

§ 22. Двойной интеграл

22.1. Мы будем заниматься приобретением навыков по нахождению двойных, а затем и тройных интегралов. Нас не будет интересовать общность теоретической поддержки, за этим можно обратиться к соответствующим теоретическим руководствам. Поэтому мы будем рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутой области в $\mathbb{R}^2$ (т. е. на таком замкнутом множестве, которое совпадает с замыканием своей внутреннейности). Можно допустить и кусочно непрерывные функции, устроенные так, что их область определения можно представить в виде объединения замкнутых областей, внутреннейности которых не пересекаются, на внутреннейности каждой из которых функция непрерывна.

22.2. Определение двойного интеграла. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Напомним конструкцию двойного интеграла (по Риману). Берется разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, каждое из которых имеет площадь (т. е. измеримо по мере Жордана). Затем в каждом из Ω_i , $i = 1, \dots, n$, берется по точке (x_i, y_i) и составляется *интегральная сумма*

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) m(\Omega_i), \quad (22.1)$$

где $m(\Omega_i)$ — площадь множества Ω_i . Если при рассмотрении разбиений таких, что наибольшая из площадей составляющих эти разбиения множеств неограниченно уменьшается, суммы приближаются к некоторому числу, то его и считают интегралом от f по множеству Ω .

Определение. Число I называют (*двойным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Ω на множества $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, у которого $\max_{i=1, \dots, n} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \quad (22.2)$$

Интеграл от f по множеству Ω обозначается обычно символом

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy.$$

В этом обозначении фрагмент $dxdy$ указывает на то, что в основе измерения взята площадь прямоугольника как произведение длин его сторон.

22.3. Линейность интеграла. Двойной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dxdy = \alpha \iint_{\Omega} f(x, y) dxdy + \beta \iint_{\Omega} g(x, y) dxdy \quad (22.3)$$

22.4. Аддитивность интеграла. При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \dots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, то

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) dxdy.$$

22.5. Повторный интеграл. Пусть Ω_1 — проекция Ω на ось абсцисс, а Ω_2 — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем $x \in \Omega_1$, и пусть Ω_x — сечение Ω на уровне x , т. е. множество всех точек $(x, y) \in \Omega$ при фиксированном x . Предположим для простоты, что Ω_x состоит из конечного набора замкнутых промежутков. Тогда, рассматривая при фиксированном x интеграл от $f(x, y)$ только как функции переменной y по множеству Ω_x , получим функцию

$$\Phi(x) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Ее интегрирование по множеству Ω_1 приведет нас к интегралу

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y) dy \right) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

При наших достаточно жестких ограничениях на область и функцию можно утверждать, что у функции f есть как двойной интеграл, так и оба повторных и она равны между собой:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

Равенство двойного и повторных интегралов открывает путь к нахождению двойного интеграла. Надо найти проекцию Ω на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс, затем при каждом x из этой проекции найти интеграл от f как функции от y по сечению Ω_x (одномерный интеграл), и затем еще раз найти одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от x по проекции Ω_1 .

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что Ω — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \quad (22.5)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, φ, ψ — непрерывные функции, заданные на $[a, b]$. Тогда

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (22.6)$$

Аналогично, если Ω задается соотношениями

$$c \leq y \leq d, \quad \eta(y) \leq x \leq \zeta(y), \quad (22.7)$$

то

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\zeta(y)} f(x, y) dx. \quad (22.8)$$

Если сама область Ω не является криволинейной трапецией, но ее можно разбить на части, являющиеся криволинейными трапециями, то следует воспользоваться аддитивностью интеграла и свести всё к случаю криволинейной трапеции.

22.6. Замена переменной. Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $(u, v) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v на область D . Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_X f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \quad (22.9)$$

где $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ — якобиан отображения Φ .

Равенство (22.9) называют *формулой замены переменной* в двойном интеграле.

Формула замены переменной позволяет переносить интегрирование с одной области на другую и может оказаться, что в новых переменных область интегрирования проще, однако при этом скорее всего надо будет интегрировать более сложную функцию.

При рассмотрении формулы замены переменной можно заметить, что происходит пересадка функции f в новые переменные и интегрирование по новой области по мере, которая имеет вид $k(u, v) du dv$, где $k(u, v)$ — коэффициент искажения меры, показывающий, как площадь малого квадрата, расположенного около (u, v) , изменяется при отображении Φ . Эта структура формулы замены переменной (или перехода к новым переменным) будет сопровождать все рассматриваемые ниже интегралы, только выражения коэффициента искажения меры будут разными.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются полярные координаты (r, φ) , связанные с (x, y) равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r, \quad (22.10)$$

где $r > 0$, а φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π ,

обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, или обобщенные полярные координаты

$$\begin{aligned} x &= ar \cos^\alpha \varphi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} &= \alpha abr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi. \end{aligned} \quad (22.11)$$

22.7. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по треугольнику Ω с вершинами в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ (рис. 1).

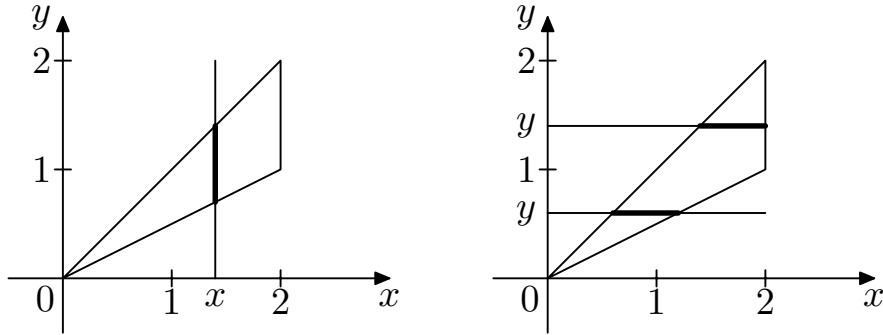


Рис. 1.

Ясно, что его проекция на ось Ox — это отрезок $[0, 2]$. Фиксировав $x \in [0, 2]$ и двигаясь снизу вверх при заданном x , мы войдем в область Ω , пройдя график функции $y = x/2$, и выйдем из Ω через график функции $y = x$, т. е. при каждом фиксированном x сечение Ω на элементе x представляет собой отрезок $[x/2, x]$. Значит, внутренний

интеграл от $f(x, y)$ по сечению на элементе x имеет вид $\int_{x/2}^x f(x, y) dy$.

Сделав теперь x переменным, получаем функцию от x , интеграл от которой по отрезку $[0, 2]$ и приведет к одному из повторных интегралов, а именно к интегралу

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^x f(x, y) dy.$$

Обратимся к другому из повторных интегралов. Проекция Ω на ось Oy — это отрезок $[0, 2]$. Фиксируем $y \in [0, 2]$ и будем двигаться слева направо при этом фиксированном y . В область Ω мы войдем через график функции $x = y$, а вот выход будет зависеть от расположения y , а именно, если $0 \leq y \leq 1$, то выходим через график функции $x = 2y$, а если $1 \leq y \leq 2$, то через график функции $x = 2$. Это указывает

на то, что нам придется разбить Ω на две части, соответственно с $0 \leq y \leq 1$ и $1 \leq y \leq 2$. Тогда двойной интеграл будет равен сумме двух повторных интегралов:

$$\int_0^1 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx.$$

22.8. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по области Ω , ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2 - 2x$. Ясно, что эти графики пересекаются в точках $(0, 0)$, $(3, 3)$, и из нескольких получающихся областей только одна, а именно при $x \in [0, 3]$, ограничена (рис. 2).

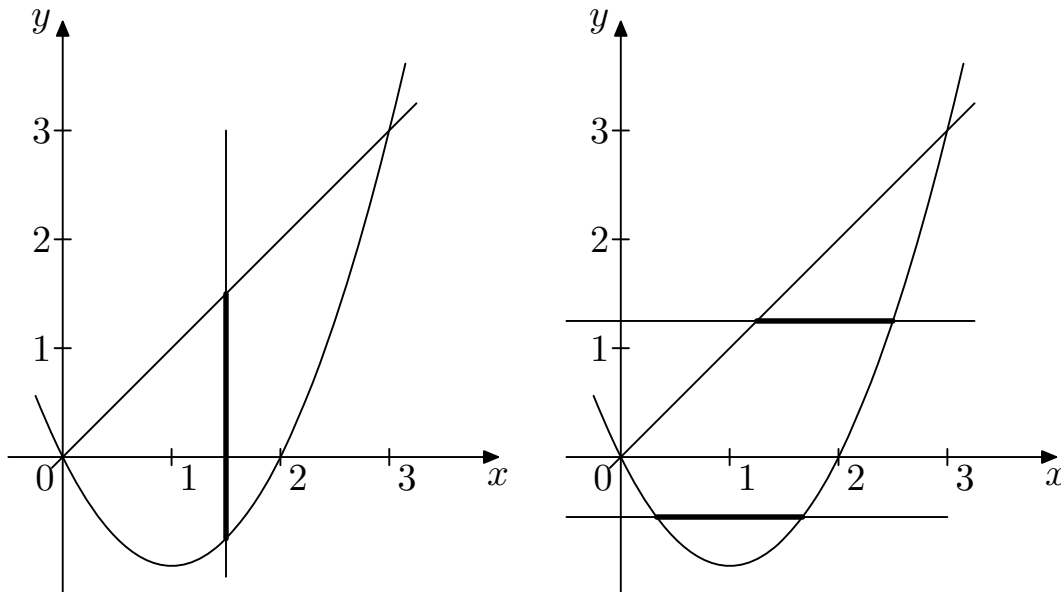


Рис. 2.

При фиксированном $x \in [0, 3]$, двигаясь снизу вверх, мы войдем в область Ω через график функции $y = x^2 - 2x$, а выйдем через $y = x$ (см. рис. 2(a)), так что в результате получим следующий повторный интеграл:

$$\int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^x f(x, y) dy.$$

Проекция этой области на ось ординат представляет собой отрезок $[-1, 3]$, но здесь придется разбить область на две части, соответству-

ющие $-1 \leq y \leq 0$ и $0 \leq y \leq 3$, и интеграл представится в виде суммы

$$\int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_y^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx.$$

22.9. Задачи.

1. В интеграле $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для областей, ограниченных указанными линиями или заданных неравенствами:

- (1) $y = 0, y = a, x + y = 0, x + y = 2a$;
 (2) $2y = x, 2y = x + 6, y = 2x, y = 2x - 3$;
 (3) $y = x^2, x + y = 2$; (4) $x = 0, x = 1, x = y^2, y = e^x$;
 (5) $x^2 + y^2 \leq 2ax$; (6) $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq x$;

2. Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и изобразить множество интегрирования:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx; \quad (2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_{-2}^1 dx \int_{-2}^x f(x, y) dy + \int_1^4 dy \int_{2x-4}^x f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

3. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$(1) \int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy, a > 0; \quad (2) \int_0^1 dy \int_0^{y^2+y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-1}^{\cos x} f(x, y) dy, \quad (4) \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_{-6}^2 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y) dy; \quad (6) \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

4. Вычислить интегралы

$$(1) \iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy, \quad \Omega \text{ ограничена линиями } x = y^2, x = 1;$$

$$(2) \iint_{\Omega} xy^2 dx dy, \quad \Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\};$$

$$(3) \iint_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 25, 3x + y \geq 5\};$$

$$(4) \iint_{\Omega} x dx dy, \quad \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2, x^2 - y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(5) \iint_{\Omega} y dx dy, \quad \Omega = \{0 \leq y \leq 6, x \leq 6, xy \geq 3, y - x - 2 \leq 0\};$$

$$(6) \iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy, \quad \Omega = \{y \geq 0, xy \leq 1, x^2 - 3xy + 2y^2 \leq 0\}.$$

22.10. Пример. В двойном интеграле $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, где Ω —

круг $x^2 + y^2 \leq 2x$, перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования.

Подставляя выражения $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ в соотношение, задающее область Ω , получим неравенство $r^2 \leq 2r \cos \varphi$, или $r \leq 2 \cos \varphi$, характеризующее соответствующую Ω область D в координатах (φ, r) (здесь нам удобно ставить координаты именно в указанном порядке, а не в противоположном, как это удобно при нахождении якобиана). Ограничение $r \geq 0$ приводит к ограничению $\cos \varphi \geq 0$, или же $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Можно для наглядности изобразить зависимость $r = r(\varphi)$ в рамках исходных декартовых координат (x, y) (рис 3), а также изобразив пары (φ, r) как декартовы координаты (рис. 4).

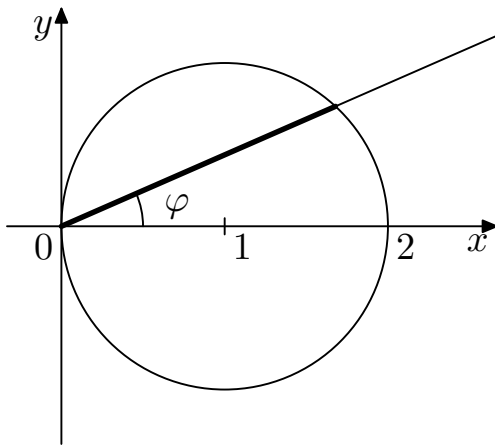


Рис. 3.

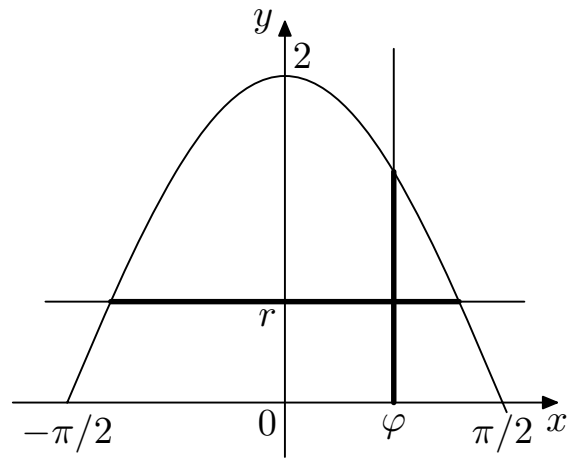


Рис. 4.

Ясно, что

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \end{aligned}$$

Запишем повторный интеграл при другом порядке следования переменных. Проекция области D на ось Or — это отрезок $[0, 2]$, и если при фиксированном r идти слева направо (при той интерпретации φ, r , где они изображены в виде прямоугольной системы координат), то для нахождения зависимости $\varphi = \varphi(r)$, при которой мы войдем в область D , надо решить уравнение $r = 2 \cos \varphi$ с учетом ограничения $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$, или же $\cos \varphi = r/2$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$, или

$$\varphi = \pm \arccos \frac{r}{2} + 2\pi k, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0,$$

откуда $\varphi = -\arccos \frac{r}{2}$. Выйдем из D на графике функции $\varphi = \arccos \frac{r}{2}$. Тем самым приходим к повторному интегралу

$$\int_0^2 r dr \int_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

22.11. Задачи.

1. В интеграле $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов:

- (1) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq x\}$, (2) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2ay\}$,
(3) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq x\}$,
(4) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x + y + a \leq 0\}$,
(5) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2ay \leq 2a^2, x \geq 0\}$, (6) $\Omega = \{2x \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

- (1) $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$.
(2) $\iint_{\Omega} y^2 e^{x^2 + y^2} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,
(3) $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq ax\}, a > 0$,
(4) $\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2y\}$,
(5) $\iint_{\Omega} x^2 dx dy, \Omega = \{(x^2 + y^2)^2 \leq 2xy, x \geq 0\}$,
(6) $\iint_{\Omega} y dx dy, \Omega = \{0 \leq x \leq (x^2 + y^2)^{3/2} \leq 1, y \geq 0\}$.

22.12. Из определения двойного интеграла легко усмотреть, что если мы проинтегрируем единичную функцию по данной области (в переменных (x, y)), то получим величину площади этой области:

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy.$$

22.13. Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < d,$$

воспользовавшись подходящей заменой переменных.

Заметим, что выражения $\frac{x^2}{y}$ и $\frac{x^3}{y^2}$ меняются в постоянных пределах, поэтому, если мы введем новые переменные u, v , полагая $u = \frac{x^2}{y}$ и $v = \frac{x^3}{y^2}$, то область D изменения переменных u, v составляет прямоугольник $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Для нахождения якобиана $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ можно сначала выразить x, y через u, v , а затем считать якобиан, а можно попробовать найти якобиан $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ и потом из него получить требуемый якобиан. Пойдем сначала вторым путем, потому что выражения u, v через x, y проще, чем выражения x, y через u, v . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{x^3}{y^3},$$

так что

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2\frac{x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ 3\frac{x^2}{y^2} & -2\frac{x^3}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Заметив, что $\frac{x}{y} = \frac{v}{u}$, находим, что

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \right| = \left(\frac{u}{v} \right)^4.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} dx dy = \int_a^b du \int_c^d \frac{u^4}{v^4} dv = \int_a^b u^4 du \int_c^d v^{-4} dv \\ &= \frac{u^5}{5} \Big|_a^b \cdot \frac{v^{-3}}{-3} \Big|_c^d = \frac{b^5 - a^5}{15} \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3} \right). \end{aligned}$$

22.14. Задачи.

1. Используя (обобщенные) полярные координаты, найти площадь области, ограниченной кривыми:

- (1) $x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = 2bx, y = x, y = 0, b > a > 0;$
- (2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2;$

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4), \quad x \geq 0, y \geq 0;$$

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3);$$

$$(5) \quad (x + y)^4 = 6xy^2, \quad y \geq 0; \quad (6) \quad x^3 + y^3 = axy.$$

2. Найти площадь области, ограниченной данными кривыми, используя подходящую замену:

$$(1) \quad x = 2y, y = 3x, 3x = 2 - y, x = 4 - 2y;$$

$$(2) \quad x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x, 0 < a < b, 0 < \alpha < \beta;$$

$$(3) \quad xy = a^2, xy = b^2, x^2 = py, x^2 = qy, b > a > 0, q > p > 0;$$

$$(4) \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}, y = x, y = 8x, b > a > 0.$$

22.15. Из определения двойного интеграла можно усмотреть его геометрическую интерпретацию: если $z = f(x, y)$ — некоторая неотрицательная функция на области Ω , то интеграл $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ равен

объему подграфика функции f , т. е. множества $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Если f_1, f_2 — функции, заданные на Ω , такие, что $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ для всех $(x, y) \in \Omega$, то объем части пространства $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$, находящегося между графиками f_1, f_2 , равен интегралу

$$\iint_{\Omega} (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy.$$

22.16. Пример. Найдем объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$.

Здесь тело представляет собой часть пространства, заключенную между графиками функции $z = 0$ и $z = x^2 + y^2$, рассматриваемых на области $\Omega = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$. Тем самым его объем равен интегралу

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\ &= 2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{88}{105}. \end{aligned}$$

22.17. Задачи. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

- (1) $x^2 + y^2 = ax, z = x^2 + y^2, z = 0;$
- (2) $x + y + z = a, 4x + y = a, 4x + 3y = 3a, y = 0, z = 0, a > 0;$
- (3) $x^2 + y^2 = ay, z = xy, z = 0 (x > 0);$
- (4) $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

22.18. Пусть M — гладкая поверхность, заданная параметрически посредством непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega.$$

Тогда площадь $S(M)$ поверхности M может быть найдена по формуле

$$S(M) = \iint_M k(u, v) \, du dv,$$

где величина $k(u, v)$ (коэффициент искажения площади) может быть найдена либо по формуле

$$k(u, v) = \sqrt{EG - F^2}, \quad (22.12)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

либо по формуле

$$k(u, v) = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|^2}. \quad (22.13)$$

Если же поверхность M является графиком функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, то

$$S(M) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \, dx dy. \quad (22.14)$$

22.19. Задачи.

1. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

3. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

§ 23. Тройной интеграл и многократный интеграл

23.1. Пусть f — непрерывная функция трех переменных (x, y, z) , заданная на ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тройной интеграл создается аналогично двойному: берут разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \dots, \Omega_k$, каждая из которых имеет объем (т. е. измерима, например, по мере Жордана), затем в каждой из частей разбиения Ω_i , $i = 1, \dots, k$, берут по точке (x_i, y_i, z_i) и составляют интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i), \quad (23.1)$$

где $m(\Omega_i)$ — объем множества Ω_i . Число I называют (*тройным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ области Ω на измеримые части такие, что $\max_{i=1, \dots, k} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, k$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \quad (23.2)$$

Для тройного интеграла используют обозначение $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$.

Здесь символ $dx dy dz$ указывает на то, что в основу измерения объема взят объем параллелепипеда как произведение его линейных размеров.

23.2. Если взять непрерывную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ на замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то аналогично двойному или тройному определяется многократный интеграл, для которого используется обозначение $\int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

23.3. Свойства интеграла.

Линейность интеграла. Тройной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz \\ = \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (23.3)$$

Аддитивность интеграла. При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \dots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, то

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^k \iiint_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (23.4)$$

23.4. Повторный интеграл. При переходе от тройного интеграла к повторному можно сначала фиксировать либо одну координату, оставляя переменными другие две, либо две координаты, оставляя переменной оставшуюся одну. В зависимости от типа фиксации координат получаются различные способы перехода к повторному интегрированию.

Итак, для $(x, y, z) \in \Omega$ пусть $\Omega_0 = \{(x, y) : (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция Ω на плоскость xOy . Фиксируем $(x, y) \in \Omega_0$, и пусть $\Omega_{(x,y)} = \{z : (x, y, z) \in \Omega\}$. Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz. \quad (23.5)$$

Если при этом для каждой пары $(x, y) \in \Omega_0$ множество $\Omega_{(x,y)}$ — это отрезок $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$, то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (23.6)$$

В результате первого интегрирования (по z) мы получаем двойной интеграл, разбираться с которым учились раньше.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости — yOz или zOx .

Теперь обсудим другой способ разбиения. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R}) (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция области Ω на ось Ox . При каждом $x \in \Omega_1$ пусть $\Omega_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in \Omega\}$ — сечение области Ω при данном x . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если Ω_1 — это отрезок $\Omega_1 = [a, b]$, а при фиксированном $x \in [a, b]$ множество Ω_x — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями $z = \lambda(x, y)$, $z = \mu(x, y)$, где $c(x) \leq y \leq d(x)$, то в обычных обозначениях

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{\lambda(x, y)}^{\mu(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (23.7)$$

Как и выше, подобные формулы будут при первоначальном обращении к какой-либо из других координатных осей.

23.5. Замена переменных. Как отмечено при обсуждении замены переменных в двойном интеграле, при замене надо перенести функцию в область новых переменных и проинтегрировать по мере, в которой учтен коэффициент искажения, вносимый реализующим замену диффеоморфизмом.

Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^3$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $(u, v, w) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v, w на область D . Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_X f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned} \quad (23.8)$$

где $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ — якобиан отображения Φ .

Равенство (23.8) называют *формулой замены переменной* в тройном интеграле.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются *сферические координаты* φ, ψ, r , связанные с исходными переменными x, y, z равенствами

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

Здесь переменная φ может меняться в каком-либо промежутке длиной 2π , обычно $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Бывают удобны также *цилиндрические координаты* r, φ, h , связанные с x, y, z равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, h)} = r.$$

Здесь $r > 0$, φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π , обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $h \in \mathbb{R}$.

В подходящих случаях используются *обобщенные сферические координаты* φ, ψ, r , связанные с x, y, z равенствами

$$x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad z = cr \sin^\beta \psi,$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = \alpha \beta abcr^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

Здесь область изменения переменной φ зависит от показателя α и ограничивается возможностью возведения в степень α , но во всяком случае это область лежит в каком-либо промежутке длиной не более 2π , обычно $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

23.6. Пример. Запишем интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ в виде

повторного, где Ω — область, ограниченная поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$. При этом рассмотрим разный порядок следования переменных.

Поверхности $x = 1$ и $y = x$ — это параллельные оси Oz плоскости, проходящие через соответствующие прямые плоскости xOy . Поверхность $z = xy$ — это седло, проходящее через оси координат Ox , Oy . Поскольку поверхность $x = 1$ должна участвовать в формировании области, у поверхности $z = xy$ надо брать ту часть, где $x > 0$.

Равенства $z = xy$ и $z = 0$ говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также $x = 0$ и $y = 0$. Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области Ω на плоскость xOy будет треугольник Δ : $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$. Для каждой точки $(x, y) \in \Delta$ точка (x, y, z) будет в Ω при $0 \leq z \leq xy$. Тем самым, сразу расставляя пределы интегрирования по Δ , получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\Delta} dx dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$ приводят к ограничению $0 \leq z \leq 1$ на z . Фиксировав $z \in [0, 1]$, получаем при каждом таком z область в плоскости xOy , ограниченную кривыми $xy = z$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 1).

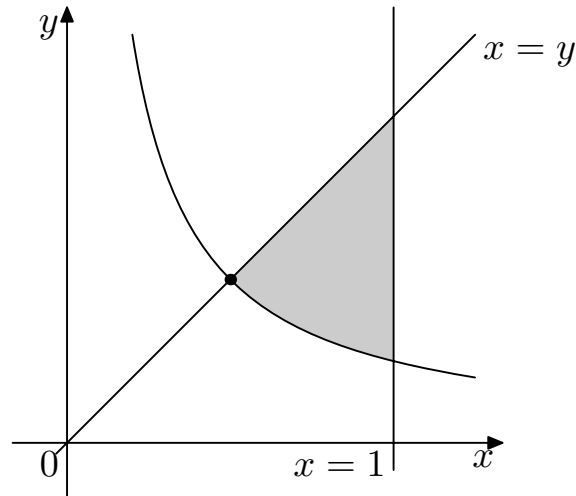


Рис. 1.

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 23.1 область. Найдем точку пересечения кривых $y = x$ и $xy = z$: $z = x^2$, $x = \sqrt{z}$. Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{z/x}^x f(x, y, z) dy.$$

23.7. Задачи.

1. Тройной интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ записать в виде повторного с указанным порядком следования переменных и расставить пределы интегрирования для указанных областей:

(1) $\Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, 4 \geq z \geq 0, 2x + y \leq 2\}$, (а) (y, z, x) , (б) (x, y, z) ;

(2) $\Omega = \{x \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2\}$, (а) (y, z, x) , (б) (x, z, y) ;

(3) $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, x^2 + y^2 \geq z^2\}$, (а) (x, y, z) , (б) (x, z, y) ;

(4) $\Omega = \{y^2 + z^2 \leq x^2, y^2 + x^2 \leq 1, x \geq 0\}$, (а) (x, y, z) , (б) (y, z, x) ;

2. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

$$(1) \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^h f(x, y, z) dz, \quad (z, y, x);$$

$$(2) \int_0^4 dz \int_0^{3-\frac{3}{4}z} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x, y, z) dx, \quad (x, y, z);$$

$$(3) \int_0^2 dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dy \int_0^{2-y-\frac{x}{2}} f(x, y, z) dz, \quad (z, x, y);$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz, \quad (x, z, y), (z, y, x);$$

3. Вычислить интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ для следующих функций и областей:

(1) $f(x, y, z) = y$, Ω — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$;

(2) $f(x, y, z) = x + z$, область Ω ограничена плоскостями $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$;

(3) $f(x, y, z) = x^2 - z^2$, область Ω ограничена плоскостями $y = -x$, $z = x$, $z = y$, $z = 1$;

(4) $f(x, y, z) = xy$, область Ω ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

(5) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, область Ω ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$;

(6) $f(x, y, z) = xyz$, область Ω ограничена поверхностями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

23.8. Пример. В интеграле $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, где

$$\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \geq z^2\},$$

перейдем к сферическим координатам и запишем его в виде повторного.

Подставляя $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$ в неравенства, характеризующие область, получим неравенства

$$r^2 \leq 2ar \sin \psi, \quad r^2 \cos^2 \psi \geq r^2 \sin^2 \psi,$$

или

$$r \leq 2a \sin \psi, \quad |\cos \psi| \geq |\sin \psi|,$$

характеризующие соответствующую Ω область D в сферических координатах. Положительность r вместе с ограничением из сферической замены дает ограничение $0 \leq \psi \leq \pi/2$. Далее, среди $\psi \in [0, \pi/2]$ неравенство $|\cos \psi| \geq |\sin \psi|$ выполняется при $\psi \in [0, \pi/4]$. Итак, мы приходим к интегралу по области

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 2a \sin \psi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

сферических переменных. Переход к повторному интегралу дает равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_D f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\psi \int_0^{2a \sin \psi} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr. \end{aligned}$$

23.9. Пример. Совершая подходящую замену, вычислим интеграл $\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz$, где Ω расположена в октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < m < n).$$

Учитывая наблюдения из примера 22.13, положим

$$u = \frac{x^2 + y^2}{z}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x}.$$

Тогда при переходе к переменным u, v, w области Ω соответствует прямоугольник

$$m \leq u \leq n, \quad a^2 \leq v \leq b^2, \quad \alpha \leq w \leq \beta.$$

Найдем якобиан $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$, замечая, что выражения u, v, w через x, y, z проще, чем выражения для координатных функций обратного отображения. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -2 \frac{y}{x} \frac{x^2 + y^2}{z^2}. \end{aligned}$$

Выразим переменные x, y, z через u, v, w . Переменные x, y, z положительны по условию. Из двух последних равенств замены получаем

$$y = \sqrt{vw}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad x^2 + y^2 = vw + \frac{v}{w} = \frac{v(w^2 + 1)}{w},$$

$$z = \frac{x^2 + y^2}{u} = \frac{v(w^2 + 1)}{uw}.$$

Теперь

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot z \cdot \frac{z}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{v(w^2 + 1)}{uw} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{2} \frac{v(w^2 + 1)}{u^2 w^2}.\end{aligned}$$

Переходим к нахождению интеграла:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz &= \int_m^n du \int_{a^2}^{b^2} dv \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{vw} \sqrt{\frac{v}{w}} \frac{v(w^2 + 1)}{uw} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v(w^2 + 1)}{u^2 w^2} dw \\ &= \frac{1}{2} \int_m^n \frac{du}{u^3} \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(w^2 + 1)^2}{w^3} dw \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_m^n \cdot \frac{1}{4} v^4 \Big|_{a^2}^{b^2} \cdot \left(\frac{1}{2} w^2 + 2 \ln w - \frac{1}{2w^2}\right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) (b^8 - a^8) \left(\beta^2 - \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

23.10. Задачи.

1. Вычислить интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz$ от следующих функ-

ций f по следующим областям Ω :

- (1) $f(x, y, z) = z$, Ω ограничена поверхностями $R^2 z^2 = h^2(x^2 + y^2)$, $z = h$, $h > 0$;
- (2) $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$, Ω ограничена поверхностями $y^2 + z^2 = R^2$, $y + x = R$, $y - x = R$, $R > 0$;
- (3) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0, z \geq 0\}$;
- (4) $f(x, y, z) = x + z$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$;
- (5) $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq y\}$;
- (6) $f(x, y, z) = xz^2$, $\Omega = \{(3x - 4)^2 \leq y^2 + z^2 \leq x^2\}$;
- (7) $f(x, y, z) = xyz$, $\Omega = \{x < yz \leq 2x, y \leq zx \leq 2y, z \leq xy \leq 2z\}$;

(8) $f(x, y, z) = x^2$, область Ω ограничена поверхностями

$$z = ay^2, \quad z = by^2, \quad y > 0, \quad z = \alpha x, \quad z = \beta x, \quad z = h,$$

$$0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < h.$$

2. Найти

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

где m, n, p — целые неотрицательные числа.

3. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dx dy dz,$$

где область V ограничена плоскостями

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

полагая

$$x + y + z = \xi, \quad y + z = \xi\eta, \quad z = \xi\eta\zeta.$$

23.11. Аналогично двойному, тройной интеграл $\iiint_{\Omega} dx dy dz$ по

Ω от единичной функции равен объему тела $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

23.12. Задачи. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

(1) $x^2 + y^2 = R^2, \quad x + y + z = a, \quad x + y + z = -a;$

(2) $y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = x^2 + y^2;$

(3) $z = xy, \quad z = x + y, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0;$

(4) $z = x^2 + y^2, \quad z = x + y;$

(5) $x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0;$

(6) $x^2 + y^2 = 1, \quad z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad z = 0;$

(7) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz, \quad a > 0;$

(8) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z > \sqrt{x^2 + y^2});$

(9) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{p}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$

$$(11) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x = 0, z = 0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} =$$

(12) $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y,$
 $x \geq 0, y \geq 0.$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. (Множественный) интеграл от функции f , определяемый в той же манере, что и тройной (или двойной) интеграл, обозначается через

$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

$$[a_1, b_1] = \{t \in \mathbb{R} : (\exists x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}) (t, x_2, \dots, x_n) \in \Omega\},$$
$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Omega_{x_1}} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$
$$\begin{aligned} & a_1 \leq x_1 \leq b_1, \\ & a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1), \\ & \dots\dots\dots \\ & ,x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1,\dots,x_{n-1}), \end{aligned}$$

где a_1, b_1 , $a_1 < b_1$, — числа, а a_i, b_i , $a_i < b_i$, $i = 2, \dots, n$, — функции от соответствующих переменных, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} dx_2 \cdots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

При нахождении многомерных интегралов надо иметь в виду, что исполнение одного шага на пути уменьшения размерности области интегрирования может привести к рекуррентной по размерности n формуле понижения, согласно которой исходный интеграл I_n как-то сводится к такому же интегралу I_{n-1} по такого же, как и исходный, типу множества, но уже меньшей размерности. Продолжая так далее, можно прийти к одномерному интегралу.

Для многомерного интеграла имеет место формула замены переменной. Если

$$(x_1, \dots, x_n) = (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n))$$

— диффеоморфизм, при котором замкнутая область D пространства переменных $(u_1, \dots, u_n)$ переводится на область Ω , и $f(x_1, \dots, x_n)$ — заданная на Ω непрерывная функция, то

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_D \cdots \int f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Из конкретных многомерных замен отметим сферическую. Она задается равенствами

[illegible]

где

$$r > 0, \quad 0 < \varphi_i < \pi, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad 0 < \varphi_{n-1} < 2\pi,$$

а ее якобиан находится по формуле

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}.$$

23.14. Задачи.

1. Найти объем n -мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, \quad x_i \geq 0, \quad a_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

2. Найти объем n -мерного конуса, ограниченного поверхностями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n.$$

3. Найти объем n -мерного шара

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2.$$

4. Найти $\int \dots \int_{\Omega} x_n^2 dx_1 \dots dx_n$, где область Ω определяется неравенствами

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

23.15. Несобственные кратные интегралы. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность Ω_k , $k \in \mathbb{N}$, называют *исчерпывающей множеством Ω* , если

$$1) \quad \overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$2) \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega;$$

Будем рассматривать только такие функции на Ω , которые интегрируемы на любом открытом множестве D таком, что $\overline{D} \subset \Omega$.

Если для любой последовательности исчерпывающих множеств Ω_k , $k \in \mathbb{N}$, существует не зависящий от выбора последовательности Ω_k , $k \in \mathbb{N}$, предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \dots \int_{\Omega_k} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

его называют *несобственным интегралом от функции f по области Ω* и используют обозначение

$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

а f называют *интегрируемой в несобственном смысле на Ω* .

Сходящиеся несобственные интегралы обладают свойствами линейности, положительности и аддитивности по множествам интегрирования, для них справедлива формула замены переменной в обычном виде.

Для исследования сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции достаточно использовать какую-либо одну последовательность исчерпывающих множеств — для таких функций существование соответствующего предела и его величина не зависит от выбора последовательности исчерпывающих множеств.

Несобственный интеграл называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл от модуля функции. Известно, что если кратный интеграл при условии $n \geq 2$ на размерность пространства n сходится, то он и абсолютно сходится. Это утверждение подчеркивает различие подходов к несобственным интегралам в одномерном и в многомерном случаях.

23.16. Задачи.

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$(1) \iint_{x^2+y^2>1} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}, \quad (2) \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^4+y^4)^\alpha},$$

$$(3) \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{x^\alpha + y^\beta}, \quad \Omega = \{x > 0, y > 0, x^\alpha + y^\beta > 1\}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

$$(4) \iint_{y>1+x^2} \frac{dxdy}{(x+y)^p},$$

$$(5) \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \Omega = \{x^2+y^2 < 1, x > 0, 0 < y < x^2\},$$

$$(6) \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}, \quad \Omega = \{x > 0, y > 0, x+y < 1\},$$

$$(7) \quad \iiint_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}, \quad (8) \quad \iiint_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dx dy dz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p}.$$

2. Показать, что интеграл

$$\iint_{\substack{x>1, \\ y>1}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy, \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

сходятся.

3. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x|<n, \\ |y|<n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2<2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

4. Доказать, что повторные интегралы

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \sin(x^2 + y^2) dy, \quad \int_0^\infty dy \int_0^\infty \sin(x^2 + y^2) dx$$

сходятся и имеют одинаковое значение. Найти это значение.