## § 22. Двойной интеграл

**22.1.** Мы будем заниматься приобретением навыков по нахождению двойных, а затем и тройных интегралов. Нас не будет интересовать общность теоретической поддержки, за этим можно обратиться к соответствующим теоретическим руководствам. Поэтому мы будем рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутой области в $\mathbb{R}^2$ (т. е. на таком замкнутом множестве, которое совпадает с замыканием своей внутренности). Можно допустить и кусочно непрерывные функции, устроенные так, что их область определения можно представить в виде объединения замкнутых областей, внутренности которых не пересекаются, на внутренности каждой из которых функция непрерывна.

**22.2. Определение двойного интеграла.** Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Напомним конструкцию двойного интеграла (по Риману). Берется разбиение области $\Omega$ на такие множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, каждое из которых имеет площадь (т. е. измеримо по мере Жордана). Затем в каждом из $\Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, берется по точке $(x_i, y_i)$ и составляется *интегральная сумма*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i), \tag{22.1}$$

где $m(\Omega_i)$ — площадь множества $\Omega_i$. Если при рассмотрении разбиений таких, что наибольшая из площадей составляющих эти разбиения множеств неограниченно уменьшается, суммы приближаются к некоторому числу, то его и считают интегралом от $f$ по множеству $\Omega$.

**Определение.** Число $I$ называют (*двойным*) *интегралом* от функции $f$ по множеству $\Omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Omega$ на множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, у которого $\max\limits_{i=1,\ldots,n} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \tag{22.2}$$

Интеграл от $f$ по множеству $\Omega$ обозначается обычно символом

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy.$$

В этом обозначении фрагмент $dxdy$ указывает на то, что в основе измерения взята площадь прямоугольника как произведение длин его сторон.

**22.3. Линейность интеграла.** *Двойной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на $\Omega$ функций $f, g$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy + \beta \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dxdy \tag{22.3}$$

**22.4. Аддитивность интеграла.** *При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \ldots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$, то*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{D_i} f(x,y)\,dxdy.$$

**22.5. Повторный интеграл.** Пусть $\Omega_1$ — проекция $\Omega$ на ось абсцисс, а $\Omega_2$ — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})\ (x,y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})\ (x,y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем $x \in \Omega_1$, и пусть $\Omega_x$ — сечение $\Omega$ на уровне $x$, т. е. множество всех точек $(x,y) \in \Omega$ при фиксированном $x$. Предположим для простоты, что $\Omega_x$ состоит из конечного набора замкнутых промежутков. Тогда, рассматривая при фиксированном $x$ интеграл от $f(x,y)$ только как функции переменной $y$ по множеству $\Omega_x$, получим функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy.$$

Ее интегрирование по множеству $\Omega_1$ приведет нас к интегралу

$$\int\limits_{\Omega_1} \left( \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx.$$

При наших достаточно жестких ограничениях на область и функцию можно утверждать, что у функции $f$ есть как двойной интеграл, так и оба повторных и она равны между собой:

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx.$$

Равенство двойного и повторных интегралов открывает путь к нахождению двойного интеграла. Надо найти проекцию $\Omega$ на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс, затем при каждом $x$ из этой проекции найти интеграл от $f$ как функции от $y$ по сечению $\Omega_x$ (одномерный интеграл), и затем еще раз найти одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от $x$ по проекции $\Omega_1$.

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что $\Omega$ — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \le x \le b, \quad \varphi(x) \le y \le \psi(x), \tag{22.5}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi$ — непрерывные функции, заданные на $[a,b]$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{22.6}$$

Аналогично, если $\Omega$ задается соотношениями

$$c \le y \le d, \quad \eta(y) \le x \le \zeta(y), \tag{22.7}$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\eta(y)}^{\zeta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{22.8}$$

Если сама область $\Omega$ не является криволинейной трапецией, но ее можно разбить на части, являющиеся криволинейными трапециями, то следует воспользоваться аддитивностью интеграла и свести всё к случаю криволинейной трапеции.

**22.6. Замена переменной.** Пусть $f$ — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$, и пусть отображение $\Phi$ с координатными функциями $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $(u,v) \in W$, — диффеоморфизм области $W$ переменных $u, v$ на область $D$. Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{X} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv, \qquad (22.9)$$

где $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$ — якобиан отображения $\Phi$.

Равенство (22.9) называют *формулой замены переменной* в двойном интеграле.

Формула замены переменной позволяет переносить интегрирование с одной области на другую и может оказаться, что в новых переменных область интегрирования проще, однако при этом скорее всего надо будет интегрировать более сложную функцию.

При рассмотрении формулы замены переменной можно заметить, что происходит пересадка функции $f$ в новые переменные и интегрирование по новой области по мере, которая имеет вид $k(u,v)\,dudv$, где $k(u,v)$ — коэффициент искажения меры, показывающий, как площадь малого квадрата, расположенного около $(u,v)$, изменяется при отображении $\Phi$. Эта структура формулы замены переменной (или перехода к новым переменным) будет сопровождать все рассматриваемые ниже интегралы, только выражения коэффициента искажения меры будут разными.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются полярные координаты $(r,\varphi)$, связанные с $(x,y)$ равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r, \qquad (22.10)$$

где $r > 0$, а $\varphi$ пробегает при этом промежуток длиной не более $2\pi$,

обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, или обобщенные полярные координаты

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi, \quad y = br\sin^{\alpha}\varphi, \quad r > 0,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi. \tag{22.11}$$

**22.7. Пример.** Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по треугольнику $\Omega$ с вершинами в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ (рис. 1).

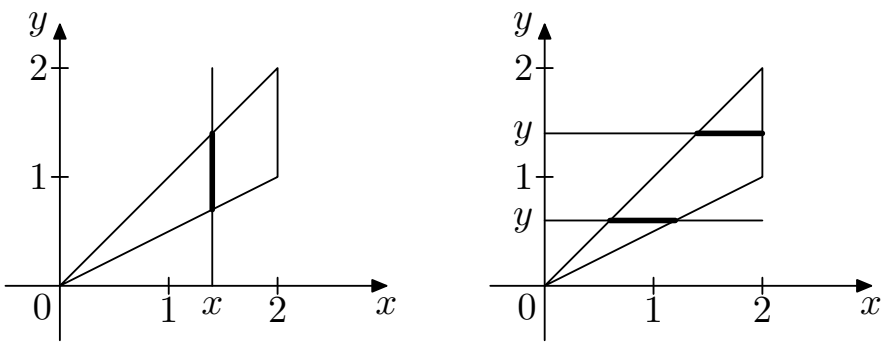


Рис. 1.

Ясно, что его проекция на ось $Ox$ — это отрезок $[0, 2]$. Фиксировав $x \in [0, 2]$ и двигаясь снизу вверх при заданном $x$, мы войдем в область $\Omega$, пройдя график функции $y = x/2$, и выйдем из $\Omega$ через график функции $y = x$, т. е. при каждом фиксированном $x$ сечение $\Omega$ на элементе $x$ представляет собой отрезок $[x/2, x]$. Значит, внутренний интеграл от $f(x, y)$ по сечению на элементе $x$ имеет вид $\int\limits_{x/2}^{x} f(x, y)\,dy$. Сделав теперь $x$ переменным, получаем функцию от $x$, интеграл от которой по отрезку $[0, 2]$ и приведет к одному из повторных интегралов, а именно к интегралу

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x, y)\,dy.$$

Обратимся к другому из повторных интегралов. Проекция $\Omega$ на ось $Oy$ — это отрезок $[0, 2]$. Фиксируем $y \in [0, 2]$ и будем двигаться слева направо при этом фиксированном $y$. В область $\Omega$ мы войдем через график функции $x = y$, а вот выход будет зависеть от расположения $y$, а именно, если $0 \le y \le 1$, то выходим через график функции $x = 2y$, а если $1 \le y \le 2$, то через график функции $x = 2$. Это указывает

на то, что нам придется разбить $\Omega$ на две части, соответственно с $0 \le y \le 1$ и $1 \le y \le 2$. Тогда двойной интеграл будет равен сумме двух повторных интегралов:

$$\int_0^1 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

**22.8. Пример.** Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x,y)$ по области $\Omega$, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2 - 2x$. Ясно, что эти графики пересекаются в точках $(0,0)$, $(3,3)$, и из нескольких получающихся областей только одна, а именно при $x \in [0,3]$, ограничена (рис. 2).

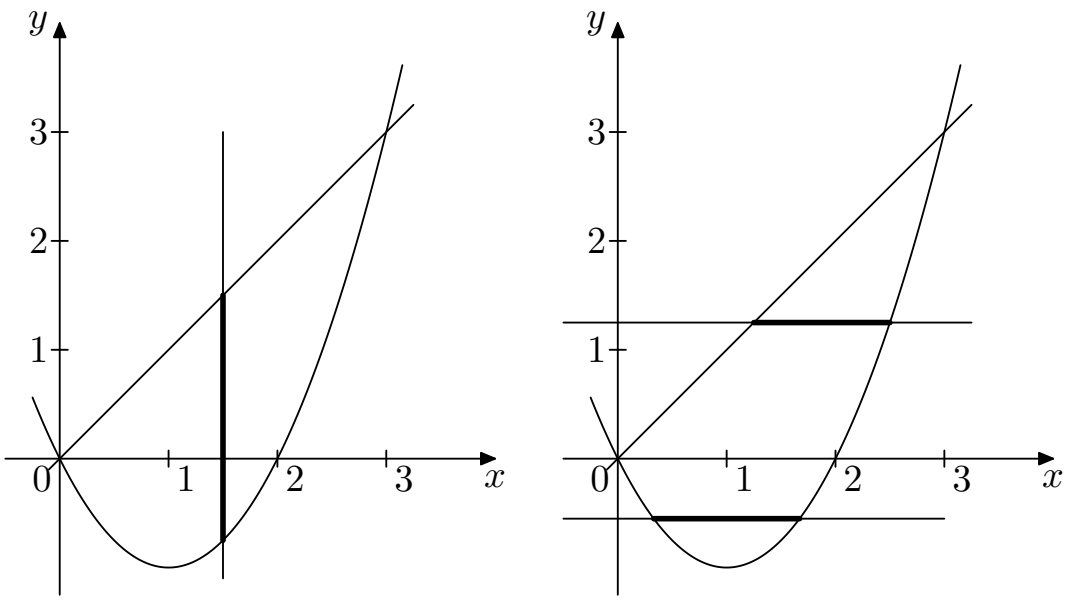


Рис. 2.

При фиксированном $x \in [0,3]$, двигаясь снизу вверх, мы войдем в область $\Omega$ через график функции $y = x^2 - 2x$, а выйдем через $y = x$ (см. рис. 2(а)), так что в результате получим следующий повторный интеграл:

$$\int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^{x} f(x,y)\,dy.$$

Проекция этой области на ось ординат представляет собой отрезок $[-1,3]$, но здесь придется разбить область на две части, соответству-

ющие $-1 \le y \le 0$ и $0 \le y \le 3$, и интеграл представится в виде суммы

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{y}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx.$$

**22.9. Задачи.**

**1.** В интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для областей, ограниченных указанными линиями или заданных неравенствами:

**(1)** $y = 0$, $y = a$, $x + y = 0$, $x + y = 2a$;

**(2)** $2y = x$, $2y = x + 6$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$;

**(3)** $x^2 + y^2 \le 2ax$; **(4)** $x^2 + y^2 \le 4x$, $y \ge x$;

**2.** Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и изобразить множество интегрирования:

**(1)** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$; **(2)** $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$;

**3.** Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

**(1)** $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)\,dy$, $a > 0$; **(2)** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2+y} f(x,y)\,dx$;

**(3)** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)\,dy$, **(4)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

**4.** Вычислить интегралы

**(1)** $\iint\limits_{\Omega} x^2y^2\,dxdy$, $\Omega$ ограничена линиями $x = y^2$, $x = 1$;

**(2)** $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}$;

**(3)** $\iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le 25,\ 3x + y \ge 5\}$;

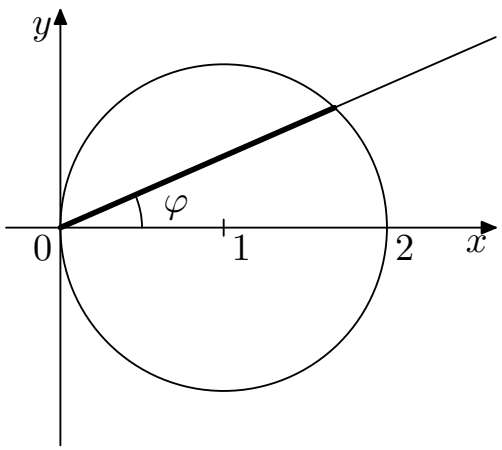


Рис. 3.

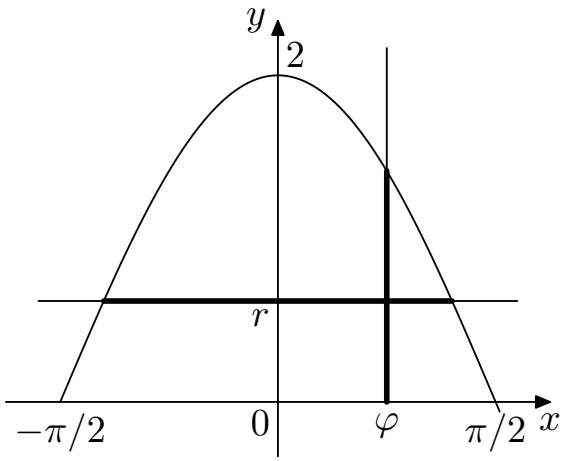


Рис. 4.

**(4)** $\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy, \quad \Omega = \{x^2+y^2 \le 2,\ x^2-y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\};$

**22.10. Пример.** В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, где $\Omega$ — круг $x^2+y^2 \le 2x$, перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования.

Подставляя выражения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ в соотношение, задающее область $\Omega$, получим неравенство $r^2 \le 2r\cos\varphi$, или $r \le 2\cos\varphi$, характеризующее соответствующую $\Omega$ область $D$ в координатах $(\varphi, r)$ (здесь нам удобно ставить координаты именно в указанном порядке, а не в противоположном, как это удобно при нахождении якобиана). Ограничение $r \ge 0$ приводит к ограничению $\cos\varphi \ge 0$, или же $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Можно для наглядности изобразить зависимость $r = r(\varphi)$ в рамках исходных декартовых координат $(x, y)$ (рис 3), а также изобразив пары $(\varphi, r)$ как декартовы координаты (рис. 4).

Ясно, что

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d\varphi dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr.$$

Запишем повторный интеграл при другом порядке следования переменных. Проекция области $D$ на ось $Or$ — это отрезок $[0, 2]$, и если при фиксированном $r$ идти слева направо (при той интерпретации $\varphi, r$, где они изображены в виде прямоугольной системы координат),

то для нахождения зависимости $\varphi = \varphi(r)$, при которой мы войдем в область $D$, надо решить уравнение $r = 2\cos\varphi$ с учетом ограничения $-\pi/2 \le \varphi \le 0$, или же $\cos\varphi = r/2$, $-\pi/2 \le \varphi \le 0$, или

$$\varphi = \pm \arccos\frac{r}{2} + 2\pi k, \quad -\pi/2 \le \varphi \le 0,$$

откуда $\varphi = -\arccos\dfrac{r}{2}$. Выйдем из $D$ на графике функции $\varphi = \arccos\dfrac{r}{2}$. Тем самым приходим к повторному интегралу

$$\int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

**22.11. Задачи.**

**1.** В интеграле $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов:

**(1)** $\Omega = \{x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge x\}$, **(2)** $\Omega = \{x^2 + y^2 \le 2ay\}$,

**(3)** $\Omega = \{x^2 + y^2 \le 2ax,\ y \ge x\}$,

**(4)** $\Omega = \{x^2 + y^2 \le a^2,\ x + y + a \le 0\}$,

**2.** Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

**(1)** $\iint\limits_\Omega xy^2\,dxdy,\ \Omega = \{x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}$.

**(2)** $\iint\limits_\Omega y^2 e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$,

**(3)** $\iint\limits_\Omega \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2 + y^2 \le ax\},\ a > 0$,

**(4)** $\iint\limits_\Omega \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le 2y\}$,

**22.12.** Из определения двойного интеграла легко усмотреть, что если мы проинтегрируем единичную функцию по данной области (в переменных $(x,y)$), то получим величину площади этой области:

$$S(\Omega) = \iint\limits_\Omega dxdy.$$

**22.13. Пример.** Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2, \quad 0 < a < b,\ 0 < c < d,$$

воспользовавшись подходящей заменой переменных.

Заметим, что выражения $\dfrac{x^2}{y}$ и $\dfrac{x^3}{y^2}$ меняются в постоянных пределах, поэтому, если мы введем новые переменные $u, v$, полагая $u = \dfrac{x^2}{y}$ и $v = \dfrac{x^3}{y^2}$, то область $D$ изменения переменных $u, v$ составляет прямоугольник $a \le u \le b$, $c \le v \le d$. Для нахождения якобиана $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ можно сначала выразить $x, y$ через $u, v$, а затем считать якобиан, а можно попробовать найти якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и потом из него получить требуемый якобиан. Пойдем сначала вторым путем, потому что выражения $u, v$ через $x, y$ проще, чем выражения $x, y$ через $u, v$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{x^3}{y^3},$$

так что

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2\dfrac{x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ 3\dfrac{x^2}{y^2} & -2\dfrac{x^3}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Заметив, что $\dfrac{x}{y} = \dfrac{v}{u}$, находим, что

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right| = \left(\frac{u}{v}\right)^4.$$

Тем самым

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_a^b du \int\limits_c^d \frac{u^4}{v^4}\, dv = \int\limits_a^b u^4\, du \int\limits_c^d v^{-4}\, dv$$
$$= \frac{u^5}{5}\bigg|_a^b \cdot \frac{u^{-3}}{-3}\bigg|_c^d = \frac{b^5 - a^5}{15}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right).$$

**22.14. Задачи.**

**1.** Используя (обобщенные) полярные координаты, найти площадь области, ограниченной кривыми:

**(1)** $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $y=x$, $y=0$, $b>a>0$;

**(2)** $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$;

**(3)** $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$, $\quad x\geq 0$, $y\geq 0$;

**(4)** $(x^2+y^2)^2=a(x^3+y^3)$;

**2.** Найти площадь области, ограниченной данными кривыми, используя подходящую замену:

**(1)** $x=2y$, $y=3x$, $3x=2-y$, $x=4-2y$;

**(2)** $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$, $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$;

**22.15.** Из определения двойного интеграла можно усмотреть его геометрическую интерпретацию: если $z=f(x,y)$ — некоторая неотрицательная функция на области $\Omega$, то интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ равен объему подграфика функции $f$, т. е. множества $\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega,\ 0\leq z\leq f(x,y)\}$. Если $f_1$, $f_2$ — функции, заданные на $\Omega$, такие, что $f_1(x,y)\leq f_2(x,y)$ для всех $(x,y)\in\Omega$, то объем части пространства $\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega,\ f_1(x,y)\leq z\leq f_2(x,y)\}$, находящегося между графиками $f_1$, $f_2$, равен интегралу

$$\iint\limits_{\Omega}(f_2(x,y)-f_1(x,y))\,dxdy.$$

**22.16. Пример.** Найдем объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$.

Здесь тело представляет собой часть пространства, заключенную между графиками функции $z=0$ и $z=x^2+y^2$, рассматриваемых на области $\Omega=\{(x,y):x^2\leq y\leq 1\}$. Тем самым его объем равен

интегралу

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=1} = \int\limits_{-1}^{1} \left( x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= 2 \left( \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{88}{105}.$$

**22.17. Задачи.** Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

**(1)** $x^2+y^2 = ax$, $z = x^2+y^2$, $z = 0$;

**(2)** $x+y+z = a$, $4x+y = a$, $4x+3y = 3a$, $y = 0$, $z = 0$, $a > 0$;

**22.18.** Пусть $M$ — гладкая поверхность, заданная параметрически посредством непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in \Omega.$$

Тогда площадь $S(M)$ поверхности $M$ может быть найдена по формуле

$$S(M) = \iint\limits_{M} k(u,v)\,dudv,$$

где величина $k(u,v)$ (коэффициент искажения площади) может быть найдена либо по формуле

$$k(u,v) = \sqrt{EG - F^2}, \tag{22.12}$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

либо по формуле

$$k(u,v) = \sqrt{\left|\begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right|^2}. \tag{22.13}$$

Если же поверхность $M$ является графиком функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, то

$$S(M) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{22.14}$$

**22.19. Задачи.**

**1.** Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

**2.** Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

## § 23. Тройной интеграл и многократный интеграл

**23.1.** Пусть $f$ — непрерывная функция трех переменных $(x, y, z)$, заданная на ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тройной интеграл создается аналогично двойному: берут разбиение области $\Omega$ на такие множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, каждая из которых имеет объем (т. е. измерима, например, по мере Жордана), затем в каждой из частей разбиения $\Omega_i$, $i = 1, \ldots, k$, берут по точке $(x_i, y_i, z_i)$ и составляют интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i), \tag{23.1}$$

где $m(\Omega_i)$ — объем множества $\Omega_i$. Число $I$ называют (*тройным*) *интегралом* от функции $f$ по множеству $\Omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ области $\Omega$ на измеримые части такие, что $\max\limits_{i=1,\ldots,k} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, k$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \tag{23.2}$$

Для тройного интеграла используют обозначение $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$.

Здесь символ $dxdydz$ указывает на то, что в основу измерения объема взят объем параллелепипеда как произведение его линейных размеров.

**23.2.** Если взять непрерывную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то аналогично двойному или тройному определяется многократный интеграл, для которого используется обозначение $\int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$.

**23.3. Свойства интеграла.**

**Линейность интеграла.** *Тройной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на $\Omega$ функций $f, g$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\iiint\limits_{\Omega} (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\, dxdydz = \alpha \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz + \beta \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\, dxdydz \quad (23.3)$$

**Аддитивность интеграла.** *При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \ldots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$, то*

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\, dxdydz = \sum_{i=1}^{k} \iiint\limits_{D_i} f(x,y,z)\, dxdydz. \quad (23.4)$$

**23.4. Повторный интеграл.** При переходе от тройного интеграла к повторному можно сначала фиксировать либо одну координату, оставляя переменными другие две, либо две координаты, оставляя переменной оставшуюся одну. В зависимости от типа фиксации координат получаются различные способы перехода к повторному интегрированию.

Итак, для $(x,y,z) \in \Omega$ пусть $\Omega_0 = \{(x,y) : (x,y,z) \in \Omega\}$ — проекция $\Omega$ на плоскость $xOy$. Фиксируем $(x,y) \in \Omega_0$, и пусть $\Omega_{(x,y)} = \{z : (x,y,z) \in \Omega\}$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \iint\limits_{\Omega_0} \left( \int\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y,z)\, dz \right) dxdy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint\limits_{\Omega_0} dxdy \int\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y,z)\, dz. \quad (23.5)$$

Если при этом для каждой пары $(x, y) \in \Omega_0$ множество $\Omega_{(x,y)}$ — это отрезок $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_{\Omega_0} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{23.6}$$

В результате первого интегрирования (по $z$) мы получаем двойной интеграл, разбираться с которым учились раньше.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости — $yOz$ или $zOx$.

Теперь обсудим другой способ разбиения. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R})\ (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция области $\Omega$ на ось $Ox$. При каждом $x \in \Omega$ пусть $\Omega_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in \Omega\}$ — сечение области $\Omega$ при данном $x$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{\Omega_1} \left( \iint\limits_{\Omega_x} f(x, y, z)\, dydz \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если $\Omega_1$ — это отрезок $\Omega_1 = [a, b]$, а при фиксированном $x \in [a, b]$ множество $\Omega_x$ — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями $z = \lambda(x, y)$, $z = \mu(x, y)$, где $c(x) \leq y \leq d(x)$, то в обычных обозначениях

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c(x)}^{d(x)} dy \int\limits_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{23.7}$$

Как и выше, подобные формулы будут при первоначальном обращении к какой-либо из других координатных осей.

**23.5. Замена переменной.** Как отмечено при обсуждении замены переменных в двойном интеграле, при замене надо перенести функцию в область новых переменных и проинтегрировать по мере, в которой учтен коэффициент искажения, вносимый реализующим замену диффеоморфизмом.

Пусть $f$ — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^3$, и пусть отображение $\Phi$ с координатными функциями $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $(u, v, w) \in W$, — диффеоморфизм области $W$ переменных $u, v, w$ на область $D$. Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме

некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \iiint\limits_{X} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw, \quad (23.8)$$

где $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ — якобиан отображения Φ.

Равенство (23.8) называют *формулой замены переменной* в тройном интеграле.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются *сферические координаты* $\varphi, \psi, r$, связанные с исходными переменными $x, y, z$ равенствами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)} = r^2\cos\psi.$$

Здесь переменная $\varphi$ может меняться в каком-либо промежутке длиной $2\pi$, обычно $0 \le \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Бывают удобны также *цилиндрические координаты* $r, \varphi, h$, связанные с $x, y, z$ равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,h)} = r.$$

Здесь $r > 0$, $\varphi$ пробегает при этом промежуток длиной не более $2\pi$, обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $h \in \mathbb{R}$.

В подходящих случаях используются *обобщенные сферические координаты* $\varphi, \psi, r$, связанные с $x, y, z$ равенствами

$$x = ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad y = br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad z = cr\sin^\beta\psi,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)} = \alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Здесь область изменения переменной $\varphi$ зависит от показателя $\alpha$ и ограничивается возможностью возведения в степень $\alpha$, но во всяком случае это область лежит в каком-либо промежутке длиной не более $2\pi$, обычно $0 \le \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

**23.6. Пример.** Запишем интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ в виде повторного, где $\Omega$ — область, ограниченная поверхностями $z = xy$,

$y = x$, $x = 1$, $z = 0$. При этом рассмотрим разный порядок следования переменных.

Поверхности $x = 1$ и $y = x$ — это параллельные оси $Oz$ плоскости, проходящие через соответствующие прямые плоскости $xOy$. Поверхность $z = xy$ — это седло, проходящее через оси координат $Ox$, $Oy$. Поскольку поверхность $x = 1$ должна участвовать в формировании области, у поверхности $z = xy$ надо брать ту часть, где $x > 0$. Равенства $z = xy$ и $z = 0$ говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также $x = 0$ и $y = 0$. Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области $\Omega$ на плоскость $xOy$ будет треугольник $\Delta$: $0 \le x \le 1$, $y \le x$. Для каждой точки $(x, y) \in \Delta$ точка $(x, y, z)$ будет в $\Omega$ при $0 \le z \le xy$. Тем самым, сразу расставляя пределы интегрирования по $\Delta$, получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Delta} dxdy \int\limits_{0}^{xy} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{xy} f(x,y,z)\,dz.$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия $0 \le x \le 1$, $y \le x$, $0 \le z \le xy$ приводят к ограничению $0 \le z \le 1$ на $z$. Фиксировав $z \in [0, 1]$, получаем при каждом таком $z$ область в плоскости $xOy$, ограниченную кривыми $xy = z$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 1).

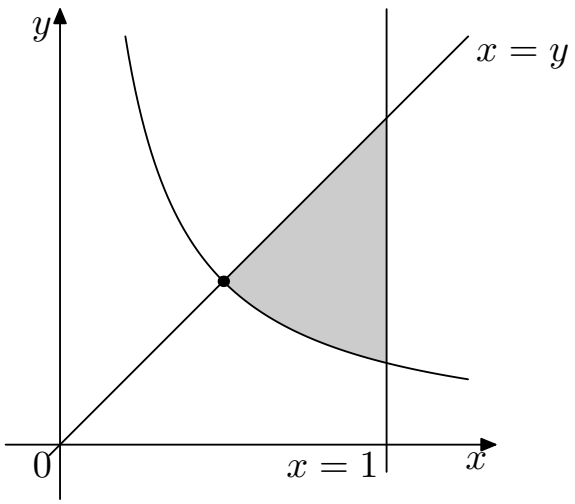


Рис. 1.

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 23.1 область. Най-

дем точку пересечения кривых $y = x$ и $xy = z$: $z = x^2$, $x = \sqrt{z}$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{\sqrt{z}}^1 dx \int\limits_{z/x}^x f(x,y,z)\,dy.$$

**23.7. Задачи.**

**1.** Тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ записать в виде повторного с указанным порядком следования переменных и расставить пределы интегрирования для указанных областей:

**(1)** $\Omega = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4 \geq z \geq 0,\ 2x + y \leq 2\}$, (а) $(y,z,x)$, (б) $(x,y,z)$;

**(2)** $\Omega = \{x \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ y^2 + z^2 \leq a^2\}$, (а) $(y,z,x)$, (б) $(x,z,y)$;

**2.** В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

**(1)** $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^h f(x,y,z)\,dz, \quad (z,y,x);$

**(2)** $\int\limits_0^4 dz \int\limits_0^{3-\frac{3}{4}z} dy \int\limits_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x,y,z)\,dx, \quad (x,y,z);$

**3.** Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ для следующих функций и областей:

**(1)** $f(x,y,z) = y$, $\Omega$ — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$;

**(2)** $f(x,y,z) = x + z$, область $\Omega$ ограничена плоскостями $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$;

**(3)** $f(x,y,z) = x^2 - z^2$, область $\Omega$ ограничена плоскостями $y = -x$, $z = x$, $z = y$, $z = 1$;

**(4)** $f(x,y,z) = xy$, область $\Omega$ ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

**23.8. Пример.** В интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$, где

$$\Omega = \{x^2+y^2+z^2 \le 2az,\ x^2+y^2 \ge z^2\},$$

перейдем к сферическим координатам и запишем его в виде повторного.

Подставляя $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$ в неравенства, характеризующие область, получим неравенства

$$r^2 \le 2ar\sin\psi, \quad r^2\cos^2\psi \ge r^2\sin^2\psi,$$

или

$$r \le 2a\sin\psi, \quad |\cos\psi| \ge |\sin\psi|,$$

характеризующие соответствующую $\Omega$ область $D$ в сферических координатах. Положительность $r$ вместе с ограничением из сферической замены дает ограничение $0 \le \psi \le \pi/2$. Далее, среди $\psi \in [0,\pi/2]$ неравенство $|\cos\psi| \ge |\sin\psi|$ выполняется при $\psi \in [0,\pi/4]$. Итак, мы приходим к интегралу по области

$$0 \le \psi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le r \le 2a\sin\psi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

сферических переменных. Переход к повторному интегралу дает равенство

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \\
&\qquad = \iiint\limits_{D} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi) r^2\cos\psi\,dr d\varphi d\psi \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\psi \int\limits_0^{2a\sin\psi} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi) r^2\cos\psi\,dr.
\end{aligned}$$

**23.9. Пример.** Совершая подходящую замену, вычислим интеграл $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$, где $\Omega$ расположена в октанте $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2+y^2}{m},\ z = \frac{x^2+y^2}{n}, \quad xy = a^2,\ xy = b^2, \quad y = \alpha x,\ y = \beta x$$

$$(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta,\ 0 < m < n).$$

Учитывая наблюдения из примера 22.13, положим

$$u = \frac{x^2 + y^2}{z}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x}.$$

Тогда при переходе к переменным $u, v, w$ области $\Omega$ соответствует прямоугольник

$$m \le u \le n, \quad a^2 \le v \le b^2, \quad \alpha \le w \le \beta.$$

Найдем якобиан $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$, замечая, что выражения $u, v, w$ через $x, y, z$ проще, чем выражения для координатных функций обратного отображения. Имеем

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} & -\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{x^2+y^2}{z^2} \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = -2\frac{y}{x}\frac{x^2+y^2}{z^2}.$$

Выразим переменные $x, y, z$ через $u, v, w$. Переменнные $x, y, z$ положительны по условию. Из двух последних равенств замены получаем

$$y = \sqrt{vw}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad x^2 + y^2 = vw + \frac{v}{w} = \frac{v(w^2+1)}{w},$$

$$z = \frac{x^2+y^2}{u} = \frac{v(w^2+1)}{uw}.$$

Теперь

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z^2}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot z \cdot \frac{z}{x^2+y^2}$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{v(w^2+1)}{uw} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{2}\frac{v(w^2+1)}{u^2w^2}.$$

Переходим к нахождению интеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$$

$$= \int\limits_m^n du \int\limits_{a^2}^{b^2} dv \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{vw}\sqrt{\frac{v}{w}}\frac{v(w^2+1)}{uw}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v(w^2+1)}{u^2w^2}\,dw$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_m^n \frac{du}{u^3}\int\limits_{a^2}^{b^2} v^3\,dv\int\limits_\alpha^\beta \frac{(w^2+1)^2}{w^3}\,dw$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{u^2}\Big|_m^n\cdot\frac{1}{4}v^4\Big|_{a^2}^{b^2}\cdot\left(\frac{1}{2}w^2+2\ln w-\frac{1}{2w^2}\right)\Big|_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left(\beta^2-\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

**23.10. Задачи.**

**1.** Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ от следующих функций $f$ по следующим областям $\Omega$:

**(1)** $f(x,y,z)=z$, $\Omega$ ограничена поверхностями $R^2z^2=h^2(x^2+y^2)$, $z=h$, $h>0$;

**(2)** $f(x,y,z)=\sqrt{y^2+z^2}$, $\Omega$ ограничена поверхностями $y^2+z^2=R^2$, $y+x=R$, $y-x=R$, $R>0$;

**(3)** $f(x,y,z)=x^2-y^2$, $\Omega=\{x^2+y^2+z^2\le a^2,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$;

**(4)** $f(x,y,z)=x+z$, $\Omega=x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$;

**(5)** $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$, $\Omega=\{x^2+y^2\le 2x,\ 0\le z\le y\}$;

**(6)** $f(x,y,z)=xz^2$, $\Omega=\{(3x-4)^2\le y^2+z^2\le x^2\}$;

**2.** Найти

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^m y^n z^p\,dxdydz,$$

где $m,n,p$ — целые неотрицательные числа.

**3.** Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint\limits_{V} x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dxdydz,$$

где область $V$ ограничена плоскостями

$$x+y+z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0,$$

полагая

$$x+y+z=\xi, \quad y+z=\xi\eta, \quad z=\xi\eta\zeta.$$

**23.11.** Аналогично двойному, тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ по $\Omega$ от единичной функции равен объему тела $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

**23.12. Задачи.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

**(1)** $x^2+y^2=R^2$, $x+y+z=a$, $x+y+z=-a$;

**(2)** $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$;

**(3)** $z=xy$, $z=x+y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$;

**(4)** $z=x^2+y^2$, $z=x+y$;

**(5)** $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=x^2+y^2$, $z=0$;

**(6)** $x^2+y^2=1$, $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$;