

## § 22. Двойной интеграл

**22.1.** Мы будем заниматься приобретением навыков по нахождению двойных, а затем и тройных интегралов. Нас не будет интересовать общность теоретической поддержки, за этим можно обратиться к соответствующим теоретическим руководствам. Поэтому мы будем рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутой области в  $\mathbb{R}^2$  (т. е. на таком замкнутом множестве, которое совпадает с замыканием своей внутренности). Можно допустить и кусочно непрерывные функции, устроенные так, что их область определения можно представить в виде объединения замкнутых областей, внутренности которых не пересекаются, на внутренности каждой из которых функция непрерывна.

**22.2. Определение двойного интеграла.** Пусть  $f(x, y)$  — непрерывная функция, заданная на замкнутой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Напомним конструкцию двойного интеграла (по Риману). Берется разбиение области  $\Omega$  на такие множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ , каждое из которых имеет площадь (т. е. измеримо по мере Жордана). Затем в каждом из  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , берется по точке  $(x_i, y_i)$  и составляется *интегральная сумма*

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) m(\Omega_i), \quad (22.1)$$

где  $m(\Omega_i)$  — площадь множества  $\Omega_i$ . Если при рассмотрении разбиений таких, что наибольшая из площадей составляющих эти разбиения множеств неограниченно уменьшается, суммы приближаются к некоторому числу, то его и считают интегралом от  $f$  по множеству  $\Omega$ .

**Определение.** Число  $I$  называют (*двойным*) *интегралом* от функции  $f$  по множеству  $\Omega$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $\Omega$  на множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ , у которого  $\max_{i=1, \dots, n} m(\Omega_i) < \delta$ , и любого выбора точек  $(x_i, y_i) \in \Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \quad (22.2)$$

Интеграл от  $f$  по множеству  $\Omega$  обозначается обычно символом

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

В этом обозначении фрагмент  $dxdy$  указывает на то, что в основе измерения взята площадь прямоугольника как произведение длин его сторон.

**22.3. Линейность интеграла.** Двойной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на  $\Omega$  функций  $f, g$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dxdy = \alpha \iint_{\Omega} f(x, y) dxdy + \beta \iint_{\Omega} g(x, y) dxdy \quad (22.3)$$

**22.4. Аддитивность интеграла.** При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если  $D_1, \dots, D_k$  — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ , то

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) dxdy.$$

**22.5. Повторный интеграл.** Пусть  $\Omega_1$  — проекция  $\Omega$  на ось абсцисс, а  $\Omega_2$  — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем  $x \in \Omega_1$ , и пусть  $\Omega_x$  — сечение  $\Omega$  на уровне  $x$ , т. е. множество всех точек  $(x, y) \in \Omega$  при фиксированном  $x$ . Предположим для простоты, что  $\Omega_x$  состоит из конечного набора замкнутых промежутков. Тогда, рассматривая при фиксированном  $x$  интеграл от  $f(x, y)$  только как функции переменной  $y$  по множеству  $\Omega_x$ , получим функцию

$$\Phi(x) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Ее интегрирование по множеству  $\Omega_1$  приведет нас к интегралу

$$\int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_x} f(x, y) dy \right) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

При наших достаточно жестких ограничениях на область и функцию можно утверждать, что у функции  $f$  есть как двойной интеграл, так и оба повторных и она равны между собой:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

Равенство двойного и повторных интегралов открывает путь к нахождению двойного интеграла. Надо найти проекцию  $\Omega$  на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс, затем при каждом  $x$  из этой проекции найти интеграл от  $f$  как функции от  $y$  по сечению  $\Omega_x$  (одномерный интеграл), и затем еще раз найти одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от  $x$  по проекции  $\Omega_1$ .

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что  $\Omega$  — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \quad (22.5)$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi, \psi$  — непрерывные функции, заданные на  $[a, b]$ . Тогда

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (22.6)$$

Аналогично, если  $\Omega$  задается соотношениями

$$c \leq y \leq d, \quad \eta(y) \leq x \leq \zeta(y), \quad (22.7)$$

то

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\zeta(y)} f(x, y) dx. \quad (22.8)$$

Если сама область  $\Omega$  не является криволинейной трапецией, но ее можно разбить на части, являющиеся криволинейными трапециями, то следует воспользоваться аддитивностью интеграла и свести всё к случаю криволинейной трапеции.

**22.6. Замена переменной.** Пусть  $f$  — непрерывная функция, определенная на открытой области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , и пусть отображение  $\Phi$  с координатными функциями  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ ,  $(u, v) \in W$ , — диффеоморфизм области  $W$  переменных  $u, v$  на область  $D$ . Пусть замкнутая область  $\Omega \subset D$  является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области  $X \subset W$ . Тогда имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_X f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \quad (22.9)$$

где  $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$  — якобиан отображения  $\Phi$ .

Равенство (22.9) называют *формулой замены переменной* в двойном интеграле.

Формула замены переменной позволяет переносить интегрирование с одной области на другую и может оказаться, что в новых переменных область интегрирования проще, однако при этом скорее всего надо будет интегрировать более сложную функцию.

При рассмотрении формулы замены переменной можно заметить, что происходит пересадка функции  $f$  в новые переменные и интегрирование по новой области по мере, которая имеет вид  $k(u, v) du dv$ , где  $k(u, v)$  — коэффициент искажения меры, показывающий, как площадь малого квадрата, расположенного около  $(u, v)$ , изменяется при отображении  $\Phi$ . Эта структура формулы замены переменной (или перехода к новым переменным) будет сопровождать все рассматриваемые ниже интегралы, только выражения коэффициента искажения меры будут разными.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются полярные координаты  $(r, \varphi)$ , связанные с  $(x, y)$  равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r, \quad (22.10)$$

где  $r > 0$ , а  $\varphi$  пробегает при этом промежуток длиной не более  $2\pi$ ,

обычно  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , или обобщенные полярные координаты

$$x = ar \cos^\alpha \varphi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \alpha abr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi. \quad (22.11)$$

**22.7. Пример.** Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции  $f(x, y)$  по треугольнику  $\Omega$  с вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  (рис. 1).

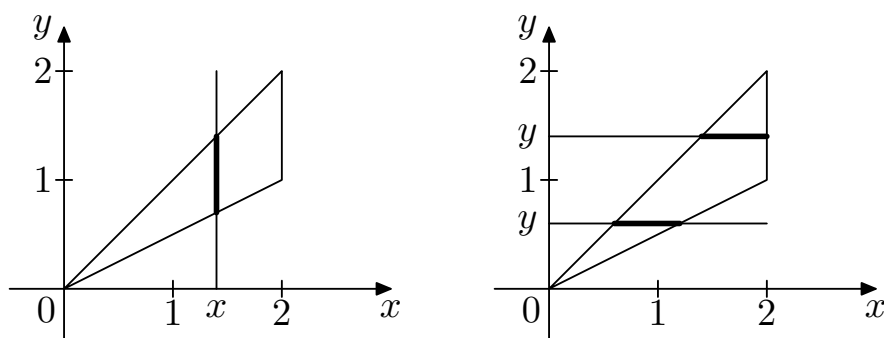


Рис. 1.

Ясно, что его проекция на ось  $Ox$  — это отрезок  $[0, 2]$ . Фиксировав  $x \in [0, 2]$  и двигаясь снизу вверх при заданном  $x$ , мы войдем в область  $\Omega$ , пройдя график функции  $y = x/2$ , и выйдем из  $\Omega$  через график функции  $y = x$ , т. е. при каждом фиксированном  $x$  сечение  $\Omega$  на элементе  $x$  представляет собой отрезок  $[x/2, x]$ . Значит, внутренний

интеграл от  $f(x, y)$  по сечению на элементе  $x$  имеет вид  $\int_{x/2}^x f(x, y) dy$ .

Сделав теперь  $x$  переменным, получаем функцию от  $x$ , интеграл от которой по отрезку  $[0, 2]$  и приведет к одному из повторных интегралов, а именно к интегралу

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^x f(x, y) dy.$$

Обратимся к другому из повторных интегралов. Проекция  $\Omega$  на ось  $Oy$  — это отрезок  $[0, 2]$ . Фиксируем  $y \in [0, 2]$  и будем двигаться слева направо при этом фиксированном  $y$ . В область  $\Omega$  мы войдем через график функции  $x = y$ , а вот выход будет зависеть от расположения  $y$ , а именно, если  $0 \leq y \leq 1$ , то выходим через график функции  $x = 2y$ , а если  $1 \leq y \leq 2$ , то через график функции  $x = 2$ . Это указывает

на то, что нам придется разбить  $\Omega$  на две части, соответственно с  $0 \leq y \leq 1$  и  $1 \leq y \leq 2$ . Тогда двойной интеграл будет равен сумме двух повторных интегралов:

$$\int_0^1 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx.$$

**22.8. Пример.** Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции  $f(x, y)$  по области  $\Omega$ , ограниченной графиками функций  $y = x$  и  $y = x^2 - 2x$ . Ясно, что эти графики пересекаются в точках  $(0, 0)$ ,  $(3, 3)$ , и из нескольких получающихся областей только одна, а именно при  $x \in [0, 3]$ , ограничена (рис. 2).

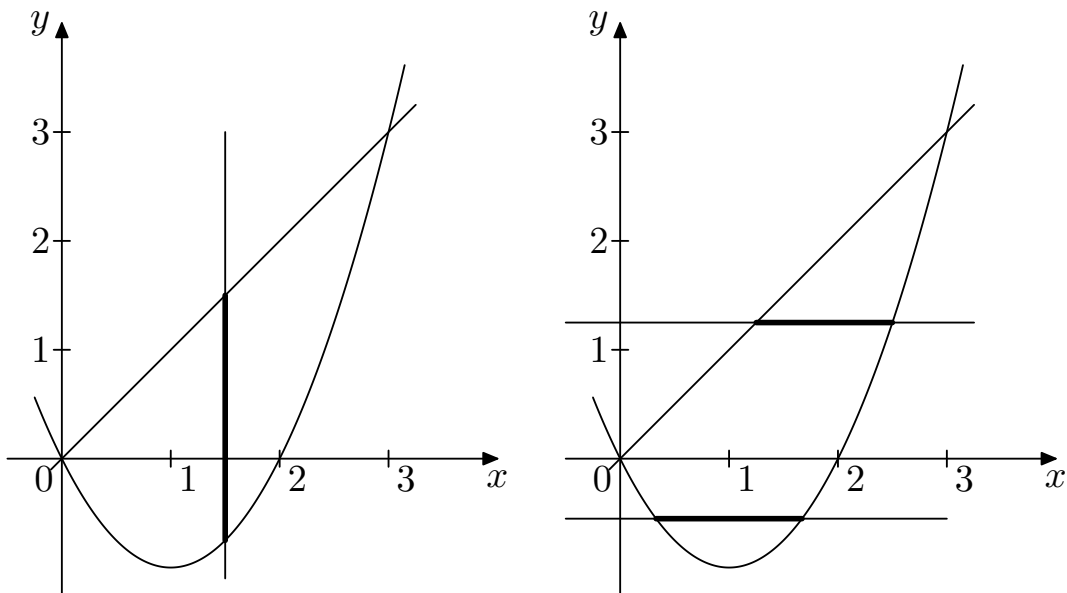


Рис. 2.

При фиксированном  $x \in [0, 3]$ , двигаясь снизу вверх, мы войдем в область  $\Omega$  через график функции  $y = x^2 - 2x$ , а выйдем через  $y = x$  (см. рис. 2(а)), так что в результате получим следующий повторный интеграл:

$$\int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^x f(x, y) dy.$$

Проекция этой области на ось ординат представляет собой отрезок  $[-1, 3]$ , но здесь придется разбить область на две части, соответству-

ющие  $-1 \leq y \leq 0$  и  $0 \leq y \leq 3$ , и интеграл представится в виде суммы

$$\int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_y^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx.$$

## 22.9. Задачи.

1. В интеграле  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для областей, ограниченных указанными линиями или заданных неравенствами:

- (1)  $y = 0, y = a, x + y = 0, x + y = 2a$ ;  
 (2)  $2y = x, 2y = x + 6, y = 2x, y = 2x - 3$ ;  
 (3)  $x^2 + y^2 \leq 2ax$ ; (4)  $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq x$ ;

2. Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и изобразить множество интегрирования:

(1)  $\int_0^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx$ ; (2)  $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx$ ;

3. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

(1)  $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy, a > 0$ ; (2)  $\int_0^1 dy \int_0^{y^2+y} f(x, y) dx$ ;  
 (3)  $\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-1}^{\cos x} f(x, y) dy$ , (4)  $\int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) dy$ ;

4. Вычислить интегралы

- (1)  $\iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy$ ,  $\Omega$  ограничена линиями  $x = y^2, x = 1$ ;  
 (2)  $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$ ;  
 (3)  $\iint_{\Omega} xy dx dy$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 25, 3x + y \geq 5\}$ ;

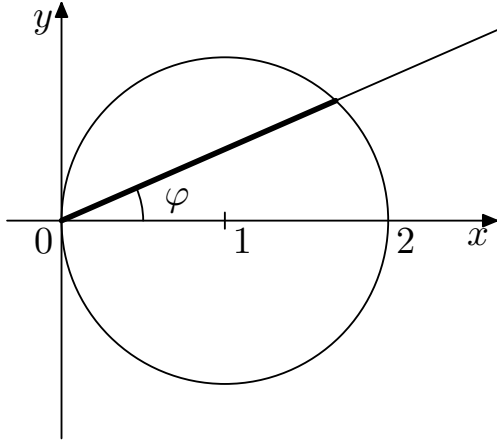


Рис. 3.

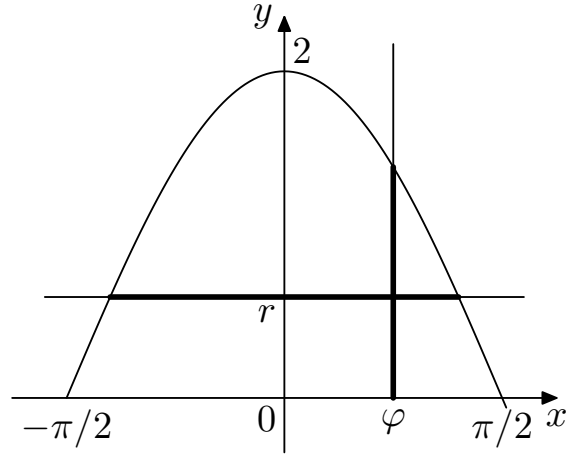


Рис. 4.

$$(4) \quad \iint_{\Omega} x \, dx dy, \quad \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2, \, x^2 - y^2 \leq 1, \, x \geq 0, \, y \geq 0\};$$

**22.10. Пример.** В двойном интеграле  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ , где  $\Omega$  — круг  $x^2 + y^2 \leq 2x$ , перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования.

Подставляя выражения  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  в соотношение, задающее область  $\Omega$ , получим неравенство  $r^2 \leq 2r \cos \varphi$ , или  $r \leq 2 \cos \varphi$ , характеризующее соответствующую  $\Omega$  область  $D$  в координатах  $(\varphi, r)$  (здесь нам удобно ставить координаты именно в указанном порядке, а не в противоположном, как это удобно при нахождении якобиана). Ограничение  $r \geq 0$  приводит к ограничению  $\cos \varphi \geq 0$ , или же  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Можно для наглядности изобразить зависимость  $r = r(\varphi)$  в рамках исходных декартовых координат  $(x, y)$  (рис 3), а также изобразив пары  $(\varphi, r)$  как декартовы координаты (рис. 4).

Ясно, что

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy &= \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr. \end{aligned}$$

Запишем повторный интеграл при другом порядке следования переменных. Проекция области  $D$  на ось  $Or$  — это отрезок  $[0, 2]$ , и если при фиксированном  $r$  идти слева направо (при той интерпретации  $\varphi, r$ , где они изображены в виде прямоугольной системы координат),



то для нахождения зависимости  $\varphi = \varphi(r)$ , при которой мы войдем в область  $D$ , надо решить уравнение  $r = 2 \cos \varphi$  с учетом ограничения  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ , или же  $\cos \varphi = r/2$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ , или

$$\varphi = \pm \arccos \frac{r}{2} + 2\pi k, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0,$$

откуда  $\varphi = -\arccos \frac{r}{2}$ . Выйдем из  $D$  на графике функции  $\varphi = \arccos \frac{r}{2}$ . Тем самым приходим к повторному интегралу

$$\int_0^2 r dr \int_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

### 22.11. Задачи.

1. В интеграле  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов:

(1)  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq x\}$ , (2)  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2ay\}$ ,

(3)  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq x\}$ ,

(4)  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x + y + a \leq 0\}$ ,

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

(1)  $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$ .

(2)  $\iint_{\Omega} y^2 e^{x^2+y^2} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,

(3)  $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq ax\}, a > 0$ ,

(4)  $\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2y\}$ ,

22.12. Из определения двойного интеграла легко усмотреть, что если мы проинтегрируем единичную функцию по данной области (в переменных  $(x, y)$ ), то получим величину площади этой области:

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy.$$

**22.13. Пример.** Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < d,$$

воспользовавшись подходящей заменой переменных.

Заметим, что выражения  $\frac{x^2}{y}$  и  $\frac{x^3}{y^2}$  меняются в постоянных пределах, поэтому, если мы введем новые переменные  $u, v$ , полагая  $u = \frac{x^2}{y}$  и  $v = \frac{x^3}{y^2}$ , то область  $D$  изменения переменных  $u, v$  составляет прямоугольник  $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$ . Для нахождения якобиана  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  можно сначала выразить  $x, y$  через  $u, v$ , а затем считать якобиан, а можно попробовать найти якобиан  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$  и потом из него получить требуемый якобиан. Пойдем сначала вторым путем, потому что выражения  $u, v$  через  $x, y$  проще, чем выражения  $x, y$  через  $u, v$ . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{x^3}{y^3},$$

так что

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2\frac{x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ 3\frac{x^2}{y^2} & -2\frac{x^3}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Заметив, что  $\frac{x}{y} = \frac{v}{u}$ , находим, что

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \right| = \left( \frac{u}{v} \right)^4.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} S = \iint_{\Omega} dx dy &= \int_a^b du \int_c^d \frac{u^4}{v^4} dv = \int_a^b u^4 du \int_c^d v^{-4} dv \\ &= \frac{u^5}{5} \Big|_a^b \cdot \frac{v^{-3}}{-3} \Big|_c^d = \frac{b^5 - a^5}{15} \left( \frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3} \right). \end{aligned}$$

### 22.14. Задачи.

1. Используя (обобщенные) полярные координаты, найти площадь области, ограниченной кривыми:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2bx, \quad y = x, \quad y = 0, \quad b > a > 0;$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2;$$

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0;$$

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3);$$

2. Найти площадь области, ограниченной данными кривыми, используя подходящую замену:

$$(1) \quad x = 2y, \quad y = 3x, \quad 3x = 2 - y, \quad x = 4 - 2y;$$

$$(2) \quad x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x, \quad 0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta;$$

**22.15.** Из определения двойного интеграла можно усмотреть его геометрическую интерпретацию: если  $z = f(x, y)$  — некоторая неотрицательная функция на области  $\Omega$ , то интеграл  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$  равен

объему подграфика функции  $f$ , т. е. множества  $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ . Если  $f_1, f_2$  — функции, заданные на  $\Omega$ , такие, что  $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$  для всех  $(x, y) \in \Omega$ , то объем части пространства  $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$ , находящегося между графиками  $f_1, f_2$ , равен интегралу

$$\iint_{\Omega} (f_2(x, y) - f_1(x, y)) \, dx dy.$$

**22.16. Пример.** Найдём объем тела, ограниченного поверхностями  $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$ .

Здесь тело представляет собой часть пространства, заключенную между графиками функции  $z = 0$  и  $z = x^2 + y^2$ , рассматриваемых на области  $\Omega = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ . Тем самым его объем равен

интегралу

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=1} = \int_{-1}^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\
 &= 2 \left( \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{88}{105}.
 \end{aligned}$$

**22.17. Задачи.** Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

- (1)  $x^2 + y^2 = ax, z = x^2 + y^2, z = 0$ ;
- (2)  $x + y + z = a, 4x + y = a, 4x + 3y = 3a, y = 0, z = 0, a > 0$ ;

**22.18.** Пусть  $M$  — гладкая поверхность, заданная параметрически посредством непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega.$$

Тогда площадь  $S(M)$  поверхности  $M$  может быть найдена по формуле

$$S(M) = \iint_M k(u, v) du dv,$$

где величина  $k(u, v)$  (коэффициент искажения площади) может быть найдена либо по формуле

$$k(u, v) = \sqrt{EG - F^2}, \quad (22.12)$$

где

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad G = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

либо по формуле

$$k(u, v) = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|^2}. \quad (22.13)$$

Если же поверхность  $M$  является графиком функции  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ , то

$$S(M) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (22.14)$$

### 22.19. Задачи.

1. Найти площадь части поверхности  $az = xy$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ .

2. Найти площадь части поверхности  $z^2 = 2xy$ , отсекаемой плоскостями  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

## § 23. Тройной интеграл и многократный интеграл

**23.1.** Пусть  $f$  — непрерывная функция трех переменных  $(x, y, z)$ , заданная на ограниченной замкнутой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Тройной интеграл создается аналогично двойному: берут разбиение области  $\Omega$  на такие множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ , каждая из которых имеет объем (т. е. измерима, например, по мере Жордана), затем в каждой из частей разбиения  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , берут по точке  $(x_i, y_i, z_i)$  и составляют интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i), \quad (23.1)$$

где  $m(\Omega_i)$  — объем множества  $\Omega_i$ . Число  $I$  называют (*тройным*) *интегралом* от функции  $f$  по множеству  $\Omega$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  области  $\Omega$  на измеримые части такие, что  $\max_{i=1, \dots, k} m(\Omega_i) < \delta$ , и любого выбора точек  $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \quad (23.2)$$

Для тройного интеграла используют обозначение  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ .

Здесь символ  $dx dy dz$  указывает на то, что в основу измерения объема взят объем параллелепипеда как произведение его линейных размеров.

**23.2.** Если взять непрерывную функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  на замкнутой ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , то аналогично двойному или тройному определяется многократный интеграл, для которого используется обозначение  $\int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ .

### 23.3. Свойства интеграла.

**Линейность интеграла.** Тройной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на  $\Omega$  функций  $f, g$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz \\ = \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (23.3)$$

**Аддитивность интеграла.** При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если  $D_1, \dots, D_k$  — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ , то

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^k \iiint_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (23.4)$$

**23.4. Повторный интеграл.** При переходе от тройного интеграла к повторному можно сначала фиксировать либо одну координату, оставляя переменными другие две, либо две координаты, оставляя переменной оставшуюся одну. В зависимости от типа фиксации координат получаются различные способы перехода к повторному интегрированию.

Итак, для  $(x, y, z) \in \Omega$  пусть  $\Omega_0 = \{(x, y) : (x, y, z) \in \Omega\}$  — проекция  $\Omega$  на плоскость  $xOy$ . Фиксируем  $(x, y) \in \Omega_0$ , и пусть  $\Omega_{(x,y)} = \{z : (x, y, z) \in \Omega\}$ . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left( \int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz. \quad (23.5)$$

Если при этом для каждой пары  $(x, y) \in \Omega_0$  множество  $\Omega_{(x,y)}$  — это отрезок  $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ , то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (23.6)$$

В результате первого интегрирования (по  $z$ ) мы получаем двойной интеграл, разбираться с которым учились раньше.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости —  $yOz$  или  $zOx$ .

Теперь обсудим другой способ разбиения. Пусть  $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R}) (x, y, z) \in \Omega\}$  — проекция области  $\Omega$  на ось  $Ox$ . При каждом  $x \in \Omega_1$  пусть  $\Omega_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in \Omega\}$  — сечение области  $\Omega$  при данном  $x$ . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если  $\Omega_1$  — это отрезок  $\Omega_1 = [a, b]$ , а при фиксированном  $x \in [a, b]$  множество  $\Omega_x$  — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями  $z = \lambda(x, y)$ ,  $z = \mu(x, y)$ , где  $c(x) \leq y \leq d(x)$ , то в обычных обозначениях

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (23.7)$$

Как и выше, подобные формулы будут при первоначальном обращении к какой-либо из других координатных осей.

**23.5. Замена переменных.** Как отмечено при обсуждении замены переменных в двойном интеграле, при замене надо перенести функцию в область новых переменных и проинтегрировать по мере, в которой учтен коэффициент искажения, вносимый реализующим замену диффеоморфизмом.

Пусть  $f$  — непрерывная функция, определенная на открытой области  $D \subset \mathbb{R}^3$ , и пусть отображение  $\Phi$  с координатными функциями  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ ,  $(u, v, w) \in W$ , — диффеоморфизм области  $W$  переменных  $u, v, w$  на область  $D$ . Пусть замкнутая область  $\Omega \subset D$  является образом при этом диффеоморфизме

некоторой замкнутой области  $X \subset W$ . Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_X f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \quad (23.8) \end{aligned}$$

где  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$  — якобиан отображения  $\Phi$ .

Равенство (23.8) называют *формулой замены переменной* в тройном интеграле.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются *сферические координаты*  $\varphi, \psi, r$ , связанные с исходными переменными  $x, y, z$  равенствами

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

Здесь переменная  $\varphi$  может меняться в каком-либо промежутке длиной  $2\pi$ , обычно  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , а  $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Бывают удобны также *цилиндрические координаты*  $r, \varphi, h$ , связанные с  $x, y, z$  равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, h)} = r.$$

Здесь  $r > 0$ ,  $\varphi$  пробегает при этом промежуток длиной не более  $2\pi$ , обычно  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , а  $h \in \mathbb{R}$ .

В подходящих случаях используются *обобщенные сферические координаты*  $\varphi, \psi, r$ , связанные с  $x, y, z$  равенствами

$$\begin{aligned} x &= ar \cos^{\alpha} \varphi \cos^{\beta} \psi, \quad y = br \sin^{\alpha} \varphi \cos^{\beta} \psi, \quad z = cr \sin^{\beta} \psi, \\ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} &= \alpha \beta a b c r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi. \end{aligned}$$

Здесь область изменения переменной  $\varphi$  зависит от показателя  $\alpha$  и ограничивается возможностью возведения в степень  $\alpha$ , но во всяком случае это область лежит в каком-либо промежутке длиной не более  $2\pi$ , обычно  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , а  $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

**23.6. Пример.** Запишем интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  в виде повторного, где  $\Omega$  — область, ограниченная поверхностями  $z = xy$ ,



$y = x$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$ . При этом рассмотрим разный порядок следования переменных.

Поверхности  $x = 1$  и  $y = x$  — это параллельные оси  $Oz$  плоскости, проходящие через соответствующие прямые плоскости  $xOy$ . Поверхность  $z = xy$  — это седло, проходящее через оси координат  $Ox$ ,  $Oy$ . Поскольку поверхность  $x = 1$  должна участвовать в формировании области, у поверхности  $z = xy$  надо брать ту часть, где  $x > 0$ . Равенства  $z = xy$  и  $z = 0$  говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также  $x = 0$  и  $y = 0$ . Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области  $\Omega$  на плоскость  $xOy$  будет треугольник  $\Delta$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y \leq x$ . Для каждой точки  $(x, y) \in \Delta$  точка  $(x, y, z)$  будет в  $\Omega$  при  $0 \leq z \leq xy$ . Тем самым, сразу расставляя пределы интегрирования по  $\Delta$ , получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\Delta} dx dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y \leq x$ ,  $0 \leq z \leq xy$  приводят к ограничению  $0 \leq z \leq 1$  на  $z$ . Фиксировав  $z \in [0, 1]$ , получаем при каждом таком  $z$  область в плоскости  $xOy$ , ограниченную кривыми  $xy = z$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$  (рис. 1).

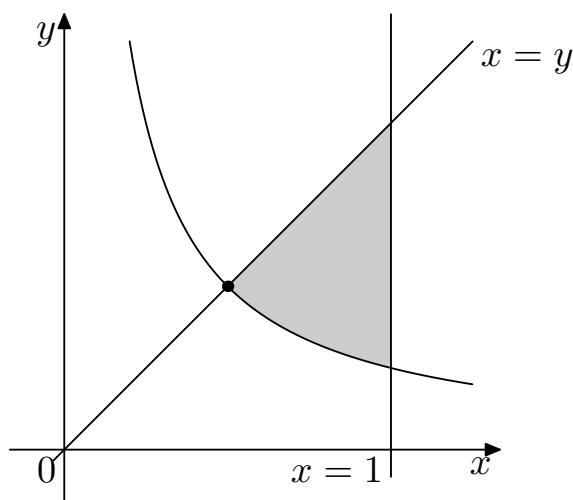


Рис. 1.

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 23.1 область. Най-

дем точку пересечения кривых  $y = x$  и  $xy = z$ :  $z = x^2$ ,  $x = \sqrt{z}$ . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{z/x}^x f(x, y, z) dy.$$

### 23.7. Задачи.

1. Тройной интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  записать в виде повторного с указанным порядком следования переменных и расставить пределы интегрирования для указанных областей:

(1)  $\Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, 4 \geq z \geq 0, 2x + y \leq 2\}$ , (а)  $(y, z, x)$ ,  
(б)  $(x, y, z)$ ;

(2)  $\Omega = \{x \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2\}$ , (а)  $(y, z, x)$ ,  
(б)  $(x, z, y)$ ;

2. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

$$(1) \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^h f(x, y, z) dz, \quad (z, y, x);$$

$$(2) \int_0^4 dz \int_0^{3-\frac{3}{4}z} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x, y, z) dx, \quad (x, y, z);$$

3. Вычислить интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  для следующих функций и областей:

(1)  $f(x, y, z) = y$ ,  $\Omega$  — пирамида, ограниченная плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $2x + y + z = 4$ ;

(2)  $f(x, y, z) = x + z$ , область  $\Omega$  ограничена плоскостями  $x + y = 1$ ,  $x - y = 1$ ,  $x + z = 1$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ ;

(3)  $f(x, y, z) = x^2 - z^2$ , область  $\Omega$  ограничена плоскостями  $y = -x$ ,  $z = x$ ,  $z = y$ ,  $z = 1$ ;

(4)  $f(x, y, z) = xy$ , область  $\Omega$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ;

**23.8. Пример.** В интеграле  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ , где

$$\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \geq z^2\},$$

перейдем к сферическим координатам и запишем его в виде повторного.

Подставляя  $x = r \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = r \sin \psi$  в неравенства, характеризующие область, получим неравенства

$$r^2 \leq 2ar \sin \psi, \quad r^2 \cos^2 \psi \geq r^2 \sin^2 \psi,$$

или

$$r \leq 2a \sin \psi, \quad |\cos \psi| \geq |\sin \psi|,$$

характеризующие соответствующую  $\Omega$  область  $D$  в сферических координатах. Положительность  $r$  вместе с ограничением из сферической замены дает ограничение  $0 \leq \psi \leq \pi/2$ . Далее, среди  $\psi \in [0, \pi/2]$  неравенство  $|\cos \psi| \geq |\sin \psi|$  выполняется при  $\psi \in [0, \pi/4]$ . Итак, мы приходим к интегралу по области

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 2a \sin \psi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

сферических переменных. Переход к повторному интегралу дает равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_D f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\psi \int_0^{2a \sin \psi} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr. \end{aligned}$$

**23.9. Пример.** Совершая подходящую замену, вычислим интеграл  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , где  $\Omega$  расположена в октанте  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b, \ 0 < \alpha < \beta, \ 0 < m < n).$$

Учитывая наблюдения из примера 22.13, положим

$$u = \frac{x^2 + y^2}{z}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x}.$$

Тогда при переходе к переменным  $u, v, w$  области  $\Omega$  соответствует прямоугольник

$$m \leq u \leq n, \quad a^2 \leq v \leq b^2, \quad \alpha \leq w \leq \beta.$$

Найдем якобиан  $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ , замечая, что выражения  $u, v, w$  через  $x, y, z$  проще, чем выражения для координатных функций обратного отображения. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -2 \frac{y}{x} \frac{x^2 + y^2}{z^2}. \end{aligned}$$

Выразим переменные  $x, y, z$  через  $u, v, w$ . Переменные  $x, y, z$  положительны по условию. Из двух последних равенств замены получаем

$$y = \sqrt{vw}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad x^2 + y^2 = vw + \frac{v}{w} = \frac{v(w^2 + 1)}{w},$$

$$z = \frac{x^2 + y^2}{u} = \frac{v(w^2 + 1)}{uw}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot z \cdot \frac{z}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{v(w^2 + 1)}{uw} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{2} \frac{v(w^2 + 1)}{u^2 w^2}. \end{aligned}$$

Переходим к нахождению интеграла:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz \\
 &= \int_m^n du \int_{a^2}^{b^2} dv \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{vw} \sqrt{\frac{v}{w}} \frac{v(w^2+1)}{uw} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v(w^2+1)}{u^2 w^2} dw \\
 &= \frac{1}{2} \int_m^n \frac{du}{u^3} \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(w^2+1)^2}{w^3} dw \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_m^n \cdot \frac{1}{4} v^4 \Big|_{a^2}^{b^2} \cdot \left(\frac{1}{2} w^2 + 2 \ln w - \frac{1}{2w^2}\right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) (b^8 - a^8) \left(\beta^2 - \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha}\right).
 \end{aligned}$$

### 23.10. Задачи.

1. Вычислить интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz$  от следующих функций  $f$  по следующим областям  $\Omega$ :

- (1)  $f(x, y, z) = z$ ,  $\Omega$  ограничена поверхностями  $R^2 z^2 = h^2(x^2 + y^2)$ ,  $z = h$ ,  $h > 0$ ;
- (2)  $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$ ,  $\Omega$  ограничена поверхностями  $y^2 + z^2 = R^2$ ,  $y + x = R$ ,  $y - x = R$ ,  $R > 0$ ;
- (3)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0, z \geq 0\}$ ;
- (4)  $f(x, y, z) = x + z$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ;
- (5)  $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq y\}$ ;
- (6)  $f(x, y, z) = xz^2$ ,  $\Omega = \{(3x - 4)^2 \leq y^2 + z^2 \leq x^2\}$ ;

2. Найти

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p \, dx dy dz,$$

где  $m, n, p$  — целые неотрицательные числа.

3. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s \, dx dy dz,$$

где область  $V$  ограничена плоскостями

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

полагая

$$x + y + z = \xi, \quad y + z = \xi\eta, \quad z = \xi\eta\zeta.$$

**23.11.** Аналогично двойному, тройной интеграл  $\iiint_{\Omega} dx dy dz$  по  $\Omega$  от единичной функции равен объему тела  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

**23.12. Задачи.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

(1)  $x^2 + y^2 = R^2, x + y + z = a, x + y + z = -a;$

(2)  $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2;$

(3)  $z = xy, z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0;$

(4)  $z = x^2 + y^2, z = x + y;$

(5)  $x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0;$

(6)  $x^2 + y^2 = 1, z = e^{-(x^2+y^2)}, z = 0;$