравенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \ge 1, \tag{1}$$

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \ge 2. \tag{2}$$

2.2. Множества, отображения. Рассмотрим одно из самых употребимых в математике понятий, а именно понятие множества, познакомимся с простейшими операциями над множествами и простейшими связанными с множествами конструкциями.

В основе языка современной математики лежит понятие множества. Это первичное понятие математики, формируемое через создание единообразного представления о том, что такое множество. *Множеством* будем называть любой набор объектов, который можно рассматривать как единое целое, т. е. мыслить многие объекты как соединенные каким-либо признаком и образующие новый объект — множество, состоящее из данных объектов. Тем самым среди объектов какие-то в данном контексте считаются отдельными, неделимыми, а некоторые — множествами, состоящими из других объектов. Основное относящееся к понятию множества свойство — это полная определенность множества путем указания (каким-либо способом) всех составляющих его объектов. Если объект x входит в состав множества A, то говорят, что x — *элемент множества* A или x *принадлежит множеству* A, или A *включает* x, и это обстоятельство обозначают через $x \in A$ или $A \ni x$.

О каждых объекте x и множестве A можно с определенностью судить, является x элементом A или нет. Если x не элемент A, то будем писать $x \notin A$. Множество, не имеющее элементов, называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$.

Говорят, что *множество* A *содержится в множестве* B (или что A — *подмножество* B), и пишут $A \subset B$ (или $A \subseteq B$), если для любого $x \in A$ будет $x \in B$. Множества A, B *равны* ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$. Таким образом, равенство $A = B$ означает справедливость двух утверждений: если $x \in A$, то $x \in B$, и если $x \in B$, то $x \in A$.

Есть несколько способов задания множеств. Если множество небольшое, то его можно задать прямым указанием всех его элементов, при этом множество обозначается путем записи всех его элементов, ограниченной слева и справа фигурными скобками. Так, множество, элементами которого являются объекты x, y, обозначается через $\{x, y\}$ (или, что, разумеется, то же, $\{y, x\}$). Однако бывают множества, включающие столь много элементов, что перечислить их все не представляется возможным. Тогда используют какие-то другие способы описания множества. Самый распространенный — это указание свойства, которым должны обладать все элементы данного множества (и только они). Если A — некоторое множество, а $P(x)$ — свойство (т. е. повествовательное предложение, истинность которого зависит от выбора элемента x), то символом $\{x \in A : P(x)\}$ обозначают подмножество (т. е. часть) множества A, состоящее из всех $x \in A$, для которых $P(x)$ верно. В частности, при рассмотрении уравнений или неравенств свойство $P(x)$ обычно выражается в виде равенства или неравенства.

Если A, B — множества, то совокупность объектов x таких, что либо $x \in A$, либо $x \in B$, образует множество, называемое *объединением* множеств A, B и обозначаемое через $A \cup B$. Совокупность объектов x таких, что $x \in A$ и $x \in B$, называют *пересечением* множеств A и B и обозначают символом $A \cap B$. Множество $\{x \in A : x \notin B\}$ называют *дополнением множества B до множества A* (или разностью множеств A и B) и обозначают через $A \setminus B$. Множество $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ называют *симметрической разностью множеств A и B*. Кратко можно написать, что

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Особую роль играет множество, составленное с использованием двух объектов x, y следующим образом: $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Оно удовлетворяет условию, характеризующим упорядоченную пару, т. е. $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{s\}, \{s, t\}\}$ тогда и только тогда, когда $x = s$, $y = t$. Тем самым понятие упорядоченной пары уходит из разряда первичных понятий, каким оно было для нас ранее, и становится объектом, определяемым в рамках понятия множества. Разумеется, для составленной из двух объектов x и y упорядоченной пары будем использовать прежнее обозначение (x, y) и называть x ее первым, а y — втором элементом. Множество $A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ называют *прямым произведением множеств A, B*. Можно последовательно определить произведение $A_1 \times \cdots \times A_n$ множеств $A_1, \ldots, A_n$. Если $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то для произведения обычно используют символ A^n.

Взаимодействие основных отношений между множествами, а именно отношений принадлежности и включения, и операций над множествами приводит к появлению свойств, выраженных в виде включения или равенства множеств. Их обоснование осуществляется на основе определений включения и равенства. Доказывая включение вида $A \subset B$, мы должны проверить, что каждый элемент множества A является элементом множества B, т. е. для любого $x \in A$ показать, что $x \in B$. Для доказательства равенства $A = B$ требуется показать, что $A \subset B$ и $B \subset A$. Если предлагается доказать включение $A \subset B$ и добавляется, что оно строгое, то вместе с доказательством включения надо обосновать существование элемента множества B, не принадлежащего A.

Пример 1. Докажем равенство

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Начнем с доказательства включения

$$A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Будем проводить его путем расшифровки математической записи, задавая применительно к выражению вопрос «что это значит?» и давая на него ответ в терминах логических связок. Пусть $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Что это означает? Согласно определениям это означает, что $x \in A$ и $x \notin B \setminus C$, т. е. неверно, что $x \in B \setminus C$. Так как последнее включение означает, что $x \in B$ и $x \notin C$, его отрицание выглядит так: $x \notin B$ или $x \in C$. Тем самым получили, что $x \in A$ и ($x \notin B$ или $x \in C$), откуда можно сделать вывод, что ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \in C$), а это означает, что $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Требуемое включение доказано.

Установим обратное включение, т. е. докажем, что

$$A \setminus (B \setminus C) \supset (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Действительно, пусть $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Это значит, что $x \in A \setminus B$ или $x \in A \cap C$, откуда ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \in C$). В любом случае $x \in A$, а вместе с тем либо $x \notin B$, либо $x \in C$, что является отрицанием высказывания ($x \in B$ и $x \notin C$), иначе говоря, $x \notin B \setminus C$. В итоге $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Включение, а вместе с ним и равенство, доказаны.

В примере мы воспользовались по существу свойством, позволяющим раскрывать скобки в выражениях, содержащих логические операции конъюнкции и дизъюнкции. Напомним такие свойства, называемые *законами дистрибутивности*:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$$

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

Упражнения.

1. Приведите пример таких множеств A, B, C, что $A \in B$, $B \in C$, но $A \notin C$.

2. Приведите пример множеств A, B, C, D, E, удовлетворяющих одновременно следующим условиям: $A \subset B$, $B \in C$, $C \subset D$, $D \subset E$.

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C имеют место равенства

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$

2.3. Операции с участием отображений. Здесь речь пойдет о том, как теоретико-множественные операции выдерживают действие отображения, т. е., например, как связаны между собой образ объединения и объединение образов, прообраз пересечения и пересечение прообразов и т. п.

Множество

$$f[A] = \{f(x) : x \in A \subset D(f)\}$$

называют *образом множества* A, множество

$$f^{-1}[B] = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$$

— *прообразом множества* B *при отображении* f. (рис. 5.2).

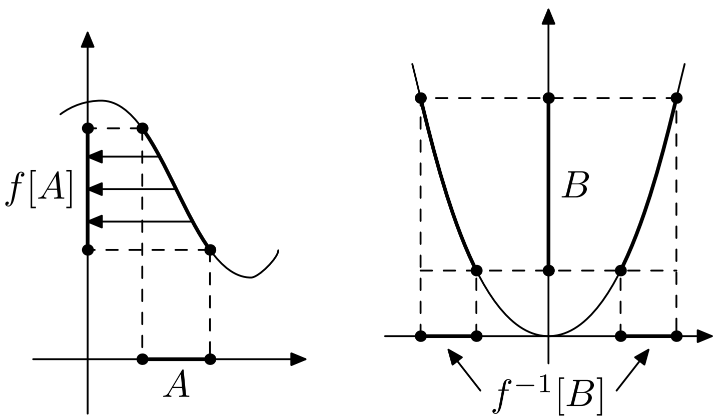

Рис. 5.2.

Ясно, что если в определении образа множества взять $A = D(f)$, то получим множество значений функции, а если в определении прообраза взять $B = E(f)$, то получим область определения функции.

Мы определили образ и прообраз множества как совокупность таких объектов, которые обладают определенным свойством, иначе говоря, как совокупность объектов, для которых справедливо некоторое высказывание, содержащее переменную. Свойство, характеризующее образ и прообраз, можно записать с использованием квантора существования, и такая запись обеспечивает методы нахождения образа и прообраза на основе их определений. А именно, для образа множества имеем

$$f[A] = \{y : (\exists x \in A)\ y = f(x)\}, \tag{1}$$

для прообраза —

$$f^{-1}[B] = \{x \in D(f) : (\exists y \in B)\ y = f(x)\}. \tag{2}$$

Согласно этой разновидности определения для нахождения образа множества, в частности, множества ее значений, надо, рассматривая равенство $y = f(x)$ как уравнение относительно x, выяснить, при каких y существует его решение, принадлежащее множеству A (для множества значений — безотносительно множества A). Для нахождения прообраза надо поступать симметрично, а именно, считая y неизвестной, выяснять, при каких x можно получать значения y, принадлежащие множеству B. Поскольку при задании функции, как правило, значение y выражается через x явно или по крайней мере с использованием конечного набора заданных формулами правил, технически надо всего лишь выяснять, при каких x выполнены условия, характеризующие множество B.

Пример 1. Докажем, что

$$f[f^{-1}[C]] = C.$$

Сначала уточним обстановку. Если в условии фигурирует выражение $f^{-1}[C]$, по умолчанию это указывает на то, что $C \subset E(f)$. Докажем включение $\subset$. Пусть $z \in f[f^{-1}[C]]$. Тогда согласно (1) существует такой $x \in f^{-1}[C]$, что $z = f(x)$. Включение $x \in f^{-1}[C]$ согласно (2) означает, что есть такое $y \in C$, для которого $y = f(x)$. Но f — отображение, поэтому $y = z$, следовательно, $z \in C$.

Докажем включение $\supset$. Пусть $z \in C$. Согласно (2) $f^{-1}[C]$ состоит из всех элементов множества $D(f)$, значение отображения f на которых является элементом множества C. В частности, для z есть такое $x \in f^{-1}[C]$, что $z = f(x)$, стало быть, согласно (1) $z \in f[f^{-1}[C]]$.

Упражнение. Пусть f — отображение и A, B — подмножества $D(f)$, а C, D — подмножества $E(f)$. Доказать соотношения

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B], \quad f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D], \quad f^{-1}[f[A]] \supset A.$$

Приложение: высказывания, кванторы

В математике мы часто встречаемся с высказываниями. Под высказыванием понимают повествовательное предложение, в котором что-то утверждается о каком-то объекте, и при этом можно судить, верно это утверждение или нет. Для высказывания вместо слова «верно» говорят также «истинно» «справедливо», «выполнено», «имеет место» и т. п., для не верного высказывания используют также термин «ложно».

Есть несколько способов получения новых высказываний на основе имеющихся. Ясно, что для каждого из них мы должны указать, в каких случаях новое высказывание будет истинным в зависимости от истинности имевшихся высказываний.

Можно получить новое высказывание, имея в распоряжении всего одно высказывание, а именно можно взять *отрицание* данного высказывания, т. е. если высказывание обозначить одной буквой, например P, то новое высказывание будет (не P). Символически высказывание (не P) или (неверно P) обозначают через $\neg P$.

Рассмотрим два высказывания, обозначим одно из них буквой P, а другое — буквой Q. Путем их соединения одним из союзов «и», «или» можно получить новые высказывания: (P и Q) и (P или Q) (в последнем вместо союза «или» используют иногда союз «либо»). Высказывание (P и Q) называют *конъюнкцией высказываний P и Q* и обозначают через $P \wedge Q$ или $P\&Q$. Высказывание (P или Q) называют *дизъюнкцией высказываний P и Q* и обозначают через $P \vee Q$.

Высказывание (P и Q) истинно, если оба высказывания P, Q истинны, и ложно при других раскладах. Высказывание (P или Q) истинно, если хотя бы одно из высказываний P, Q истинно, и ложно в одном случае — когда оба высказывания P, Q ложны.

Еще один способ получения нового высказывания из P, Q — это составление условного утверждения, а именно высказывания

$$\text{из } P \text{ следует } Q$$

или, иначе говоря,

$$\text{если (выполнено) } P, \text{ то (выполнено) } Q.$$

Это высказывание кратко обозначают так:

$$P \Rightarrow Q,$$

и называют *импликацией*.

Если $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, то высказывания P и Q называют *равносильными* или *эквивалентными* и используют при этом обозначение $P \Longleftrightarrow Q$. Два высказывания равносильны в том и только в том случае, если они оба либо истинны, либо ложны.

Импликацию $P \Rightarrow Q$ можно переформулировать иным способом, привлекая рассуждение «от противного»: предположим, что Q не верно, если при этом P также оказывается ложным, то считается, что верно высказывание $P \Rightarrow Q$. Иначе говоря, высказывание $P \Rightarrow Q$ равносильно высказыванию (не Q) $\Rightarrow$ (не P).

Импликация $P \Rightarrow Q$ ложна только в одном случае, когда P истинно, а Q ложно, в остальных случаях она истинна. Считать $P \Rightarrow Q$ ложной, если P истинно, а Q ложно, достаточно естественно — вряд ли мы согласимся, что из истинного утверждения, рассуждая корректно, можно получить ложное. Также естественно считать ее истинной, если P и Q оба истинны. Некоторую настороженность могут вызвать случаи, когда P ложно. Попробуем договориться так. Если Q истинно, то нам все равно, откуда оно могло бы следовать, так что импликацию $P \Rightarrow Q$ в этом случае будем считать истинной, даже если P ложно.

Осталась ситуация, когда P, Q оба ложны. Однако ввиду того, что импликация $P \Rightarrow Q$ равносильна импликации (не Q) $\Rightarrow$ (не P), в случае, когда оба P и Q ложны, их отрицания (не P) и (не Q) истинны. В таком случае импликацию (не Q) $\Rightarrow$ (не P) истинна, а вместе с ней истинной считаем и импликацию $P \Rightarrow Q$.

Информацию об истинности высказываний, составленных с использованием конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, в зависимости от истинности их составляющих удобно представить в виде таблицы, в которой 1 означает, что высказывание истинно, а 0 — что оно ложно:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

О равносильности составных высказываний можно судить по их таблицам истинности. А именно отличительной особенностью равносильных высказываний служит совпадение их таблиц истинности. Стало быть, если оказалось, что таблицы совпали, то такие высказывания равносильны.

Отрицание составных высказываний. Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ и } Q).$$

В нем говорится о том, что не выполнены утверждения P и Q одновременно, а это указывает на то, что по крайней мере одно из них не выполнено, т. е. не (P и Q) равносильно высказыванию ((не P) или (не Q)). Символически можно это записать так:

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ или } Q).$$

В нем говорится: не верно, что выполнено P или выполнено Q, т. е. оба высказывания P и Q не верны. Таким образом, не (P или Q) равносильно тому, что ((не P) и (не Q)). Символически:

$$\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Прежде чем заняться отрицанием импликации $P \Rightarrow Q$ сформируем равносильное ей высказывание с использованием дизъюнкции и отрицания и запишем отрицание импликации как отрицание такого высказывания. Когда мы считаем высказывание «если P, то Q» истинным? В случае, когда P не выполнено, нам безразлична справедливость Q, но если P верно, то Q должно быть также верным. Это можно сказать так: или P не верно, или Q верно, т. е. записать в виде дизъюнкции $\neg P \vee Q$. Легко убедиться в справедливости равносильности этой дизъюнкции и импликации $P \Longleftrightarrow Q$, написав таблицу истинности:

P	Q	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Теперь легко сформировать отрицание (не верно $P \Rightarrow Q$). Заменив $P \Rightarrow Q$ ему равносильным $\neg P \vee Q$ и взяв его отрицание, получим высказывание $P \wedge \neg Q$. Словесно его можно оформить так: неверно, что из P следует Q, означает, что P выполнено, а при этом Q — нет.

Высказывания с переменными. Кванторы. Высказывания могут быть такими, что их истинность зависит от выбора какого-то объекта (или нескольких объектов) из заданной совокупности объектов. В таком случае высказывание включает в себя некоторую букву (или несколько букв), на место которой (которых) можно подставлять разные объекты из данной совокупности, и тогда говорят, что рассматривается высказывание с переменной (переменными). При этом в результате подстановки каждого конкретного объекта мы должны получать высказывание без переменной, т. е. каждый раз должны иметь возможность судить, истинно высказывание для конкретного объекта или ложно.

С высказываниями с переменными связан важный способ образования новых высказываний (без переменных). Пусть дано высказывание $P(x)$, истинность которого зависит от объектов, обозначенных здесь буквой x и выбираемых из некоторого множества X. Из этого высказывания с переменной можно сделать новые высказывания, сообщив, при каких обстоятельствах относительно x будем рассматривать данное высказывание.

Одно из этих обстоятельств выражается фразами «для любого», «для каждого», «для всех» и приводит к новому высказыванию вида «(для любого $x \in X$) $P(x)$», которое читается обычно так: для любого (для каждого, для всех) x из X выполнено $P(x)$. Ясно, что словами эти фразы писать не всегда удобно, поэтому для их обозначения используют символ $\forall$, называемый *квантором общности*. О высказывании $(\forall x \in X)\ P(x)$ говорят, что переменная $x \in X$ в нем *связана квантором общности*.

Второе обстоятельство выражается словами «найдется», «существует», «можно подобрать» и т. п. и приводит к высказыванию вида «(существует $x \in X$) $P(x)$», читается так: существует x из X, для которого выполнено $P(x)$. Для обозначения слов «найдется», «существует» и т. п. используется символ $\exists$, который называют *квантором существования*. О высказывании $(\forall x \in X)\ P(x)$ говорят, что переменная $x \in X$ в нем *связывается квантором существования*.

Отрицание высказывания с кванторами. Разберемся в том, как брать отрицание высказываний с кванторами, Рассмотрим утверждение

вида
$$(\exists x \in X)\ P(x).$$
Его отрицание, т. е. утверждение
$$\text{не верно } ((\exists x \in X)\ P(x)),$$
можно проговорить так: не верно, что существует $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$. Но если не существует такого $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$, то для любого $x \in X$ должно выполняться отрицание высказывания $P(x)$, т. е. должно быть
$$(\text{для любого } x \in X) \quad \text{не верно } P(x)$$
или, символически,
$$(\text{не } (\exists x \in X)\ P(x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in X) \text{ не } P(x).$$
Что произошло? Квантор существования сменился квантором общности, а отрицание проникло вглубь утверждения и разместилось за квантором.

Теперь рассмотрим утверждение вида
$$(\forall x \in X)\ Q(x).$$
Его отрицание, т. е. утверждение
$$\text{не верно } ((\forall x \in X)\ Q(x)),$$
можно проговорить так: не верно, что для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, т. е. не для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, т. е. существует такое $x \in X$, для которого не выполнено $Q(x)$. Символически:
$$\text{не } ((\forall x \in X)\ Q(x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in X) \text{ не } Q(x).$$
Здесь квантор общности сменился квантором существования, а отрицание стало после квантора.

Последовательно применяя эти простейшие шаги к более сложным высказываниям с кванторами, можно легко получать их отрицания. Так, например,
$$\begin{aligned}
&\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow \forall C \text{ не } ((\forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X) \text{ не верно } f(x) \leqslant C \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C,
\end{aligned}$$

или, опуская промежуточные шаги,

$$\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C.$$

Знатоки могут отметить, что мы сначала указали свойство ограниченности сверху функции f на множестве X и в виде отрицания получили свойство неограниченности сверху функции f на множестве X.

Аксиомы. Утверждения. Необходимые и достаточные условия. Математика состоит из высказываний, истинность которых декларируется, и такие высказывания называют *аксиомами*, и высказываний, доказываемых на основе аксиом и уже доказанных высказываний с помощью логических рассуждений. Доказываемые высказывания называют *утверждениями*, и в зависимости от дополнительных обстоятельств используют другие слова для обозначения утверждений. Например, утверждение, носящее вспомогательный для данного контекста характер, называют леммой, а утверждение, в данном контексте фундаментальное, важное — теоремой, и т. д.

В математических утверждениях не встречается свободных, не связанных кванторами объектов. При этом есть договоренность, что если не указано явно, каким из кванторов связывается переменная, то считается, что она связана квантором общности.

Формулировки условных утверждений организуют обычно так. Сначала сообщают обстановку, в рамках которой будет происходить действие, т. е. указывают, какие объекты и при каких обстоятельствах рассматриваются. Затем дают условие, начиная фразу, например, словом «если». После того как условие записано, сообщают результат (вывод). Эта часть утверждения начинается, например, словом «то». Описание обстановки можно вынести за рамки утверждения, однако при изучении и использовании данного утверждения всегда надо иметь в виду обстановку, в которой оно формулируется. Такая организация в явном виде встречается не всегда, есть и другие способы выражения условного утверждения, но эта наиболее прозрачна и требует минимума усилий при раскодировании содержания утверждения.

Поговорим о том, как в русском (математическом) языке оформляется импликация $P \Rightarrow Q$. Два варианта такого оформления мы уже встретили при ее определении:

из P следует Q

и

если (выполнено) P, то (выполнено) Q.

Но этим языковое богатство для импликации не исчерпывается. Оставшиеся три способа, которые мы обсудим, не столь прозрачные, и мы остановимся на них подробнее, ибо они поначалу вызывают определенные трудности.

Один из способов связан со словами о необходимых и достаточных условиях. А именно, о высказывании (если P, то Q) говорят:

для (выполнения) P необходимо (выполнение) Q,

и в этом контексте утверждение Q называют *необходимым условием* выполнения P.

Почему импликацию «из P следует Q» выражают таким словосочетанием? Это несколько непривычное выражение можно легко понять, если заметить, что слово «необходимо» здесь означает «не обходимо», т. е. «нельзя обойти», т. е. «обязательно будет выполнено», т. е. если выполнено утверждение P, то нельзя обойти выполнение утверждения Q, оно также будет выполнено, т. е. из P следует Q.

То же самое утверждение «из P следует Q» выражают и так: «для выполнения Q достаточно выполнения P», и высказывание P называют *достаточным условием* для Q.

Еще один способ выразить утверждение (если P, то Q) таков: Q выполнено тогда, когда выполнено P, и это словосочетание довольно естественно. Менее естественно, к чему просто надо привыкнуть, такое словосочетание: P выполнено только тогда, когда выполнено Q.

Наконец, (если P, то Q) выражают так: Q выполнено в том случае, если (или когда) выполнено P, и двойственным образом: P выполнено только в том случае, если (или когда) выполнено Q.

Важно понимать суть и значение необходимых условий. Допустим, что мы интересуемся утверждением P и хотим узнать, справедливо ли оно, но пока располагаем лишь утверждением типа «из P следует Q». Можно ли исходя из этого утверждения выяснить, выполнено ли P? Конечно, нет. Дело в том, что в утверждении «из P следует Q» интересующее нас утверждение P стоит в условии, на месте предположения, а не в результате, не на месте вывода, т. е. нам известно, что **в предположении справедливости** P будет выполнено какое-то заключение, обозначенное нами символом Q. Исходя из этого невозможно сделать какое-либо заключение о справедливости P.

Тем не менее утверждение типа «из P следует Q», или «для выполнения P необходимо выполнение Q», какую-то информацию об утверждении P сообщает. Действительно, перепишем его в виде «если не выполнено Q, то не выполнено P» и заметим, что мы тем самым получаем возможность выяснить, когда же P **не выполнено**, т. е. при каких обстоятельствах не надо интересоваться справедливостью P — это произойдет в том случае, если не выполнено Q. Отсюда можно сделать вывод о том, что ожидать выполнения P можно лишь среди объектов, для которых выполнено Q. Те объекты, на которых Q не выполняется, можно не рассматривать, ибо на них P заведомо не выполняется.

В отличие от необходимых, достаточные условия гарантируют выполнение интересующего нас свойства — их и называют достаточными потому, что их проверки вполне хватает для выполнения требуемого свойства. Однако прежде чем применить достаточные условия, сначала следует учесть необходимые условия с тем, чтобы достаточные применять только там, где выполнены условия необходимые.

Рассмотрим пример. Допустим, мы интересуемся, будет ли точка x из интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ точкой экстремума дифференцируемой на (a, b) функции f. Если никакой информации о возможности экстремума в данной точке нет, то задача неподъемная — не исследовать же все точки из (a, b), их слишком много, времени не хватит. Помогает необходимое условие: для того чтобы точка x была точкой экстремума функции f, необходимо, чтобы ее производная в этой точке обращалась в нуль, т. е. чтобы было выполнено равенство $f'(x) = 0$. Иначе это можно сформулировать так: если x — точка экстремума функции f на (a, b), то $f'(x) = 0$. Это утверждение, сформулированное в виде: если $f'(x) \neq 0$, то x — не точка экстремума, подсказывает нам, что если $f'(x) \neq 0$, то на предмет наличия экстремума такую точку исследовать не надо — в ней экстремума нет! Следовательно, исследованию подлежат только те точки, где $f'(x) = 0$, а их, как правило, не очень много, и задача становится обозримой. Какими средствами изучать те точки, где $f'(x) = 0$, это уже другой вопрос, как правило, к ним применяют достаточное условие экстремума.

Свойство, признак, критерий. Прямое и обратное утверждения. Для условного утверждения «если выполнено P, то выполнено Q» в зависимости от ситуации употребляются следующие названия. Допустим, что мы интересуемся справедливостью утверждения Q, тогда P называют *признаком* выполнения Q. Если же у нас есть P и мы интересуемся, что из этого можно получить, то высказывание Q называют *свойством* P. Например, в утверждении «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны» высказывание Q=«углы при основании равны» является свойством высказывания P=«данный треугольник равнобедренный». Если же мы интересуемся высказыванием Q=«данный треугольник равнобедренный» и имеем в распоряжении высказывание P=«два угла треугольника равны между собой», то оно служит признаком равнобедренности, так как имеет место утверждение «если два угла треугольника равны между собой, то треугольник равнобедренный»,

Если у нас есть некое высказывание P и мы установили эквивалентность «P равносильно Q», то Q называют *критерием* P. Например, если посмотреть на приведенный пример с точки зрения такой формулировки: «равнобедренность треугольника равносильна тому, что два его угла равны между собой», то равенство углов оказывается критерием равнобедренности треугольника.

Пусть даны утверждения P и Q. Из них можно составить два условных утверждения, а именно «если верно P, то верно Q» и «если верно Q, то верно P» или, иными словами, «из P следует Q» и «из Q следует P». Считая одно из них данным, говорят «прямым», другое называют к нему *обратным.* Например, если утверждение

$$\text{из } P \text{ следует } Q$$

данное (прямое), то утверждение

$$\text{из } Q \text{ следует } P$$

к нему обратное.

Обратим внимание на то, как оформляется в доказательстве равносильности каких-то утверждений переход к доказательству обратного утверждения. Это в некоторой мере зависит от того, в какой манере дана формулировка. Так, если в утверждении написано, что для выполнения P необходимо и достаточно выполнения Q, и доказана необходимость, т. е. «если выполнено P, то выполнено Q», далее говорят: «докажем достаточность», имея в виду, что теперь будет доказываться импликация «из Q следует P».

Если утверждение сформулировано так: «высказывание P выполняется тогда и только тогда, когда выполнено Q», и доказано прямое (в данном контексте) утверждение, т. е. что из P следует Q, и теперь переходим к доказательству обратного утверждения, то этот момент оформляется так: «обратно, пусть выполнено Q, докажем выполнение P». Используемое в этой ситуации слово «обратно» как признак начала доказательства обратного утверждения иногда заменяют словом «наоборот», здесь совершенно неуместным: слово «обратно» указывает на начало доказательства обратного, а не «наоборотного» утверждения.

Может возникнуть вопрос: как связаны между собой прямое и обратное утверждения в плане их справедливости? Ответ простой: никак. Поэтому если вместо требуемого утверждения предлагают обратное к нему, это грубая ошибка, встречающаяся, в частности, при формулировке теоремы о необходимых условиях экстремума, особенно в стиле, использующем именно слово «необходимо».